Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Wojciech Hury
Nr albumu: 159141

Operacje kohomologiczne w ekwiwariantnych kohomologiach singularnych

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dra hab. Stefana Jackowskiego
Instytut Matematyki

Wrzesień 2002

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

W pracy skonstruowano operacje kohomologiczne w ekwiwariantnych kohomologiach singularnych na kategorii G-CW kompleksów w przypadku, gdy system współczynników przyjmuje na orbitach jedynie wartości 0 lub $\mathbb{Z}_2$.

Słowa kluczowe

ekwiwariantne operacje kohomologiczne, ekwiwariantne kohomologie

Klasyfikacja tematyczna

55N91 Equivariant homology and cohomology
55S91 Equivariant operations and obstructions

Spis treści

Wstęp

Ekwiwariantna teoria (ko)homologii jest ciągiem funktorów z kategorii G-przestrzeni w kategorię grup abelowych spełniającym ekwiwariantne odpowiedniki aksjomatów Eilenberga-Steenroda. Pojęcie ekwiwariantnych (ko)homologii wprowadził Bredon ([1], [2]) dla skończonych grup. Potem jego pracę uogólniono na wszystkie grupy topologiczne – teorię singularną dla dowolnej grupy skonstruował Illman ([5]).

W nieekwiwariantnej teorii o współczynnikach w $\mathbb{Z}_p$ istnieją operacje kohomologiczne odkryte przez Steenroda ([9]) i nazwane jego nazwiskiem. W niektórych sytuacjach w przypadku ekwiwariantnym jest jasne, że analogiczne operacje również istnieją. Odpowiednikiem grupy współczynników jest w teorii ekwiwariantnej pojęcie systemu współczynników – funktora z kategorii orbit G/H w kategorię grup abelowych. Jak zobaczymy, dla systemu $\underline{M}$ stałego w grupie abelowej M istnieje naturalny izomorfizm funktorów

$$H_G^*(X;\underline{M}) \cong H^*(X/G;M),$$

gdzie H^* jest nieekwiwariantną a H_G^* ekwiwariantną teorią kohomologii. Zatem w $H_G^*(X;\underline{\mathbb{Z}_p})$ operacje, oczywiście, istnieją. W ogólnym przypadku nie ma podobnego opisu teorii ekwiwariantnej przez nieekwiwariantną.

Lewis, May i McClure w [6] zaproponowali numerowanie ekwiwariantnych kohomologii nie tylko liczbami całkowitymi ale i reprezentacjami grupy G (kohomologie z $RO(G)$-gradacją). Caruso pokazał w [4], że dla grupy $G = \mathbb{Z}_p$ algebra operacji kohomologicznych w kohomologiach z $RO(G)$-gradacją o stałym systemie współczynników $\underline{\mathbb{Z}_p}$ po obcięciu do zwykłych ekwiwariantnych kohomologii składa się tylko z identyczności i homomorfizmu Bocksteina.

W tej pracy pozostaniemy w świecie tradycyjnych ekwiwariantnych teorii kohomologii (numerowanych tylko przez liczby całkowite). Udowodnimy, że przy ograniczeniu teorii ekwiwariantnej do G-CW kompleksów w kohomologiach o systemach współczynników $\mathcal{M}$, które na orbitach przyjmują tylko wartości $\mathbb{Z}_2$ bądź 0, istnieją operacje spełniające aksjomaty Steenroda.

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi, prof. Stefanowi Jackowskiemu, za wszystkie uwagi, które miały duży wpływ na kształt tej pracy. Pragnę również podziękować pani dr Agnieszce Bojanowskiej za opiekę i pomoc w okresie moich studiów.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia i definicje

Wymienimy poniżej używane przez nas pojęcia i definicje.

Kategorię grup abelowych oznaczamy przez Ab, natomiast kategorię przestrzeni topologicznych przez Top. Przez R będziemy oznaczali pierścień przemienny z jedynką a przez G dowolną dyskretną grupę topologiczną. Jako G-przestrzeń definiujemy przestrzeń topologiczną z (lewym) działaniem grupy G. Ciągłe przekształcenie $f\colon X \to Y$ G-przestrzeni X oraz Y nazwiemy *ekwiwariantnym* lub G-przekształceniem, jeśli f zachowuje działanie grupy, to znaczy dla każdego $x \in X$ oraz $g \in G$ prawdziwa jest równość $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Kategorię G-przestrzeni z ciągłymi przekształceniami ekwiwariantnymi jako morfizmami oznaczać będziemy przez $GTop$.

Kategoria orbit $\mathcal{O}_G$ to pełna podkategoria kategorii G-przestrzeni, której obiektami są orbity G/H dla wszystkich podgrup $H \subset G$. Będziemy rozpatrywali różne funktory z kategorii $\mathcal{O}_G$. Dowolny *kontrawariantny* funktor z $\mathcal{O}_G$ w kategorię grup nazwiemy $\mathcal{O}_G$-grupą, z kolei kontrawariantny funktor z $\mathcal{O}_G$ w kategorię kompleksów łańcuchowych nazwiemy $\mathcal{O}_G$-kompleksem łańcuchowym. Analogiczne nazewnictwo będziemy stosować dla kontrawariantnych funktorów z $\mathcal{O}_G$ w inne kategorie. Kategorię $\mathcal{O}_G$-grup abelowych będziemy oznaczali przez $\mathcal{A}b_G$.

Dla G-przestrzeni X i podgrupy $H \in G$ przez X^H oznaczać będziemy podprzestrzeń punktów stałych działania H na X, to znaczy taką podprzestrzeń w X, że $x \in X^H \Leftrightarrow \forall_{g \in H} \quad g \cdot x = x$.

Przez $\mathbb{Z}_p$ oznaczamy p-elementową grupę cykliczną.

Rozdział 2

Ekwiwariantne kohomologie singularne

Sören Illman definiuje w [5] dla dowolnej grupy topologicznej G ekwiwariantny kompleks łańcuchów singularnych, co prowadzi do określenia funktora ekwiwariantnych singularnych (ko)homologii na kategorii par G-przestrzeni. Nasza definicja jest wyrażona nieco innym językiem, ale równoważna w rozważanym przez nas przypadku dyskretnej grupy G.

Zanim zdefiniujemy odpowiedni kompleks łańcuchowy, zróbmy kilka prostych obserwacji dotyczących G-przekształceń z orbity G/H.

Stwierdzenie 2.1. *Niech X będzie dowolną G-przestrzenią a $H \subset G$ podgrupą grupy G. Mamy wtedy izomorfizm zbiorów*

$$\mathrm{Map}_G(G/H, X) \cong X^H.$$

Dowód. G-przekształcenie $\alpha\colon G/H \to X$ jest wyznaczone jednoznacznie przez $\alpha(eH) = x_\alpha$. Zauważmy, że dla dowolnego $h \in H$ musi być: $hx_\alpha = h\alpha(eH) = \alpha(hH) = \alpha(eH) = x_\alpha$, zatem $x_\alpha \in X^H$. Z drugiej strony, dla dowolnego $x \in X^H$ możemy zdefiniować G-przekształcenie $\alpha_x\colon G/H \to X$ dane wzorem $\alpha_x(gH) = gx$. Łatwo sprawdzić, że jest to dobrze określone przekształcenie, zatem istnieje żądany izomorfizm zbiorów. □

Stwierdzenie 2.2. *Niech $N(H,K) = \{g \in G | Hg \subset gK\}$. Istnieją izomorfizmy zbiorów*

$$\mathrm{Map}_G(G/H, G/K) \cong (G/K)^H \cong N(H,K)/K.$$

Dowód. Pierwszy izomorfizm to szczególny przypadek izomorfizmu ze stwierdzenia 2.1. Dla dowodu drugiego izomorfizmu zauważmy najpierw, że K działa z prawej strony na $N(H,K)$ i $N(H,K)/K$ jest zbiorem orbit tego działania. Zauważmy teraz, że $gK \in (G/K)^H \Leftrightarrow HgK = gK \Leftrightarrow g^{-1}HgK = K \Leftrightarrow g^{-1}Hg \subset K \Leftrightarrow Hg \subset gK$. □

Niech X będzie dowolną G-przestrzenią. Dla $g \in G$ określamy przekształcenie $\hat{g}\colon X \to X$ jako $\hat{g}(x) = gx$ (zwróćmy uwagę, że dla nieabelowej grupy G najczęściej nie jest to G-przekształcenie). Prawdziwa jest tożsamość $\hat{g}_1 \circ \hat{g}_2 = \widehat{g_1 g_2}$. Niech S oznacza funktor $GTop \times \mathcal{O}_G \to Top$ zdefiniowany na obiektach jako $S(X, G/H) = X^H$. S jest kowariantny ze względu na pierwszą zmienną i kontrawariantny ze względu na drugą zmienną. Na morfizmach określamy S następująco. Dla $f \in \mathrm{Map}_G(X,Y)$ określamy $S(f)\colon X^H \to Y^H$ jako $S(f) = f|_{X^H}$. Poprawność takiego określenia wynika z faktu, że dla każdego G-przekształcenia $f\colon X \to Y$ mamy $f(X^H) \subset Y^H$. Niech teraz $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/H, G/K)$ będzie dane wzorem

$\alpha(gH) = gg_\alpha K$. Ze stwierdzenia 2.2 wynika, że dla dowolnego $h \in H$ istnieje $k_h \in K$ taki, że $hg_\alpha = g_\alpha k_h$. Dla każdego $x \in X^K$ mamy zatem $hg_\alpha x = g_\alpha k_h x = g_\alpha x$, czyli $g_\alpha x \in X^H$. Możemy zatem zdefiniować $S(\alpha)\colon X^K \to X^H$ jako $S(\alpha) = g_\alpha|_{X^K}$. Łatwo pokazać następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.3. *Izomorfizm ze stwierdzenia 2.1 indukuje naturalny izomorfizm funktorów*

$$\mathrm{Map}_G(G/H, X) \cong S(X, G/H).$$

Zdefiniujmy funktor $\underline{C}_*$ z kategorii $GTop$ w kategorię $\mathcal{O}_G$-łańcuchów singularnych jako $\underline{C}_*(X)(G/H) = C_*(X^H)$, gdzie $C_*(X^H)$ jest kompleksem łańcuchów singularnych przestrzeni X^H. $\underline{C}_*$ jako złożenie $C_* \circ S$ jest rzeczywiście funktorem. Dla $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/H, G/K)$ będziemy oznaczać przez α^* przekształcenie $\underline{C}_*(X)(\alpha)$ dla dowolnego X.

Ze stwierdzenia 10.1 w [2] wynika następujący wniosek (w [2] zakłada się, że G jest skończona, ale dowód stwierdzenia 10.1 jest poprawny dla dowolnej dyskretnej grupy G).

Wniosek 2.4. *$\underline{C}_n(X)$ jest projektywnym obiektem w $\mathcal{A}b_G$ dla dowolnych n oraz X.*

Ekwiwariantnym n-sympleksem $\hat{\sigma}$ typu H w X nazwiemy dowolne G-przekształcenie $\hat{\sigma}\colon \Delta^n \times G/H \to X$, gdzie G działa trywialnie na Δ^n. Zdefiniujmy $\hat{\underline{C}}_n(X)(G/H)$ jako wolną grupę abelową generowaną przez zbiór wszystkich ekwiwariantnych n-sympleksów typu H i wprowadźmy w zwykły sposób różniczkę $\hat{\partial}$ w $\hat{\underline{C}}_*(X)(G/H)$. Naturalny izomorfizm

$$\mathrm{Map}(\Delta^n, \mathrm{Map}_G(G/H, X)) \cong \mathrm{Map}_G(\Delta^n \times G/H, X)$$

indukuje naturalną równoważność funktorów

$$\Lambda\colon \underline{C}_*(X)(G/H) \to \hat{\underline{C}}_*(X)(G/H).$$

Zauważmy, że $(\Lambda(\sigma))(x, gH) = (g \cdot \sigma(x))$ dla $\sigma \in \underline{C}_*(X)(G/H)$. Dla sympleksu $\sigma\colon \Delta^n \to X^K$ będziemy oznaczali przez f^K_σ ekwiwariantny sympleks $\Lambda(\sigma)$. Niech $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/K, G/H)$. Zauważmy, że

$$f^K_{\alpha^*(\sigma)} = f^H_\sigma \circ (id_n \times \alpha). \tag{2.1}$$

Wprowadzimy teraz pojęcie systemu współczynników. Odpowiada ono grupie współczynników w nieekwiwariantnej teorii kohomologii singularnych. Poniższa definicja jest równoważna definicji 1.2 w [5] w przypadku dyskretnej grupy G.

Definicja 2.5. *Kontrawariantnym systemem współczynników* $\mathcal{M}$ dla G nazywamy kontrawariantny funktor $\mathcal{M}$ z $\mathcal{O}_G$ w kategorię R-modułów. Mówiąc dalej "system współczynników" będziemy mieli na myśli kontrawariantny system współczynników.

Niech $C^n_G(X; \mathcal{M})$ oznacza grupę wszystkich transformacji naturalnych $\underline{C}_n(X) \to \mathcal{M}$. Określamy $\delta^n\colon C^n_G(X) \to C^{n+1}_G(X)$ jako $\delta^n(a) = a \circ \partial_{n+1}$. Łatwo zauważyć, że $\delta(a)$ jest transformacją naturalną. Na C^n_G można wprowadzić strukturę R-modułu dzięki strukturze R-modułu na każdym $\mathcal{M}(G/H)$, określając $(ra)(\sigma) = r(a(\sigma))$. Dla G-przekształcenia $f\colon X \to Y$ określamy $f^*\colon C^n_G(Y; \mathcal{M}) \to C^n_G(X; \mathcal{M})$ przez $f^*(a) = a \circ f_*$. Jest oczywiste następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.6. *$C^n_G(\ ; \mathcal{M})$ jest funktorem z kategorii G-przestrzeni w kategorię kompleksów kołańcuchowych R-modułów.*

Możemy teraz zdefiniować ekwiwariantne kohomologie G-przestrzeni X.

Definicja 2.7. Definiujemy $H^n_G(X;\mathcal{M})$ jako n-ty moduł kohomologii kompleksu kołańcuchowego $C^*_G(X;\mathcal{M})$. $H^n_G(\ ;\mathcal{M})$ nazywamy n-tymi kohomologiami ekwiwariantnymi o systemie współczynników $\mathcal{M}$.

Uwaga 2.8. W standardowy sposób można zdefiniować $\underline{C}_*(X,A)$ dla G-pary (X,A). Wtedy określa się $C^*_G(X,A;\mathcal{M})$ jako R-moduł transformacji naturalnych funktorów $\underline{C}_*(X,A) \to \mathcal{M}$ oraz $H^*_G(X,A;\mathcal{M})$ jako kohomologie kompleksu $C^*_G(X,A;\mathcal{M})$.

Definicja 2.9. *Ekwiwariantną teorią kohomologii* na kategorii par G-przestrzeni nazywamy ciąg $\{h^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kontrawariantnych funktorów z tej kategorii w kategorię R-modułów spełniający następujące warunki:

1. Istnieje transformacja naturalna $\delta\colon h^n(A) \to h^{n+1}(X,A)$.

2. (*Aksjomat ciągu dokładnego*) Niech $i\colon A \hookrightarrow X$ oraz $j\colon (X,\varnothing) \hookrightarrow (X,A)$ będą G-inkluzjami. Istnieje długi ciąg dokładny
$$\begin{aligned}\cdots \leftarrow h^n(A) \xleftarrow{h^n(i)} h^n(X) \xleftarrow{h^n(j)} h^n(X,A) \xleftarrow{\delta} h^{n-1}(A) \leftarrow \cdots\\ \leftarrow \cdots \leftarrow h^0(X,A) \leftarrow 0.\end{aligned}$$

3. (*Aksjomat homotopii*) Jeśli $f,k\colon (X,A) \to (Y,B)$ są G-homotopijne, to $f^* = k^*$.

4. (*Aksjomat wycinania*) Niech $U \subset A$ będzie takim G-podzbiorem, że $\overline{U} \subset \operatorname{int}(A)$. Wtedy włożenie $i : (X-U, A-U) \to (X,A)$ indukuje izomorfizm
$$i^*\colon h^*(X,A) \longrightarrow h^*(X-U, A-U).$$

Definicja 2.10. Ekwiwariantną teorię kohomologii h^* nazywamy *zwykłą o systemie współczynników* $\mathcal{M}$, jeśli $h^n(G/H) = 0$ dla wszystkich $n > 0$ oraz istnieje naturalny izomorfizm funktorów na kategorii $\mathcal{O}_G$, $h^0(G/H) \cong \mathcal{M}(G/H)$.

Illman dowiódł w [5] następujące twierdzenie (patrz twierdzenie 2.2, stwierdzenie 8.1 oraz definicja 4.6 w [5]).

Twierdzenie 2.11. *$H^*_G(\ ;\mathcal{M})$ jest zwykłą ekwiwariantną teorią kohomologii o systemie współczynników $\mathcal{M}$. Co więcej, $H^*_G(\ ;\mathcal{M})$ spełnia* aksjomat addytywności, *to znaczy G-inkluzje $i_\omega\colon X_\omega \to \coprod X_\omega$ indukują izomorfizm*
$$\prod H^*_G(i_\omega)\colon \prod H^*_G(X_\omega) \xleftarrow{\cong} H^*_G(\coprod X_\omega).$$

Rozdział 3

Systemy współczynników

Pokażemy teraz kilka ważnych przykładów i faktów dotyczących systemów współczynników.

Stwierdzenie 3.1. *Niech* $0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$ *będzie ciągiem dokładnym w kategorii* $\mathcal{A}b_G$. *Powyższy ciąg indukuje długi ciąg dokładny kohomologii dla dowolnego* X

$$\ldots \to H^n_G(X;\mathcal{N}') \to H^n_G(X;\mathcal{N}) \to H^n_G(X;\mathcal{N}'') \to H^{n+1}_G(X;\mathcal{N}') \to \ldots$$

Dowód. Na podstawie wniosku 2.4 $\underline{C}_n(X)$ jest projektywny w $\mathcal{A}b_G$. Wynika stąd, że mamy indukowany krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych $0 \to C^*_G(X;\mathcal{N}') \to C^*_G(X;\mathcal{N}) \to C^*_G(X;\mathcal{N}'') \to 0$, który w zwykły sposób indukuje długi ciąg dokładny kohomologii. □

Definicja 3.2. System współczynników $\mathcal{M}$ nazywamy *pierścieniem przemiennym współczynników*, jeśli spełnione są następujące warunki

(1) $\mathcal{M}(G/H)$ jest pierścieniem przemiennym dla dowolnej podgrupy $H \subset G$,

(2) mnożenie w każdym pierścieniu $\mathcal{M}(G/H)$ spełnia dla dowolnego $r \in R$ warunek

$$ra \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot rb,$$

(3) dla dowolnego $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/H, G/K)$ R-homomorfizm $\mathcal{M}(\alpha)$ jest homomorfizmem pierścieni $\mathcal{M}(G/K) \to \mathcal{M}(G/H)$.

Pierścieniem R-współczynników nazwiemy taki przemienny pierścień współczynników $\mathcal{M}$, że dla każdego G/H jest $\mathcal{M}(G/H) = R$ lub $\mathcal{M}(G/H) = 0$ a morfizmy są identycznościami bądź homomorfizmami zerowymi (uwaga: nie zakładamy, że jeśli $\mathcal{M}(G/H) = R = \mathcal{M}(G/K)$ to dla $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/K, G/H)$ jest $\mathcal{M}(\alpha) = \mathrm{id}_R$).

Przykład 3.3. Systemem współczynników *stałym w grupie* A nazywamy taki system $\underline{A}$, że dla dowolnego $\alpha \colon G/H \to G/L$ mamy

$$\underline{A}(G/H) = A = \underline{A}(G/L) \quad \text{oraz} \quad \underline{A}(\alpha) = \mathrm{id}_A.$$

Jeśli A jest pierścieniem, system $\underline{A}$ jest przykładem pierścienia A-współczynników.

Przykład 3.4. Ustalmy podgrupę $H \subset G$. Definiujemy pierścień R-współczynników R_H w następujący sposób.

$$R_H(G/K) = \begin{cases} R & \text{jeśli } K \text{ jest sprzężone z } H \text{ w } G, \\ 0 & \text{jeśli } K \text{ nie jest sprzężone z } H \text{ w } G. \end{cases}$$

Dla $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/K, G/L)$ określamy

$$R_H(\alpha) = \begin{cases} \mathrm{id}_R & \text{jeśli } R_H(G/K) = R = R_H(G/L) \\ 0 & \text{jeśli } R_H(G/K) = 0 \text{ lub } R_H(G/L) = 0. \end{cases}$$

Pierścień R_H jest najmniejszym wśród takich pierścieni R-współczynników $\mathcal{M}$, że $\mathcal{M}(G/H) = R$. Najmniejszym w tym sensie, że dla dowolnego $\mathcal{M}$ spełniającego $\mathcal{M}(G/H) = R$ musi być $\mathcal{M}(G/K) = R_H(G/K)$ jeśli tylko $R_H(G/K) \neq 0$ oraz $\mathcal{M}(\alpha) = R_H(\alpha)$ jeśli tylko $R_H(\alpha) \neq 0$.

Niech A będzie grupą abelową. Dla $\mathcal{M}$ będącego pierścieniem R-współczynników będziemy oznaczali przez $\mathcal{M}_A$ system współczynników *odpowiadający* $\mathcal{M}$, to znaczy spełniający

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A(G/H) = A \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}(G/H) = R \\ \mathcal{M}_A(\alpha) = id_A \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}(\alpha) = id_R. \end{aligned}$$

W innych przypadkach mamy $\mathcal{M}_A(G/H) = 0$ oraz $\mathcal{M}_A(\alpha) = 0$.

Łatwo stwierdzić, że dla $\mathcal{M}$ będącego pierścieniem $\mathbb{Z}_2$-współczynników istnieje ciąg dokładny systemów współczynników

$$0 \to \mathcal{M} \xrightarrow{\cdot 2} \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_4} \xrightarrow{\mathrm{mod}\ 2} \mathcal{M} \to 0$$

indukujący na podstawie stwierdzenia 3.1 homomorfizm

$$\beta\colon H^n_G(X;\mathcal{M}) \to H^{n+1}_G(X;\mathcal{M}),$$

który będziemy nazywali homomorfizmem *Bosckteina.*

Przykład 3.5. Niech Y będzie G-przestrzenią z punktem bazowym y_0 ($y_0 \in X^G$) oraz $n \geqslant 1$. Przez $\omega_n(Y)$ będziemy oznaczać system współczynników zdefiniowany jako

$$\omega_n(G/H) = \pi_n(Y^H, y_0).$$

Niech $\mathcal{S}_G$ będzie podzbiorem wszystkich podgrup grupy G, w którym każda klasa sprzężoności ma dokładnie jednego reprezentanta. Niech $Y_n = \bigvee_{H\in\mathcal{S}_G} \left((S^n \times G/H)/(* \times G/H)\right) = \bigvee_{H\in\mathcal{S}_G} (S^n \wedge (G/H)^+)$. Zauważmy, że Y_n^K jest bukietem sfer dla każdego $K \subset G$, zatem dla każdego $K \subset G$ przestrzeń Y_n^K jest niepusta, łukowo spójna i n-prosta dla $n \geqslant 2$. Rozpatrzmy system współczynników $\omega_n(Y_n)$. Mamy

$$\omega_n(Y_n)(G/K) = \sum_{H\in\mathcal{S}_G} \mathbb{Z}[(G/H)^K].$$

Niech $gH \in (G/H)^K$ oraz niech $\alpha\colon G/L \to G/K$ będzie dane przez $\alpha(gL) = gg_\alpha K$. Przypomnijmy, że w pierwszym rozdziale zdefiniowaliśmy funktor $S(X, G/H) = X^H$. Oczywiście $\omega_n(Y_n)$ jest złożeniem $\pi_n \circ S(Y_n,\ )$. $S(\alpha)$ było zdefiniowane jako ograniczenie $\hat{g_\alpha}$, które na $\pi_n(S^n \wedge (G/H)^+, *)$ indukuje $\pi_n(\hat{g})$, które dla dowolnego generatora spełnia $\pi_n(\hat{g})(1_{gH}) = 1_{g_\alpha gH}$. Wynika stąd, że

$$(\omega(Y_n)(\alpha))(1_{gH}) = 1_{g_\alpha gH} \in \omega(Y_n)(G/L).$$

Dla pierścienia $\mathbb{Z}_2$-współczynników $\mathcal{M}$ określamy $\Upsilon_{\mathcal{M}}\colon \omega(Y_n) \to \mathcal{M}$ następująco. Zdefiniujemy $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ na $\omega(Y_n)(G/K)$. Dla $g \in G$ takiego, że $gK \in (G/K)^L$, oznaczamy przez $\alpha_g^{L,K}$ G-przekształcenie $G/L \to G/K$ dane wzorem $\alpha_g^{L,K}(L) = gK$. Dla $gH \in (G/H)^K$ kładziemy

$$\Upsilon_{\mathcal{M}}(1_{gH}) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \mathcal{M}(G/H) = 0 \\ \mathcal{M}(\alpha_g^{K,H})(1) & \text{jeśli } \mathcal{M}(G/H) = \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Stwierdzenie 3.6. $\Upsilon_{\mathcal{M}} \colon \omega(Y_n) \to \mathcal{M}$ *jest transformacją naturalną.*

Dowód. Weźmy dowolne $g_0H \in (G/H)^K$ oraz $\beta \in \mathrm{Map}_G(G/L, G/K)$ dane przez $\beta(L) = g_\beta K$. Pokażemy, że $\mathcal{M}(\beta) \circ \Upsilon_{\mathcal{M}} = \Upsilon_{\mathcal{M}} \circ (\omega(Y_n)(\beta))$.

Jeśli $\mathcal{M}(G/H) = 0$, obie strony są równe 0. Załóżmy zatem, że $\mathcal{M}(G/H) = \mathbb{Z}_2$. W tym przypadku

$$\mathcal{M}(\beta)(\Upsilon_{\mathcal{M}}(1_{g_0H})) = \mathcal{M}(\beta)(\mathcal{M}(\alpha_{g_0}^{K,H})(1)).$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\mathcal{M}}((\omega(Y_n)(\beta))(1_{g_0H})) &= \Upsilon_{\mathcal{M}}(1_{g_\beta g_0H}) = \mathcal{M}(\alpha_{g_\beta g_0}^{L,H})(1) \\ &= (\mathcal{M}(\alpha_{g_\beta}^{L,K}) \circ \mathcal{M}(\alpha_{g_0}^{K,H}))(1) \\ &= (\mathcal{M}(\beta) \circ \mathcal{M}(\alpha_{g_0}^{K,H}))(1).\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 3.7. $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ *jest epimorfizmem.*

Dowód. Niech $\mathcal{M}(G/H) = \mathbb{Z}_2$. Z definicji $\mathcal{S}_G$ wynika, że istnieje taka podgrupa $H' \in \mathcal{S}_G$ oraz element $g \in G$, że $H = gH'g^{-1}$. Wtedy $gH' \in (G/H')^H$, z czego wynika, że $1_{gH'} \in \omega(Y_n)(G/H)$. Oczywiście $\Upsilon_{\mathcal{M}}(1_{gH'}) = 1 \in \mathcal{M}(G/H)$. □

Rozdział 4

G-CW kompleksy

Wprowadzimy teraz pojęcie G-CW kompleksu i komórkowej ekwiwariantnej teorii kohomologii. Więcej informacji o G-CW kompleksach i komórkowych (ko)homologiach można znaleźć np. w [7] i [10].

Przestrzeń $D^n \times G/H$, gdzie D^n jest dyskiem wymiaru n z trywialnym działaniem G, nazywamy G-komórką *typu* H i *wymiaru* n albo krótko n-komórką. Niech X będzie pewną G-przestrzenią. Dla $f\colon S^{n-1} \times G/H \to X$ możemy otrzymać nową G-przestrzeń Y poprzez doklejenie wzdłuż f odpowiedniej n-komórki: $Y = (D^n \times G/H) \cup_f X$. Oczywiście f można rozszerzyć do $f'\colon D^n \times G/H \to Y$ kładąc $f'(x, gH) = (x, gH)$ dla $x \in D^n \setminus S^{n-1}$. Podprzestrzeń $f'(D^n \times G/H)$ będziemy określać *domkniętą doklejoną n-komórką. Relatywnym G-CW kompleksem* (X, Y) nazywamy G-przestrzeń X zbudowaną następująco. Definiujemy $X^{(-1)} = Y$. Przez $X^{(n)}$ oznaczamy G-przestrzeń otrzymaną z $X^{(n-1)}$ poprzez doklejenie dowolnej liczby komórek wymiaru n dowolnego typu. Wprowadzamy w $X^{(n)}$ słabą topologię ze względu na włożenia wszystkich domkniętych doklejonych n-komórek oraz włożenie $X^{(n-1)} \subset X^{(n)}$. Teraz $X = \bigcup_n X^{(n)}$ ze słabą topologią. $X^{(n)}$ nazywamy n-tym szkieletem G-CW kompleksu X. G-CW kompleks X to taka G-przestrzeń X, że $(X, \varnothing)$ jest relatywnym G-CW kompleksem. G-CW parą (X, A) nazywamy taki relatywny G-CW kompleks (X, A), w którym A jest G-CW kompleksem.

Na kategorii G-CW par można określić komórkową teorię kohomologii $\hat{H}^n_G(\ ;\mathcal{M})$ dla dowolnego systemu współczynników $\mathcal{M}$. Komórkowa teoria kohomologii została opisana np. przez Matumoto w [7]. Wprost z definicji kohomologii komórkowych wynika, że dla $i > 0$ mamy $\hat{H}^{n+i}_G(X^{(n)}) = 0$. Z twierdzeń 3.6 oraz 4.3 w [7] wynika następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.1. *$\hat{H}^n_G(\ ;\mathcal{M})$ jest zwykłą ekwiwariantną teorią kohomologii na kategorii G-CW par spełniającą aksjomat addytywności. Co więcej, $\hat{H}^n_G(\ ;\mathcal{M})$ jest wyznaczona jednoznacznie przez te własności.*

Ze stwierdzenia 4.1 otrzymujemy natychmiast, że

$$\hat{H}^*_G(\ ;\mathcal{M}) \cong H^*_G(\ ;\mathcal{M})$$

na kategorii G-CW par.

Przykład 4.2. Powróćmy na chwilę do przykładów systemów współczynników z 3. rozdziału. W przykładzie 3.3 dla grupy abelowej A zdefiniowaliśmy system $\underline{A}$ nazwany przez nas systemem stałym w A. Niech $H^*(Y; A)$ oznacza nieekwiwariantne kohomologie przestrzeni Y o współczynnikach w grupie A. Określmy ekwiwariantną teorię kohomologii h^* przez $h^*(X) = H^*(X/G; A)$. Dla dowolnego G/H i $n > 0$ mamy $h^n(G/H) = H^n(*; A) = 0$ oraz $h^0(G/H) = H^0(*; A) = A$ i łatwo zauważyć, że istnieje naturalny izomorfizm funktorów na

$\mathcal{O}_G$, $h^0(G/H) \cong \underline{A}(G/H)$. Wynika stąd, że h^* jest zwykłą ekwiwariantną teorią kohomologii o systemie współczynników $\underline{A}$. Ze stwierdzenia 4.1 dostajemy na kategorii G-CW kompleksów naturalny izomorfizm

$$H^*_G(X;\underline{A}) \cong H^*(X/G;\underline{A}).$$

Przykład 4.3. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla systemu współczynników R_H zdefiniowanego w przykładzie 3.4. Dla G-przestrzeni X oznaczmy przez $X^K_s \subset X^K$ podprzestrzeń zdefiniowaną jako

$$X^K_s = \bigcup_{K \subsetneq L} X^L.$$

Tym razem określmy $h^*(X) = H^*(X^H/G, X^H_s/G; R)$. Rozpatrzmy dowolną podgrupę $K \subset G$. Jeśli K jest sprzężone z H, mamy $(G/K)^H/G = *$ oraz $(G/K)^H_s/G = \varnothing$. Niech teraz K nie będzie sprzężone z H i niech $gK \in (G/K)^H$. Mamy wtedy $H \subsetneq gKg^{-1}$ oraz $gK \in (G/K)^{gKg^{-1}}$, skąd dostajemy $gK \in (G/K)^H_s$. Nietrudno teraz zauważyć, że mamy naturalny izomorfizm funktorów na $\mathcal{O}_G$ $h^0(G/K) \cong R_H(G/K)$. Oczywiście $h^n(G/K) = 0$ dla $n > 0$, zatem h^* jest zwykłą ekwiwariantną teorią kohomologii o systemie współczynników R_H i jak wyżej dostajemy izomorfizm

$$H^*_G(X;R_H) \cong H^*(X^H/G, X^H_s/G; R).$$

Przytoczymy teraz Lemat 1.1 z [7]. Został on sformułowany dla G-skończonych G-CW kompleksów, ale jego dowód jest prawdziwy bez tego ograniczenia.

Lemat 4.4. *Niech (X,A) będzie dowolną G-CW parą. Projekcja $(X,A) \to (X/A, A/A)$ indukuje dla każdego n izomorfizm*

$$\hat{H}^n_G(X/A, A/A;\mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^n_G(X,A;\mathcal{M}).$$

Stwierdzenie 4.5. *Dla dowolnej G-CW pary (X,A) oraz $n \geqslant 2$ mamy naturalny izomorfizm*

$$\hat{H}^n_G(X/A;\mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^n_G(X,A;\mathcal{M}).$$

Co więcej, jeśli $(X/A)^H$ jest łukowo spójny dla każdego H, powyższy izomorfizm mamy również dla $n = 1$.

Dowód. Dla $n \geqslant 2$ teza stwierdzenia wynika z powyższego lematu, ciągu pary $(X/A, A/A)$ oraz faktu, że $\hat{H}^n_G(A/A;\mathcal{M}) = 0$ dla $n \geqslant 1$. Załóżmy teraz, że $(X/A)^H$ jest łukowo spójny dla każdego H. Łatwo jest wtedy pokazać dla singularnych kohomologii, że $H^0_G(X/A) = \mathcal{M}(G/G) = H^0_G(A/A)$ i włożenie $A/A \hookrightarrow X/A$ indukuje izomorfizm. To samo mamy zatem dla teorii komórkowej. Dostaniemy tezę, rozpatrując fragment ciągu dokładnego pary $(X/A, A/A)$

$$\ldots \to \hat{H}^0_G(X/A) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^0_G(A/A) \to \hat{H}^1_G(X/A, A/A) \to \hat{H}^1_G(X/A) \to 0 \to \ldots$$

□

Wnioskiem ze stwierdzenia 4.5 jest następujące:

Stwierdzenie 4.6. *Niech B będzie pewnym zbiorem. Dla każdego $\beta \in B$ niech X_β będzie łukowo spójną przestrzenią z trywialnym działaniem G i niech H_β będzie pewną podgrupą G. Wybierzmy dla każdej X_β jeden punkt $x_\beta \in X_\beta$. Wtedy dla każdego $n \geqslant 1$ mamy izomorfizm (naturalny ze względu na każde $X_\beta \times G/H_\beta$).*

$$\hat{H}^n_G(\bigvee_{\beta\in B}(X_\beta \wedge (G/H_\beta)^+);\mathcal{M}) \cong \prod \hat{H}^n_G(X_\beta \times G/H_\beta;\mathcal{M}).$$

Stwierdzenie 4.7. *Dla dowolnego G-CW kompleksu X włożenie $i\colon X^{(n)} \hookrightarrow X$ indukuje monomorfizm w n-tych kohomologiach*

$$i^*\colon \hat{H}^n_G(X;\mathcal{M}) \hookrightarrow \hat{H}^n_G(X^{(n)};\mathcal{M}).$$

Dowód. Z definicji kohomologii komórkowych wynika, że $\hat{H}^n_G(X, X^{(n)};\mathcal{M}) = 0$ dla każdego n. Tezę dostajemy wykorzystując ten fakt i ciąg dokładny pary $(X, X^{(n)})$. □

Przytoczymy teraz stwierdzenie 5.5 w [7] będące częścią ekwiwariantnej teorii przeszkód.

Stwierdzenie 4.8. *Niech $n \geqslant 1$ i niech Y będzie taką G-przestrzenią z punktem bazowym, że Y^H jest niepusta, łukowo spójna i n-prosta dla każdej podgrupy $H \subset G$. Załóżmy, że $\omega_k(Y)$ znika dla $k \neq n$. Wtedy przekształcenie głównej przeszkody*

$$\mathcal{O}\colon [X;Y]_G \xrightarrow{\cong} \hat{H}^n_G(X;\omega_n(Y))$$

jest izomorfizmem dla każdego G-CW kompleksu X.

Dla dowolnej $[f] \in [X;Y]_G$, przekształcenie $\mathcal{O}$ jest dane przez $\mathcal{O}([f]) = f^*(\theta)$ dla pewnej $\theta \in \hat{H}^n_G(Y;\omega_n(Y))$.

Uwaga 4.9. Dla każdego $n \geqslant 2$ i każdego $\vartheta \in H^n_G(X;\omega_n(Y_n))$ istnieje takie G-przekształcenie $f\colon X \to Y_n$ i $\theta \in H^n_G(Y;\omega_n(Y))$, że

$$\vartheta = f^*(\theta).$$

Dowód. Teza wynika z tego, co powiedzieliśmy wyżej, oraz faktu, że G-przestrzeń Y_n spełnia założenia stwierdzenia 4.8. □

Rozdział 5

Kompleksy łańcuchowe

Ustalimy teraz konwencje znakowe dotyczące kompleksów łańcuchowych stosowane przez nas dalej. Przypomnimy również definicję produktu tensorowego kompleksów.

Będziemy oznaczać stopień elementu a przez $\deg(a)$ lub krócej przez $|a|$. Przekształcenie kompleksów łańcuchowych $f\colon A_* \to B_*$ nazwiemy *stopnia* n jeśli dla dowolnego elementu $a \in A_*$ prawdziwa jest równość $|f(a)| = |a| + n$. Przekształcenie f stopnia n nazwiemy *łańcuchowym*, gdy

$$f \circ \partial = (-1)^n \partial \circ f.$$

Niech $f, f'\colon A_* \to B_*$ będą łańcuchowe stopnia n. Powiemy, że f i f' są *łańcuchowo homotopijne*, jeśli istnieje takie przekształcenie $H\colon A_* \to B_*$ stopnia $n+1$, że

$$f - f' = \partial \circ H + (-1)^n H \circ \partial.$$

Dla kompleksów kołańcuchowych mamy dualny warunek

$$f - f' = H \circ \delta + (-1)^n \delta \circ H.$$

Przekształcenie H nazwiemy *homotopią* od f do f'. Każde przekształcenie łańcuchowe f indukuje w kohomologiach przekształcenie $f_*\colon H_*(A_*) \to H_*(B_*)$. Dla homotopijnych przekształceń łańcuchowych f i f' mamy $f_* = f'_*$.

Transformację naturalną $f\colon \underline{A}_* \to \underline{B}_*$ $\mathcal{O}_G$-kompleksów łańcuchowych nazwiemy *stopnia n, łańcuchową* lub *homotopią*, jeśli dla każdego $H \subset G$ przekształcenie $f(G/H)\colon \underline{A}_*(G/H) \to \underline{B}_*(G/H)$ spełnia odpowiednie warunki dla tych pojęć dla przekształceń kompleksów łańcuchowych.

Definiujemy produkt tensorowy kompleksów łańcuchowych A_* i B_* jako

$$(A_* \otimes B_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j.$$

Dla przekształceń łańcuchowych $f\colon A_* \to C_*$ i $g\colon B_* \to D_*$ określamy $f \otimes g\colon A_* \otimes B_* \to C_* \otimes D_*$ jako

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{\deg(a)\deg(g)} f(a) \otimes g(b).$$

Łatwo sprawdzić, że dla złożenia przekształceń mamy

$$(f \otimes g) \circ (h \otimes k) = (-1)^{\deg(g)\deg(h)} (f \circ h) \otimes (g \circ k).$$

Definiujemy różniczkę $\partial_\otimes$ w $A_* \otimes B_*$ jako $\partial_\otimes = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$, czyli zgodnie z powyższym

$$\partial_\otimes(a^p \otimes b^q) = (\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)(a^p \otimes b^q) = \partial a^p \otimes b^q + (-1)^p a^p \otimes \partial b^q.$$

Można zdefiniować produkt tensorowy większej liczby kompleksów łańcuchowych. Określa się

$$(\bigotimes_{i=1}^{k} A_*^i)_n = \sum_{j_1+\ldots+j_k=n} \bigotimes_{i=1}^{k} A_{j_i}^i.$$

Dla $f_i\colon A_*^i \to B_*^i$ określamy $f_1 \otimes \cdots \otimes f_k\colon \bigotimes_{i=1}^k A_*^i \to \bigotimes_{i=1}^k B_*^i$ wzorem

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = (-1)^\gamma f_1(a_1) \otimes \cdots \otimes f_k(a_k),$$

gdzie

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k} |a_i| \sum_{j=i+1}^{k} |f_j|.$$

Różniczkę definiujemy jako $\partial_\otimes = \sum_{i=1}^k 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\partial}_{i} \otimes \cdots \otimes 1$, czyli

$$\partial_\otimes(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} |a_j|}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \partial a_i \otimes \cdots \otimes a_k.$$

Łatwo stwierdzić, że tak określony produkt tensorowy jest łączny. W szczególności dla $k = 2$ dostajemy

$$\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes \partial b.$$

Rozdział 6

Ekwiwariantny cup produkt

W przypadku nieekwiwariantnym w kohomologiach o współczynnikach w pierścieniu istnieje produkt dwuliniowy nazywany cup produktem. Zdefiniujemy teraz jego ekwiwariantny odpowiednik.

Dla danego systemu współczynników $\mathcal{M}$ przez $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{M}$ oznaczamy funktor kontrawariantny z $\mathcal{O}_G$ w kategorię R-modułów zdefiniowany jako iloczyn tensorowy $\mathcal{M}(\ ) \otimes_R \mathcal{M}(\ )$ na obiektach i morfizmach.

Uwaga 6.1. Jeśli $\mathcal{M}$ jest pierścieniem przemiennym współczynników to przekształcenia

$$\Psi(G/H)\colon \mathcal{M}(G/H) \otimes_R \mathcal{M}(G/H) \to \mathcal{M}(G/H)$$

przeprowadzające $m_1 \otimes m_2$ w iloczyn (w pierścieniu $\mathcal{M}(G/H)$) $m_1 m_2$ wyznaczają transformację naturalną $\Psi\colon \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Weźmy dowolny sympleks $\sigma\colon \Delta^n \to X$ i niech $0 \leqslant p \leqslant n$. Określmy *$p$-tą przednią ścianę* sympleksu σ jako p-sympleks $\sigma\rfloor_p$ dany wzorem $\sigma\rfloor_p(x_0, \ldots, x_p) = \sigma(x_0, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$. Analogicznie, *$p$-ta tylna ściana* sympleksu σ to p-sympleks ${}_p\lfloor\sigma$ dany wzorem ${}_p\lfloor\sigma(x_0, \ldots, x_p) = \sigma(0, \ldots, 0, x_0, \ldots, x_p)$.

Iloczynem tensorowym $\mathcal{O}_G$-kompleksów C_* i D_* będziemy nazywać $\mathcal{O}_G$-kompleks $C_* \otimes D_*$ będący iloczynem tensorowym $C_*(\ ) \otimes_{\mathbb{Z}} D_*(\ )$ na obiektach i morfizmach.

Niech $a \in C^n_G(X; \mathcal{M})$ i $b \in C^m_G(X; \mathcal{M})$. Określmy $(a \otimes_R b)$ jako złożenie

$$\underline{C}_n(X) \otimes \underline{C}_m(X) \xrightarrow{a \otimes b} \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{M}.$$

Jest oczywiste, że $(a \otimes_R b)$ jest morfizmem w $\mathcal{A}b_G$.

Uwaga 6.2. Od tej pory pisząc $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ będziemy mieli na myśli $\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{M}$. Podobnie, dla a, b jak wyżej, przez $a \otimes b$ będziemy oznaczać $a \otimes_R b$.

Będziemy tą samą literą Ψ oznaczać przekształcenie $\mathrm{Hom}(\underline{C}_*, \mathcal{M}) \otimes_R \mathrm{Hom}(\underline{C}_*, \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}(\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*, \mathcal{M})$ generowane przez Ψ. Dla a, b jak wyżej, określamy $\Psi(a \otimes b) \in \mathrm{Hom}((\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{n+m}, \mathcal{M})$ jako 0 poza $\underline{C}_n \otimes \underline{C}_m$ oraz jako $\Psi \circ (a \otimes b)$ na $\underline{C}_n \otimes \underline{C}_m$. Łatwo zauważyć, że $\Psi(a \otimes b)$ jest naturalną transformacją funktorów $(\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{n+m}$ oraz $\mathcal{M}$.

Zdefiniujemy teraz transformację naturalną $\Delta\colon \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$ nazywaną *aproksymacją przekątnej*. Transformacja Δ jest łańcuchowo homotopijnie równoważna transformacji określonej jako złożenie $\underline{C}_*(X) \xrightarrow{d^*} \underline{C}_*(X \times X) \cong \underline{C}_*(X) \otimes \underline{C}_*(X)$, gdzie $d\colon X \to X \times X$ jest diagonalą $d(x) = (x, x)$ (to można łatwo udowodnić, korzystając na przykład z twierdzenia 7.2). Dla sympleksu $\sigma \in \underline{C}_n(X)(G/H)$ definiujemy $\Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \sigma\rfloor_i \otimes {}_{n-i}\lfloor\sigma$ i rozszerzamy liniowo na cały $\underline{C}_n(X)(G/H)$. Łatwo sprawdzić, że Δ jest transformacją naturalną.

Niech $\mathcal{M}$ będzie pierścieniem przemiennym współczynników. Przy pomocy Δ możemy określić ekwiwariantny cup produkt

$$\cup\colon C_G^m(X;\mathcal{M}) \otimes_R C_G^n(X;\mathcal{M}) \to C_G^{m+n}(X;\mathcal{M})$$

będący homomorfizmem R-modułów. Niech $c^n \in C_G^n(X;\mathcal{M})$ i niech $c^m \in C_G^m(X;\mathcal{M})$. Określamy $(c^n \cup c^m)$ jako złożenie $\Psi(c^n \otimes c^m) \circ \Delta$, czyli

$$\begin{aligned} \underline{C}_{n+m}(X) \xrightarrow{\Delta} (\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{n+m}(X) \xrightarrow{\pi} \underline{C}_n(X) \otimes \underline{C}_m(X) \\ \xrightarrow{c^n \otimes c^m} \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M}, \end{aligned}$$

gdzie π jest rzutowaniem. Oczywiście, $c^n \cup c^m$ będąc złożeniem transformacji naturalnych jest transformacją naturalną.

Cup produkt określony na kołańcuchach indukuje cup produkt na kohomologiach

$$\cup\colon H_G^*(X;\mathcal{M}) \otimes_R H_G^*(X;\mathcal{M}) \to H_G^*(X;\mathcal{M}).$$

Cup produkt na kołańuchach nie jest przemienny, ale dla $c^n \in H_G^n(X;\mathcal{M})$ oraz $c^m \in H_G^m(X;\mathcal{M})$ mamy $c^n \cup c^m = (-1)^{nm}\, c^m \cup c^n$.

Rozdział 7

Transformacje naturalne $\underline{C}_*$ i $\otimes^k \underline{C}_*$

W drugim rozdziale zdefiniowaliśmy funktor $S\colon GTop \times \mathcal{O}_G \to Top$ jako $S(X, G/H) = X^H$. Dla dowolnego n można patrzeć na $\underline{C}_n$ jak na funktor $GTop \times \mathcal{O}_G \to Ab$ będący złożeniem $C_n \circ S$, gdzie C_n jest funktorem n-tej grupy łańcuchów singularnych. Przy takim spojrzeniu jest oczywiste, że każda transformacja naturalna $\Lambda\colon C_n \to (\bigotimes^k C_*)_m$ funktorów $Top \to Ab$ wyznacza transformację naturalną $\Lambda'\colon \underline{C}_n \to (\bigotimes^k \underline{C}_*)_m$ funktorów $GTop \times \mathcal{O}_G \to Ab$. Transformację Λ' wyznaczoną przez Λ będziemy oznaczać przez $\Phi\Lambda$. Transformacje postaci $\Phi\Lambda$ mają dużą zaletę – rozważanie niektórych ich własności można sprowadzić do rozważania własności Λ. Spróbujmy zatem odpowiedzieć na pytanie, kiedy dla danej transformacji $\Gamma\colon \underline{C}_n \to (\bigotimes^k \underline{C}_*)_m$ istnieje taka Λ, że $\Phi\Lambda = \Gamma$.

Oznaczmy przez σ_n^H sympleks w $\underline{C}_n(\Delta^n \times G/H)(G/H)$ spełniający $\sigma_n^H(x) = (x, eH)$. Łańcuch $a \in (\bigotimes^k \underline{C}_*)(\Delta^n \times G/H)(G/K)$ nazwiemy *jednorodnym typu* $(g_1, \dots, g_k)$, jeśli $a = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_{i,1} \otimes \dots \otimes \sigma_{i,k}$ oraz każdy sympleks $\sigma_{p,r}$ przekształca Δ^{m_r} w $\Delta^n \times g_r H$. Dla dowolnej podgrupy $H \subset G$ sympleks σ_n^H jest typu (e). Powiemy, że transformacja $\Lambda\colon \underline{C}_n \to (\bigotimes^k \underline{C}_*)_m$ *zachowuje typy sympleksów*, jeśli $\Lambda(\sigma_n^e)$ jest typu $(e, \dots, e)$. Zwróćmy uwagę na to, że dla dowolnego $\alpha \in \mathrm{Map}_G(G/e, G/H)$ prawdziwa jest równość $(id_n \times \alpha)_*(\sigma_n^e) = \alpha^*(\sigma_n^H)$. Dla $p\colon G/e \to G/H$ będącego rzutowaniem i łańcuchów jednorodnych $a \in \bigotimes^k \underline{C}_*(\Delta^n \times G/e)(G/e)$ oraz $b \in \bigotimes^k \underline{C}_*(\Delta^n \times G/H)(G/H)$ łańcuch $(id_n \times p)_*(a)$ jest jednorodny takiego samego typu co a, natomiast $p^*(b)$ jest jednorodny takiego samego typu co b. Dostajemy stąd, że jeśli transformacja Λ zachowuje typy sympleksów, to dla każdego $H \subset G$ łańcuch $\Lambda(\sigma_n^H)$ jest typu $(e, \dots, e)$.

Stwierdzenie 7.1. *Niech* $\Gamma\colon \underline{C}_n \to (\bigotimes^k \underline{C}_*)_m$ *będzie transformacją funktorów* $GTop \times \mathcal{O}_G \to Ab$*. Funktor* $\Gamma = \Phi\Lambda$ *dla pewnej transformacji naturalnej* $\Lambda\colon C_n \to (\bigotimes^k C_*)_m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* Γ *zachowuje typy sympleksów.*

Dowód. Zacznijmy od dowodu implikacji w prawą stronę. Niech $i_H\colon \Delta^n \times G/G \to \Delta^n \times G/H$ będzie przekształceniem danym wzorem $i_H(x, *) = (x, e)$. Nie jest to oczywiście G-przekształcenie, ale jeśli $\Gamma = \Phi\Lambda$, to musi być $\Gamma((i_e)_*(\sigma_n^G)) = (i_e)_*(\Gamma(\sigma_n^G))$. Oczywiście $(i_e)_*(\Gamma(\sigma_n^G))$ jest typu $(e, \dots, e)$, zatem $\Gamma((i_e)_*(\sigma_n^G)) = \Gamma(\sigma_n^e)$ musi być również typu $(e, \dots, e)$.

Dla dowodu implikacji w lewą stronę zauważmy, że jedynym kandydatem na Λ jest funktor przyporządkowujący sympleksowi $\tau \in C_n(X)$ sympleks $\tau_*(\Gamma(\sigma_n^G))$, gdzie τ traktujemy jako przekształcenie $\tau\colon \Delta^n \times G/G \to X$. Wystarczy zatem sprawdzić, czy dla dowolnej G-przestrzeni X, podgrupy $H \subset G$ oraz sympleksu $\tau \in C_n(X^H)$ prawdziwa jest równość $\tau_*(\Gamma(\sigma_n^G)) = \Gamma(\tau)$. Przypomnijmy, że dla dowolnego sympleksu $\tau\colon \Delta^n \to X^H$ przez f_τ^H oznaczyliśmy odpowiadający τ sympleks ekwiwariantny $f_\tau^H\colon \Delta^n \times G/H \to X$. Zwróćmy uwagę na to, że $\tau = f_{\tau\ *}^H(\sigma_n^H) = (f_{\tau\ *}^H \circ i_{H*})(\sigma_n^G)$, zatem $\tau_* = f_{\tau\ *}^H \circ i_{H*}$. Równość, którą chcemy dowieść, możemy przepisać jako $(f^H_{\tau\,*} \circ i_{H*})(\Gamma(\sigma^G_n)) = \Gamma((f^H_{\tau\,*} \circ i_{H*})(\sigma^G_n))$. Mamy zatem sytuację jak na diagramie

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta^n \times G/G) & \xrightarrow{\Gamma} & (\bigotimes^k C_*)_m(\Delta^n \times G/G) \\ {\scriptstyle i_{H*}}\downarrow & & {\scriptstyle i_{H*}}\downarrow \\ C_n(\Delta^n \times G/H) & \xrightarrow{\Gamma} & (\bigotimes^k C_*)_m(\Delta^n \times G/H) \\ {\scriptstyle f^H_{\tau\,*}}\downarrow & & {\scriptstyle f^H_{\tau\,*}}\downarrow \\ C_n(X^H) & \xrightarrow{\Gamma} & (\bigotimes^k C_*)_m(X^H). \end{array}$$

Dolna część diagramu jest przemienna z definicji transformacji Γ. Wystarczy zatem udowodnić, że $i_{H*}(\Gamma(\sigma^G_n)) = \Gamma(i_{H*}(\sigma^G_n))$. Niech $p_H\colon \Delta^n \times G/H \to \Delta^n \times G/G$ będzie identycznością na Δ^n i rzutowaniem na G/H. Przekształcenie p_H jest ekwiwariantne i spełnia $(p_H)_*(\sigma^H_n) = \sigma^G_n$. Jest również oczywiste, że jeśli łańcuch $a \in (\bigotimes^k C_*(\Delta^n \times G/H)$ jest typu $(e, \dots, e)$, to $(i_{H*} \circ p_{H*})(a) = a$. Mamy $i_{H*}(\Gamma(\sigma^G_n)) = i_{H*}(\Gamma((p_H)_*(\sigma^H_n))) = (i_{H*} \circ p_{H*})(\Gamma(\sigma^H_n)) = \Gamma(\sigma^H_n) = \Gamma(i_{H*}(\sigma^G_n))$, co kończy dowód. □

Powiemy, że transformacja $\Lambda_*\colon \underline{C}_* \to \bigotimes^k \underline{C}_*$ zachowuje typy sympleksów, jeśli Λ_n zachowuje typy sympleksów dla każdego n. Oznaczmy przez $H_*(\bigotimes^k \underline{C}_*)$ funktor przyporządkowujący każdej G-przestrzeni X i orbicie G/H grupę z gradacją $H_*((\bigotimes^k \underline{C}_*)(X)(G/H))$. Sformułujemy teraz twierdzenie pozwalające nam budować homotopie łańcuchowe pewnych transformacji funktorów $\underline{C}_* \to \bigotimes^k \underline{C}_*$.

Twierdzenie 7.2. *Niech $\Gamma, \Lambda\colon \underline{C}_* \to \bigotimes^k \underline{C}_*$ będą dowolnymi transformacjami naturalnymi stopnia $n \geqslant 0$ zachowującymi typy sympleksów. Jeśli $n = 0$, zakładamy dodatkowo, że indukowane transformacje $\Gamma_*, \Lambda_*\colon H_0(\underline{C}_*) \to H_0(\bigotimes^k \underline{C}_*)$ pokrywają się na $\Delta^n \times G/e$ dla każdego n. Przy tych założeniach Γ i Λ są łańcuchowo homotopijne w sposób naturalny, to znaczy istnieje taka transformacja naturalna $D\colon \underline{C}_* \to \bigotimes^k \underline{C}_*$, że $D(X)(G/H)$ jest homotopią łańcuchową od $\Gamma(X)(G/H)$ do $\Lambda(X)(G/H)$ dla każdej G-przestrzeni X i każdej orbity G/H. Co więcej, transformacja D zachowuje typy sympleksów.*

Dowód. Ze stwierdzenia 7.1 wynika, że istnieją takie transformacje naturalne Λ', Γ', że $\Lambda = \Phi\Lambda'$ oraz $\Gamma = \Phi\Gamma'$. Co więcej, w przypadku $n = 0$ łatwo jest pokazać, że $\Gamma'_*, \Lambda'_*\colon H_0(C_*) \to H_0(\bigotimes^k C_*)$ pokrywają się na Δ^n. Możemy zatem wykorzystać metodę modeli acyklicznych do skonstruowania homotopii $D'\colon C_* \to \bigotimes^k C_*$ od Λ' do Γ'. Metoda modeli acyklicznych w ogólnym przypadku jest sformułowana jako twierdzenie 8. paragrafu 4.2 w [8]. Nie powołując się na to twierdzenie, skonstruujemy homotopię D' postępując jak w tej metodzie. Oczywiście $D = \Phi D'$ będzie szukaną homotopią od Λ do Γ. Ze stwierdzenia 7.1 wynika, że D zachowuje typy sympleksów.

Przystąpmy do konstrukcji D'. Przeprowadzimy ją w przypadku $n = 0$ – dla innych n konstrukcja łatwo się przenosi. Oznaczmy przez id^n sympleks $\Delta^n \to \Delta^n$ będąc identycznością przestrzeni Δ^n. Mamy $\Lambda' - \Gamma'(id^0) = \partial a$ dla jakiegoś 1-łańcucha a. Połóżmy $D'(id^0) = a$ i dla dowolnego $\sigma \in C_0(X)$ określmy $D'(\sigma) = \sigma_*(D'(id^0))$. Przekształcenie D' jest z definicji naturalne, co więcej dla dowolnego 0-łańcucha b mamy $(\partial D' + D'\partial)(b) = \partial D'(b) = (\Lambda - \Gamma)(b)$. Załóżmy teraz, że określiliśmy D' na $C_k(\ )$ dla $k \leqslant n$. Rozpatrzmy łańcuch $c = \Lambda(id^{n+1}) - \Gamma(id^{n+1}) - D'(\partial(id^{n+1}))$. Policzmy brzeg c.

$$\begin{aligned} \partial(c) &= (\Lambda - \Gamma)(\partial(id^{n+1})) - \partial D'(\partial(id^{n+1})) \\ &= (\partial D' + D'\partial)(\partial(id^{n+1})) - \partial D'(\partial(id^{n+1})) \\ &= D'(\partial\partial(id^{n+1})) = 0. \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach druga równość wynika z założenia indukcyjnego. Pokazaliśmy, że c jest cyklem i skoro $\bigotimes^k C_*(\Delta^n)$ jest acykliczny w dodatnich wymiarach, isnieje taki łańcuch c', że $\partial(c') = c$. Definiujemy $D'(id^{n+1}) = c'$ i podobnie jak poprzednio rozszerzamy naturalnie na $C_{n+1}(\ )$. Mamy

$$\begin{aligned} \partial D'(id^{n+1}) + D'(\partial(id^{n+1})) &= c + D'(\partial(id^{n+1})) \\ &= (\Lambda - \Gamma)(id^{n+1}), \end{aligned}$$

zatem D' jest szukaną homotopią. $\square$

Rozdział 8

Konstrukcja operacji

Udowodniwszy twierdzenie 7.2 jesteśmy w stanie skonstruować wyższe aproksymacje przekątnej, które posłużą do określenia operacji kohomologicznych w $H_G^*(X;\mathcal{M})$. Zbudujemy kwadraty Steenroda, powtarzając konstrukcję Bredona opisaną w [3] dla przypadku nieekwiwariantnego.

Zaczniemy od sformułowania aksjomatów dotyczących kwadratów.

Niech $i \geqslant 0$ a $\mathcal{M}$ oznacza pewien pierścień $\mathbb{Z}_2$-współczynników. Nazwiemy i-tym kwadratem Steenroda naturalną transformację funktorów

$$\mathrm{Sq}^i\colon H_G^n(X,A;\mathcal{M}) \to H_G^{n+i}(X,A;\mathcal{M}).$$

Wszystkie Sq^i są homomorfizmami grup abelowych spełniającymi następujące aksjomaty:

Aksjomat (1) $\mathrm{Sq}^0 = 1$.
Aksjomat (2) $\deg(a) = i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sq}^i(a) = a^2$.
Aksjomat (3) $i > \deg(a) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sq}^i(a) = 0$.
Aksjomat (4) (Wzór Cartana) $\mathrm{Sq}^k(ab) = \sum_{i=0}^k \mathrm{Sq}^i(a) \cup \mathrm{Sq}^{k-i}(b)$.

Pokażemy również następującą

Własność (5) $\mathrm{Sq}^1 = \beta$, gdzie β jest transformacją Bocksteina.

W tym rozdziale udowodnimy główne twierdzenie pracy

Twierdzenie 8.1. *Na kategorii przestrzeni posiadających typ G-homotopijny G-CW kompleksu istnieją w ekwiwariantnych kohomologiach operacje Sq^i spełniające aksjomaty* (1)-(4) *oraz własność* (5).

Przystąpmy do konstrukcji kwadratów. Definiujemy naturalną transformacją łańcuchową

$$T\colon \underline{C}_* \otimes \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$$

przez $T(\sigma_p \otimes \sigma_q) = (-1)^{pq}\sigma_q \otimes \sigma_p$. Łatwo sprawdzić, że T jest łańcuchowa. Oznaczmy przez Δ_0 transformację $\Delta\colon \underline{C}_* \to \underline{C}_*$ wprowadzoną przy definicji cup produktu. Rozpatrzmy transformację $\Delta_0 \circ T$. Oczywiście, Δ_0 i $\Delta_0 \circ T$ pokrywają się na zerowej gradacji, spełniając założenia twierdzenia 7.2. Mamy zatem naturalne

$$\Delta_1\colon \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$$

będące przekształceniem stopnia 1 dla każdego X i G/H, spełniające

$$(T-1)\Delta_0 = T\Delta_0 - \Delta_0 = \partial\Delta_1 + \Delta_1\partial.$$

Zauważmy, że

$$(T+1)(T-1) = T^2 - 1 = 0,$$

z czego wynika następująca równość

$$\partial((T+1)\Delta_1) + ((T+1)\Delta_1)\partial = (T+1)(\partial\Delta_1 + \Delta_1\partial) = 0.$$

Zatem $(T+1)\Delta_1$ jest naturalną transformacją łańcuchową stopnia 1. Przekształcenie zerowe $0\colon \underline{C}_n \to (\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{n+1}$ jest również taką transformacją. Co więcej, $(T+1)\Delta_1$ i 0 znowu spełniają założenia twierdzenia 7.2, mamy zatem homotopię Δ_2 pomiędzy tymi transformacjami:

$$(T+1)\Delta_1 = \partial\Delta_2 - \Delta_2\partial.$$

Mnożąc obie strony przez $(T-1)$ dostajemy

$$0 = (T-1)(T+1)\Delta = \partial(T-1)\Delta_2 - (T-1)\Delta_2\partial,$$

co oznacza, że $(T-1)\Delta_2$ jest naturalną transformacją łańcuchową stopnia 2. Ponownie zauważamy, że 0 jest również taką transformacją – i znów twierdzenie 7.2 daje nam homotopię Δ_3 pomiędzy $(T-1)\Delta$ a 0. Możemy naszą konstrukcję powtarzać, dostając ciąg naturalnych homotopii łańcuchowych Δ_n stopnia n spełniających

$$(T + (-1)^{n+1})\Delta_n = \partial\Delta_{n+1} + (-1)^n\Delta_{n+1}\partial. \tag{8.1}$$

Przechodząc do kompleksu kołańcuchowego C^*_G określamy dla dowolnych X i $\mathcal{M}$ przekształcenia $h_k\colon C^*_G(X;\mathcal{M}) \otimes C^*_G(X;\mathcal{M}) \to C^*_G(X;\mathcal{M})$ generowane przez Δ_k. Dla dowolnych a^p, b^q definiujemy $h_k(a^p \otimes b^q)$ jako złożenie

$$\begin{aligned}\underline{C}_{p+q-k}(X) &\xrightarrow{\Delta_k} (\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{p+q}(X) \xrightarrow{\pi} \underline{C}_p(X) \otimes \underline{C}_q(X)\\ &\xrightarrow{a^p\otimes b^q} \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M},\end{aligned}$$

które będziemy zapisywać $h_k(a^p \otimes b^q) = (a^p \otimes b^q) \circ \Delta_k$, traktując $a^p \otimes b^q$ po prawej stronie jako kołańcuch z $\mathrm{Hom}((\underline{C}_* \otimes \underline{C}_*)_{p+q}, \mathcal{M})$ będący zerem poza $(\underline{C}_p \otimes \underline{C}_q)$. Łatwo stwierdzić, że $h_k(a^p \otimes b^q)$ jest rzeczywiście naturalną transformacją funktorów $\underline{C}_{p+q-k}$ oraz $\mathcal{M}$ i w takim razie przekształcenie h_k jest stopnia $-k$.

T generuje przekształcenie $T^*\colon C^*_G(X;\mathcal{M}) \otimes C^*_G(X;\mathcal{M}) \to C^*_G(X;\mathcal{M}) \otimes C^*_G(X;\mathcal{M})$ zdefiniowane jako $T^*(a \otimes b) = (a \otimes b) \circ T$. Łatwo zauważyć, że $h_n(T^*(a^p \otimes b^q)) = h_n((-1)^{pq} b^q \otimes a^p)$. Będziemy używali tej samej litery T na oznaczenie T^*. Przy tych ustaleniach dostajemy formułę dualną do (8.1)

$$h_n(T + (-1)^{n+1}) = h_{n+1}\delta + (-1)^n \delta h_{n+1}. \tag{8.2}$$

Stwierdzenie 8.2. *Niech* $\deg(a) = q$. *Jeśli* $n - q$ *jest liczbą nieparzystą lub jeśli* $2\mathcal{M} = 0$, *to*

$$h_{n+1}(\delta a \otimes \delta a) = (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^n \delta h_n(a \otimes a).$$

Dowód. Obliczmy lewą stronę

$$\begin{aligned}h_{n+1}(\delta a \otimes \delta a) &= h_{n+1}\delta(a \otimes \delta a)\\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + h_n(\delta a \otimes a + (-1)^{n+1} a \otimes \delta a)\\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + h_n(\delta a \otimes a + (-1)^{q} a \otimes \delta a)\\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + h_n\delta(a \otimes a)\\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) - (-1)^{n-1}\delta h_n(a \otimes a) + 0\\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^n \delta h_n(a \otimes a).\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 8.3. *Niech* $\deg(a) = q = \deg(b)$. *Jeśli* $n-q$ *jest liczbą nieparzystą lub* $2\mathcal{M} = 0$, *to*

$$h_n((a+b)\otimes(a+b)) = h_n(a\otimes a) + h_n(b\otimes b) + (-1)^{n+1}h_{n+1}\delta(a\otimes b) - \delta h_{n+1}(a\otimes b).$$

Dowód. Teza wynika z następującej równości, która jest prawdziwa przy założeniach stwierdzenia:

$$h_n(a\otimes b + b\otimes a) = h_n((1+(-1)^q T)(a\otimes b)) = (-1)^{n+1}h_{n+1}\delta(a\otimes b) - \delta h_{n+1}(a\otimes b).$$

□

Stwierdzenie 8.4. *Jeśli* $q-n$ *jest nieparzyste lub* $2\mathcal{M} = 0$, *to* $a \mapsto h_n(a\otimes a)$ *indukuje naturalny homomorfizm*

$$\mathrm{Sq}_n\colon H^q_G(X;\mathcal{M}) \to H^{2q-n}_G(X;\mathcal{M}).$$

Dowód. Jeśli a jest kocyklem, to ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $h_n(a\otimes a)$ jest również kocyklem. Z kolei ze stwierdzenia 8.3 mamy $h_n((a+\delta b)\otimes(a+\delta b)) \sim h_n(a\otimes a) + h_n(\delta b\otimes \delta b) \sim h_n(a\otimes a)$ (ostatnia homologiczna równoważność wynika ze stwierdzenia 8.2). Wynika stąd, że Sq_n jest dobrze określone. Addytywność Sq_n dostajemy ze stwierdzenia 8.3. □

Niech teraz $j = q-n$. Zdefiniujmy $\mathrm{Sq}^j = \mathrm{Sq}_n = \mathrm{Sq}_{q-j}$. Mamy wtedy naturalny homomorfizm

$$\mathrm{Sq}^j\colon H^q(X;\mathcal{M}) \to H^{q+j}(X;\mathcal{M})$$

określony jeśli j jest nieparzyste lub $2\mathcal{M} = 0$.

Stwierdzenie 8.5. *Jeśli* $a \in H^q_G(X;\mathcal{M})$, *to* $\mathrm{Sq}^q(a) = a^2$ *gdy* Sq^q *jest określony. Ponadto* $\mathrm{Sq}^{q+i}(a) = 0$ *dla każdego* $i > 0$.

Dowód. Na $H^q(X;\mathcal{M})$ mamy $\mathrm{Sq}^{q+i} = \mathrm{Sq}_{-i}$, zatem $\mathrm{Sq}^{q+i} = 0$ dla $i > 0$. Teraz wystarczy zauważyć, że Sq_0 jest indukowany przez $h_0 = \cup$. □

Zauważmy, że stwierdzenie 8.5 dowodzi aksjomatów (2) i (3).

Stwierdzenie 8.6. *Operacje* Sq^i *są niezależne od wyboru* Δ_i.

Dowód. Przypuśćmy, że mamy inny ciąg Δ'_i spełniający

$$(T+(-1)^{n+1})\Delta'_n = \partial\Delta'_{n+1} + (-1)^n\Delta'_{n+1}\partial$$

oraz taki, że $\Delta'_0(\sigma) = \sigma\otimes\sigma$ dla dowolnego $\sigma \in \underline{C}_0(X)(G/H)$. Wtedy naturalna transformacja łańcuchowa $\Delta_0 - \Delta'_0\colon \underline{C}_*(X) \to \underline{C}_*\otimes\underline{C}_*$ indukuje 0 w homologiach. Możemy zatem zastosować twierdzenie 7.2, dostając łańcuchową homotopię D_1 spełniającą

$$\Delta_0 - \Delta'_0 = \partial D_1 + D_1\partial.$$

Mnożąc obie strony przez $(T-1)$ dostajemy

$$\partial(T-1)D_1 + (T-1)D_1\partial = (T-1)\Delta_0 - (T-1)\Delta'_0 = (\partial\Delta_1 + \Delta_1\partial) - (\partial\Delta'_1 + \Delta'_1\partial),$$

co jest równoważne równaniu

$$(\Delta_1 - \Delta'_1 - (T-1)D_1)\partial + \partial(\Delta_1 - \Delta'_1 - (T-1)D_1) = 0.$$

Wynika stąd, że $\Delta_1 - \Delta'_1 - (T-1)D_1$ jest naturalną transformacją łańcuchową stopnia $+1$. Ponownie wykorzystując twierdzenie 7.2, otrzymujemy transformację D_2 spełniającą

$$\Delta_1 - \Delta'_1 - (T-1)D_1 = \partial D_2 - D_2\partial.$$

Mnożąc teraz obie strony przez $(T+1)$ i powtarzając nasze rozumowanie dostaniemy transformację D_3, dla której mamy

$$\Delta_2 - \Delta'_2 - (T+1)D_2 = \partial D_3 + D_3\partial.$$

Moglibyśmy kontynuować nasz proces tworzenia kolejnych homotopii łańcuchowych D_i. Po zdualizowaniu Δ_i i Δ'_i do h_i i h'_i oraz D_i do E_i otrzymujemy równanie

$$h_i - h'_i - E_i(T + (-1)^i) = E_{i+1}\delta + (-1)^i \delta E_{i+1}.$$

Dla kocyklu a przy warunkach, dla jakich $\mathrm{Sq}_i(a)$ jest określony, z powyższego równania wynika, że

$$h_i(a \otimes a) - h'_i(a \otimes a) = \pm\delta E_{i+1}(a \otimes a).$$

□

Stwierdzenie 8.7. *Dla wszystkich takich a oraz j, że $\mathrm{Sq}^j(a)$ jest określony mamy $2\,\mathrm{Sq}^j(a) = 0$.*

Dowód. Jeśli $2\mathcal{M} = 0$, stwierdzenie jest oczywiste. Jeśli $j = n - q$ jest nieparzyste oraz $\delta(a) = 0$, to

$$\begin{aligned} 2h_n(a \otimes a) &= h_n(a \otimes a + a \otimes a) \\ &= h_n(((-1)^q T + 1)(a \otimes a)) \\ &= (-1)^{n+1} h_n((T + (-1)^{n+1})(a \otimes a)) \\ &= (-1)^{n+1} h_{n+1}\delta(a \otimes a) - \delta h_{n+1}(a \otimes a) \\ &= -\delta h_{n+1}(a \otimes a). \end{aligned}$$

□

Niech teraz $A \subset X$ będzie G-podprzestrzenią X. Jeśli a jest kocyklem na X, który znika na A, z naturalności h_n wynika, że $h_n(a)$ również znika na A. Operacje h_n określone są zatem na $C^*_G(X, A; \mathcal{M})$ i spełniają wszystkie udowodnione już przez nas równości. Mamy więc operacje Sq^j określone na $H^q_G(X, A; \mathcal{M})$ dla j nieparzystych lub takich $\mathcal{M}$, że $2\mathcal{M} = 0$.

Stwierdzenie 8.8. *Niech $A \subset X$. Jeśli j jest nieparzyste lub $2\mathcal{M} = 0$, to poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} H^q_G(A; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+1}_G(X, A; \mathcal{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sq}^j} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sq}^j} \\ H^{q+j}_G(A; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+j+1}_G(X, A; \mathcal{M}). \end{array}$$

Dowód. Załóżmy, że $2\mathcal{M} = 0$ lub $n - q$ jest nieparzyste. Niech $a \in C^q_G(A; \mathcal{M})$ będzie kocyklem. Niech $a = i^*(b)$ (na poziomie kołańcuchów) dla kołańcucha b na X i niech $\delta b = j^*(c)$ dla $c \in C^{q+1}_G(X, A; \mathcal{M})$. Mamy zatem

$$\begin{array}{ccccc} & & b & \xmapsto{i^*} & a \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} \\ c & \xmapsto{j^*} & \delta b & \xmapsto{i^*} & 0 \end{array}$$

i z definicji δ^* wynika, że c reprezentuje $\delta^*([a]) \in H_G^{q+1}$, gdzie przez $[a]$ oznaczamy kohomologiczną klasę a w $H_G^q(A;\mathcal{M})$. Oczywiście $h_{n+1}(c \otimes c)$ reprezentuje $\mathrm{Sq}^{q-n}([c]) = \mathrm{Sq}^{q-n}(\delta^*[a])$. Policzmy

$$\begin{aligned} j^* h_{n+1}(c \otimes c) &= h_{n+1}(j^*c \otimes j^*c) = h_{n+1}(\delta b \otimes \delta b) \\ &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(b \otimes \delta b) + (-1)^n \delta h_n(b \otimes b) \\ &= \delta\{(-1)^{n+1} h_{n+1}(b \otimes \delta b) + (-1)^n h_n(b \otimes b)\} \\ &= \delta(A), \end{aligned}$$

gdzie trzecia równość wynika ze stwierdzenia 8.2. Mamy z kolei

$$\begin{aligned} i^*(A) &= (-1)^{n+1} h_{n+1}(i^*b \otimes \delta(i^*b)) + (-1)^n h_n(i^*b \otimes i^*b) \\ &= (-1)^{n+1} h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^n h_n(a \otimes a) \\ &= (-1)^n h_n(a \otimes a) \sim h_n(a \otimes a), \end{aligned}$$

gdzie równoważność kohomologiczna wynika ze stwierdzenia 8.7.

Powyższe równości pokazują, że $h_{n+1}(c \otimes c)$ reprezentuje $\delta^* Sq^{q-n}([a])$. Mamy zatem $\mathrm{Sq}^{q-n}(\delta^*[a]) = \delta^* Sq^{q-n}([a])$. $\square$

Niech teraz X będzie dowolną przestrzenią z trywialnym działaniem G. Dla każdej domkniętej podgrupy $H \subset G$ i każdego n określimy przekształcenie $\Sigma_{G/H} \colon H_G^n(X \times G/H;\mathcal{M}) \to H_G^{n+1}(\Sigma X \times G/H;\mathcal{M})$, gdzie ΣX oznacza zwykłe zawieszenie przestrzeni topologicznej X. Definiujemy $\Sigma_{G/H}$ jako złożenie

$$\begin{aligned} &H_G^n(X \times G/H;\mathcal{M}) \xrightarrow{\delta^*} H_G^{n+1}(CX \times G/H, X \times G/H;\mathcal{M}) \xleftarrow{\cong} \\ &H_G^{n+1}(\Sigma X \times G/H, CX \times G/H;\mathcal{M}) \xrightarrow{i^*} H_G^{n+1}(\Sigma X \times G/H;\mathcal{M}), \end{aligned}$$

gdzie δ^* pochodzi z ciągu pary $(CX \times G/H, X \times G/H)$, drugie przekształcenie jest izomorfizmem wycinania a i^* jest indukowane przez $i \colon (\Sigma X \times G/H, \varnothing) \to (\Sigma X \times G/H, CX \times G/H)$. Analizując ciągi par $(CX \times G/H, X \times G/H)$ oraz $(\Sigma X \times G/H, CX \times G/H)$ łatwo można zauważyć, że $\Sigma_{G/H}$ jest epimorfizmem dla $n = 0$ oraz izomorfizmem dla $n > 0$.

Ze sposobu określenia $\Sigma_{G/H}$ oraz stwierdzenia 8.8 wynika następujące

Stwierdzenie 8.9. Sq^i *jest przemienny z* $\Sigma_{G/H}$*. To znaczy, dla wszystkich* X *i dla wszystkich takich* i *oraz* $\mathcal{M}$*, że* Sq^i *jest określony, poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} H_G^q(X \times G/H;\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Sigma_{G/H}} & H_G^{q+1}(\Sigma X \times G/H;\mathcal{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sq}^i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sq}^i} \\ H_G^{q+i}(X \times G/H;\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Sigma_{G/H}} & H_G^{q+i+1}(\Sigma X \times G/H;\mathcal{M}). \end{array}$$

Lemat 8.10. *Jeśli* $q - n$ *jest parzyste oraz* $a \in C^q(X;\mathcal{N})$*, to*

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\delta a \otimes \delta a) = (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^{n+1} 2h_n(a \otimes \delta a) \\ + (-1)^n \delta h_n(a \otimes a) + (-1)^n 2h_{n-1}(a \otimes a). \end{aligned}$$

Dowód. Policzmy

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(\delta a \otimes \delta a) &= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + h_n(\delta a \otimes a + (-1)^{n+1} a \otimes \delta a) \\
&= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + h_n(\delta(a \otimes a) + (-1)^{n+1} 2(a \otimes \delta a)) \\
&= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^{n+1} 2h_n(a \otimes \delta a) \\
&\quad + (-1)^n \delta h_n(a \otimes a) + h_{n-1}((-1)^q a \otimes a + (-1)^n a \otimes a) \\
&= (-1)^{n+1}\delta h_{n+1}(a \otimes \delta a) + (-1)^{n+1} 2h_n(a \otimes \delta a) \\
&\quad + (-1)^n \delta h_n(a \otimes a) + (-1)^n 2h_{n-1}(a \otimes a).
\end{aligned}$$

□

Podstawiając $a = b$ w lemacie 8.10 i pozostawiając po lewej stronie tylko $\delta h_n(b \otimes b)$ dostajemy

Wniosek 8.11. *Jeśli $b \in C_G^q(X; \mathcal{N})$, $q - n$ jest parzyste oraz $\delta b = 2c$, to*

$$\begin{aligned}
\delta h_n(b \otimes b) = 2[&\delta h_{n+1}(b \otimes c) - h_{n-1}(b \otimes b) \\
&+ 2\{h_n(b \otimes c) + (-1)^n h_{n+1}(c \otimes c)\}].
\end{aligned}$$

Do końca tego rozdziału $\mathcal{M}$ będzie oznaczać dowolny pierścień $\mathbb{Z}_2$-współczynników. Przypomnijmy, że w trzecim rozdziale dla dowolnej grupy abelowej zdefiniowaliśmy system współczynników odpowiadający $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A$. Rozpatrzmy system $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ odpowiadający $\mathcal{M}$. Operacja Sq^j jest określona na $H_G^q(X; \mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ dla j nieparzystych a na $H_G^q(X; \mathcal{M})$ dla wszystkich j. Niech

$$\rho\colon H_G^*(X; \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}) \to H_G^*(X; \mathcal{M})$$

będzie transformacją naturalną indukowaną przez (mod 2): $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{M}$. Łatwo sprawdzić, że ρ komutuje z h_n.

Stwierdzenie 8.12. $\mathrm{Sq}^{2i+1} = \beta \mathrm{Sq}^{2i}$ *na* $H^*(X; \mathcal{M})$.

Dowód. Niech $a \in C_G^q(X; \mathcal{M})$ będzie kocyklem i $a = \rho(b)$. Skoro $\delta a = 0$, musi być $\delta b = 2c$ dla pewnego kołańcucha $c \in C_G^{q+1}(X; \mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$. Mamy $[c] = \beta_{\mathbb{Z}}[a]$, gdzie $\beta_{\mathbb{Z}}\colon H_G^q(X; \mathcal{M}) \to H_G^{q+1}(X; \mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ jest transformacją Bocksteina indukowaną przez ciąg dokładny

$$0 \to \mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathcal{M} \to 0.$$

Zauważmy, że $\beta = \rho \circ \beta_{\mathbb{Z}}$. Kocykl $\rho h_n(b \otimes b) = h_n(a \otimes a)$ reprezentuje $\mathrm{Sq}_n([a])$. Jeśli $q - n$ jest parzyste, z wniosku 8.11 dostajemy $\delta h_n(b \otimes b) = 2\{\pm h_{n-1}(b \otimes b) + \delta(\text{COŚ}) + 2\ \text{COŚ}\}$, zatem $\pm h_{n-1}(b \otimes b) + 2\ \text{COŚ}$ reprezentuje $\beta_{\mathbb{Z}} \mathrm{Sq}_n([a])$. W takim razie $\rho h_{n-1}(b \otimes b) = h_{n-1}(a \otimes a)$ reprezentuje $\rho \beta_{\mathbb{Z}} \mathrm{Sq}_n([a]) = \beta \mathrm{Sq}_n([a])$. Z drugiej strony $h_{n-1}(a \otimes a)$ reprezentuje również $\mathrm{Sq}_{n-1}([a])$.

Podstawiając $q - n = 2i$, dostajemy $\mathrm{Sq}_n = \mathrm{Sq}^{2i}$ oraz $\mathrm{Sq}_{n-1} = \mathrm{Sq}^{2i+1}$. □

Przypomnijmy, że w rozdziale 3. zdefiniowaliśmy dla $n \geqslant 1$ przestrzeń Y_n oraz dla dowolnego pierścienia $\mathbb{Z}_2$-współczynników $\mathcal{M}$ transformację $\Upsilon_{\mathcal{M}}\colon \omega_n(Y_n) \to \mathcal{M}$. Będziemy potrzebowali następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 8.13. *Niech X będzie G-CW kompleksem. Wtedy $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ indukuje dla każdego n epimorfizm $H^n(X^{(n)}; \omega_n(Y_n)) \twoheadrightarrow H^n(X^{(n)}; \mathcal{M})$.*

Dowód. Teza wynika ze stwierdzenia 3.1, twierdzenia 3.7 oraz ciągu pary $(X, X^{(n)})$. □

Twierdzenie 8.14. *Prawdziwe są następujące równości na* $H^*_G(X; \mathcal{M})$

$$\mathrm{Sq}^j = 0 \quad \textit{dla } j < 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{Sq}^0 = 1. \tag{2}$$

Dowód. (1) i (2) są prawdziwe dla X będącej dowolną orbitą G/H – (1) trywialnie a (2) ponieważ na podstawie stwierdzenia 8.5 mamy $\mathrm{Sq}^0(a) = a^2 = a$ dla $a \in H^0_G(G/H; \mathcal{M})$ (pamiętajmy, że $\mathcal{M}$ jest pierścieniem $\mathbb{Z}_2$-współczynników). Niech X będzie dowolnym G-CW kompleksem. Z naturalności Sq^j wynika, że (1) i (2) spełnione są również na $H^0_G(X^{(0)}; \mathcal{M})$. Ze stwierdzenia 4.7 dostajemy, że $H^0_G(X; \mathcal{M}) \to H^0_G(X^{(0)}; \mathcal{M})$ jest monomorfizmem. Mamy zatem tezę na $H^0_G(X; \mathcal{M})$.

Równości są prawdziwe na $H^0_G(S^0 \times G/H; \mathcal{M})$ i stwierdzenie 8.9 daje nam tezę na $H^n_G(S^n \times G/H; \mathcal{M})$, co z kolei dowodzi obu równości na $H^n_G(S^n \wedge (G/H)^+; \mathcal{M})$. Teraz ze stwierdzenia 4.6 dla $n \geqslant 1$ dostajemy (1) i (2) na $H^n_G(Z; \mathcal{M})$ dla dowolnego bukietu $Z = \bigvee_{\beta \in B}(S^n \wedge (G/H_\beta)^+)$. W szczególności, równości są spełnione dla $H^n(Y_n; \mathcal{M})$.

Niech $n \geqslant 2$. Z uwagi 4.9 i stwierdzenia 8.13 wynika, że dla każdego $\psi \in H^n_G(X^{(n)}; \mathcal{M})$ istnieje G-przekształcenie $f \colon X^{(n)} \to Y_n$ oraz element $\theta \in H^n_G(Y_n; \mathcal{M})$ spełniające $\psi = f^*(\theta)$. Z naturalności Sq^j mamy $\mathrm{Sq}^0(\psi) = \mathrm{Sq}^0(f^*(\theta)) = f^*\mathrm{Sq}^0(\theta) = f^*(\theta) = \psi$. Podobnie dostaniemy $\mathrm{Sq}^j(\psi) = 0$ dla $j < 0$.

Dla $n = 1$ zauważmy, że $X^{(1)}/X^{(0)}$ jest pewnym bukietem $\bigvee_{\beta \in B}(S^1 \wedge (G/H_\beta)^+)$, zatem mamy (1) i (2) spełnione na $H^1(X^{(1)}/X^{(0)})$. Dla dowolnego $H \subset G$ przestrzeń $(X^{(1)}/X^{(0)})^H$ jest bukietem sfer bądź punktem, zatem jest łukowo spójna i ze stwierdzenia 4.5 wynika teza dla $H^1(X^{(1)}, X^{(0)})$. Z ciągu pary $(X^{(1)}, X^{(0)})$ dostajemy epimorfizm $H^1(X^{(1)}, X^{(0)}) \twoheadrightarrow H^1(X^{(1)})$ i mamy tezę na $H^1(X^{(1)})$.

Udowodniliśmy stwierdzenie dla wszystkich X w przypadku $n = 0$ i dla $H^n_G(X^{(n)}; \mathcal{M})$ w przypadku $n \geqslant 1$. Ze stwierdzenia 4.7 mamy, że włożenie $X^{(n)} \subset X$ indukuje monomorfizm $H^n_G(X; \mathcal{M}) \hookrightarrow H^n_G(X^{(n)}; \mathcal{M})$, co kończy dowód dla G-CW kompleksów. Homotopijna niezmienność kohomologii daje nam tezę dla wszystkich G-przestrzeni X mających typ G-homotopijny G-CW kompleksu. □

Twierdzenie 8.14 dowodzi aksjomatu (1). Teraz prostym wnioskiem ze stwierdzenia 8.12 jest własność (5) operacji kohomologicznych. Mamy mianowicie $\mathrm{Sq}^1 = \beta\mathrm{Sq}^0 = \beta$.

Pozostał nam do udowodnienia wzór Cartana (aksjomat (4) operacji). W tym celu wprowadzimy $\mathcal{O}_G$-kompleks łańcuchowy $\underline{C}_*(X; \mathbb{Z}_2)$ zdefiniowany jako

$$\underline{C}_*(X; \mathbb{Z}_2)(G/H) = C_*(X^H; \mathbb{Z}_2).$$

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego pierścienia $\mathbb{Z}_2$-współczynników $\mathcal{M}$ mamy izomorfizm

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_n(X; \mathbb{Z}_2), \mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_n(X), \mathcal{M}).$$

Można też w twierdzeniu 7.2 zamienić $\underline{C}_n(X)$ na $\underline{C}_n(X; \mathbb{Z}_2)$. Do końca tego rozdziału będę oznaczał przez $\underline{C}_*(\ )$ funktor $\underline{C}_*(\ ; \mathbb{Z}_2)$.

Niech $T \colon \underline{C}_* \otimes \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$ będzie określone przez $T(a \otimes b) = b \otimes a$ oraz $T^\otimes \colon \bigotimes^4 \underline{C}_* \to \bigotimes^4 \underline{C}_*$ przez $T^\otimes(a \otimes b \otimes c \otimes d) = (c \otimes d \otimes a \otimes b)$. Zarówno T jak i $T^\otimes$ są łańcuchowe (nie musimy się teraz martwić o znaki, gdyż wszystko dzieje się w $\underline{C}_*(\ ; \mathbb{Z}_2)$). Podobnie jak zrobiliśmy to wcześniej, możemy zbudować ciąg transformacji naturalnych $\Delta_n : \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$ oraz $\Delta'_n : \underline{C}_* \to \bigotimes^4 \underline{C}_*$ takich, że

$$(T+1)\Delta_n = \partial\Delta_{n+1} + \Delta_{n+1}\partial \qquad \Delta_0(a) = a \otimes a \qquad \text{dla } a \in \underline{C}_0, \tag{8.3}$$
$$(T^{\otimes}+1)\Delta'_n = \partial\Delta'_{n+1} + \Delta'_{n+1}\partial \qquad \Delta'_0(a) = a \otimes a \otimes a \otimes a \qquad \text{dla } a \in \underline{C}_0. \tag{8.4}$$

Mamy też analog stwierdzenia 8.6:

Stwierdzenie 8.15. *Niech Δ''_n spełnia warunek* (8.4). *Istnieje wtedy ciąg transformacji $F_n : \underline{C}_i(X) \to (\bigotimes^4 \underline{C}_*)_{i+n}(X)$ spełniający*

$$\Delta'_n - \Delta''_n = (T^{\otimes}+1)F_n + F_{n+1}\partial + \partial F_{n+1}.$$

Określmy teraz

$$D'_n : \underline{C}_* \otimes \underline{C}_* \to \underline{C}_* \otimes \underline{C}_* \otimes \underline{C}_* \otimes \underline{C}_*$$

jako $D'_n = \Sigma_i(\Delta_{2i} \otimes \Delta_{n-2i} + \Delta_{2i-1} \otimes T\Delta_{n-2i+1}) = \Delta^{(2)} \otimes \Delta + \Delta^{(1)} \otimes \Delta$, gdzie przez $\Delta^{(2)}$ i $\Delta^{(1)}$ oznaczamy odpowiednio parzyste i nieparzyste składniki sumy.

Stwierdzenie 8.16. *Prawdziwa jest nastepująca równość*

$$\partial D'_{n+1} + D'_{n+1}\partial = (1 \otimes 1 + T \otimes T)D'_n.$$

Dowód. Policzymy obie strony :

$$\begin{aligned}
\text{LEWA} &= \partial\Delta^{(2)} \otimes \Delta + \Delta^{(2)} \otimes \partial\Delta + \partial\Delta^{(1)} \otimes T\Delta + \Delta^{(1)} \otimes T\partial\Delta \\
&\quad + \Delta^{(2)}\partial \otimes \Delta + \Delta^{(2)} \otimes \Delta\partial + \Delta^{(1)}\partial \otimes T\Delta + \Delta^{(1)} \otimes T\Delta\partial \\
&= (\partial\Delta^{(2)} + \Delta^{(2)}\partial) \otimes \Delta + \Delta^{(2)} \otimes (\partial\Delta + \Delta\partial) \\
&\quad + (\partial\Delta^{(1)} + \Delta^{(1)}\partial) \otimes T\Delta + \Delta^{(1)} \otimes T(\partial\Delta + \Delta\partial) \\
&= (1+T)\Delta^{(1)} \otimes \Delta + \Delta^{(2)} \otimes (1+T)\Delta \\
&\quad + (1+T)\Delta^{(2)} \otimes T\Delta + \Delta^{(1)} \otimes T(1+T)\Delta \\
\text{PRAWA} &= (1 \otimes 1 + T \otimes T)D'_n \\
&= [(1+T) \otimes T + 1 \otimes (1+T)](\Delta^{(2)} \otimes \Delta + \Delta^{(1)} \otimes T\Delta) \\
&= (1+T)\Delta^{(2)} \otimes T\Delta + \Delta^{(2)} \otimes (1+T)\Delta \\
&\quad + (1+T)\Delta^{(1)} \otimes TT\Delta + \Delta^{(1)} \otimes (1+T)T\Delta.
\end{aligned}$$

Teraz wystarczy tylko zauważyć, że $TT = 1$ oraz $T(1+T) = 1+T = (1+T)T$. $\square$

Zdefiniujmy teraz transformację $\lambda\colon \bigotimes^4 \underline{C}_* \to \bigotimes^4 \underline{C}_*$ daną wzorem $\lambda(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a \otimes c \otimes b \otimes d$. Łatwo spostrzec, że λ jest łańcuchowa. Zauważmy, że $\lambda(1 \otimes 1 + T \otimes T) = (1+T^{\otimes})\lambda$. Określmy $D_n = \lambda \circ D'_n \circ \Delta_0$. Mamy

$$\begin{aligned}
\partial D_{n+1} + D_{n+1}\partial &= \partial\lambda D'_{n+1}\Delta_0 + \lambda D'_{n+1}\Delta_0\partial = \lambda(\partial D'_{n+1} + D'_{n+1}\partial)\Delta_0 \\
&= \lambda(1 \otimes 1 + T \otimes T)D'_n\Delta_0 = (1+T^{\otimes})\lambda D'_n\Delta_0 \\
&= (1+T^{\otimes})D_n.
\end{aligned}$$

Dla $a \in \underline{C}_0$ jest też $D_0(a) = \lambda D'_0\Delta_0(a) = \lambda(\Delta_0 \otimes \Delta_0)(a \otimes a) = \lambda(a \otimes a \otimes a \otimes a) = a \otimes a \otimes a \otimes a$. Zatem D_n spełnia warunek (8.4). Łatwo sprawdzić, że transformacja $E_n = (\Delta_0 \otimes \Delta_0)\Delta_n$ również go spełnia. Ze stwierdzenia 8.15 dostajemy, że

$$E_n - D_n = (T^{\otimes}+1)F_n + F_{n+1}\partial + \partial F_{n+1}. \tag{8.5}$$

dla pewnego F_n. Możemy teraz przystąpić do dowodzenia wzoru Cartana. Niech a i b będą kocyklami. Mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}_n(a \cup b) &= h_n((a \cup b) \otimes (a \cup b)) = ((a \cup b) \otimes (a \cup b))\Delta_n \\ &= ((a \otimes b)\Delta_0 \otimes (a \otimes b)\Delta_0)\Delta_n \\ &= (a \otimes b \otimes a \otimes b)(\Delta_0 \otimes \Delta_0)\Delta_n = (a \otimes b \otimes a \otimes b)E_n.\end{aligned}$$

Z (8.5) dostajemy

$$\begin{aligned}(a \otimes b \otimes a \otimes b)E_n &= (a \otimes b \otimes a \otimes b)(D_n + (T^{\otimes} + 1)F_n + F_{n+1}\partial + \partial F_{n+1}) \\ &= (a \otimes b \otimes a \otimes b)(D_n + F_{n+1}\partial),\end{aligned}$$

skąd wynika, że $(a \otimes b \otimes a \otimes b)E_n$ różni się od $(a \otimes b \otimes a \otimes b)D_n$ o pewien kobrzeg. Wynika stąd, że Sq_n można liczyć zarówno przy użyciu E_n jak i D_n. Dostajemy zatem

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}_n(a \cup b) &= (a \otimes b \otimes a \otimes b)E_n = (a \otimes b \otimes a \otimes b)D_n \\ &= (a \otimes b \otimes a \otimes b)\lambda D'_n\Delta_0 \\ &= (a \otimes a \otimes b \otimes b)\Sigma_i(\Delta_{2i} \otimes \Delta_{n-2i} + \Delta_{2i-1} \otimes T\Delta_{n-2i+1})\Delta_0 \\ &= \Sigma_i[(a \otimes a)\Delta_{2i} \otimes (b \otimes b)\Delta_{n-2i} \\ &\quad + (a \otimes a)\Delta_{2i-1} \otimes (b \otimes b)T\Delta_{n-2i+1}]\Delta_0 \\ &= \Sigma_i(h_{2i}(a \otimes a) \otimes h_{n-2i}(b \otimes b) + h_{2i-1}(a \otimes a) \otimes h_{n-2i+1}(b \otimes b))\Delta_0 \\ &= \Sigma_i(\mathrm{Sq}_{2i}(a) \cup \mathrm{Sq}_{n-2i}(b) + \mathrm{Sq}_{2i-1}(a) \cup \mathrm{Sq}_{n-2i+1}(b)) \\ &= \Sigma_i\mathrm{Sq}_i(a) \cup \mathrm{Sq}_{n-i}(b).\end{aligned}$$

Jeśli $a \in H^p_G(X)$ i $b \in H^q_G(X)$ ostatni wynik możemy przepisać jako

$$\mathrm{Sq}^{p+q-n}(a \cup b) = \Sigma_i\mathrm{Sq}^{p-i}(a) \cup \mathrm{Sq}^{q-n+i}(a),$$

co po przeindeksowaniu (wykorzystujemy udowodniony przez nas aksjomat (3) i równość $\mathrm{Sq}^j = 0$ dla $j < 0$) daje żądany wzór Cartana

$$\mathrm{Sq}^n(a \cup b) = \Sigma_i\mathrm{Sq}^i(a) \cup \mathrm{Sq}^{n-i}(a).$$

Spis literatury

[1] G. E. Bredon, *Equivariant Cohomology Theories*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967)

[2] G. E. Bredon, *Equivariant Cohomology Theories*, Lect. Notes in Math. **34**, Springer-Verlag (1967)

[3] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Text in Mathematics **139**, Springer-Verlag (1993)

[4] J. L. Caruso, *Operations in equivariant $\mathbb{Z}_p$-cohomology*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **126** (1999), 521–541

[5] S. Illman, *Equivariant singular homology and cohomology I*, Mem. Amer. Math. Soc. **156** (1975)

[6] L. G. Lewis, J. P. May, J. E. McClure, *Ordinary $RO(G)$-graded cohomology*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981), 208-212

[7] T. Matumoto, *Equivariant cohomology theories on G-CW complexes*, Osaka J. Math. **10** (1973), 51–68

[8] E. H. Spanier, *Topologia Algebraiczna*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe (1972)

[9] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Ann. Math. Stud. **50**, Princeton University Press (1962)

[10] S. Wilson, *Equivariant homology theories on G-complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), 155–171