Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Maciej Borodzik

Numer albumu 163071

Wokół twierdzenia Pascala i Cayley'a-Bacharacha

Praca magisterska

na kierunku **MATEMATYKA**

W ramach Międzywydziałowych Indywidualnych
Studiów Matematyczno-Przyrodniczych

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. Henryka Żołądka
Instytut Matematyki UW

maj 2001

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą

Streszczenie

Znane od przeszło trzystu lat twierdzenie Pascala mówi o własnościach układu sześciu punktów na $\mathbb{C}P^2$ leżących na jednej stożkowej. Naturalnym uogólnieniem tego twierdzenia byłoby znalezienie odpowiednich własności dla układu punktów leżących na zadanej krzywej stopnia d. Niniejsza praca zawiera propozycję takiego uogólnienia dla przypadków $d = 3$, $d = 4$ i $d = 5$.[1]

0. Wprowadzenie

Proste i piękne twierdzenie Pascala mówi, że dla sześciokąta wpisanego w stożkową, przedłużenia naprzeciwległych jego boków przecinają się w trzech współliniowych punktach. Sposoby dowodzenia tego twierdzenia, a więc poprzez dwustosunek (zob. rozdział 1) i przez twierdzenie Cayley'a-Bacharacha (zob. rozdział 2) skłaniają do poszukiwania uogólnień dla krzywych wyższych stopni. Twierdzenia takie opisywałyby zależności geometryczne między punktami leżącymi na pewnej krzywej wyższego stopnia. Oczywiście, liczba takich punktów musi zależeć od stopnia i przekraczać wymiar przestrzeni rozpatrywanych krzywych. Istotą twierdzenia Pascala jest bowiem kontrolowane zaburzenie generyczności szóstki punktów na $\mathbb{C}P^2$ — stożkowa jest wyznaczana przez 5, na szósty punkt nakładamy pewne warunki. Twierdzenie Pascala to przełożenie tych warunków (kowymiaru 1), na współliniowość trójki punktów (również kowymiar 1).

Jeśli chodzi o zawarte w pracy nowe rezultaty, to twierdzenia 3.4, 4.1 i 4.2 są prostymi zastosowaniami twierdzenia Cayley'a-Bacharacha. Najciekawsze twierdzenie 3.1 i jego dualny odpowiednik – twierdzenie 3.1 będące także najwierniejszym przeniesieniem rezultatu Pascala na przypadek wymiernych kubik wymagają trochę bardziej wyrafinowanych metod dowodzenia.

Struktura pracy jest następująca: W pierwszym rozdziale opiszę zjawiska zachodzące dla prostych i stożkowych. Mówią o nich twierdzenia Pappusa i Pascala. Pojawiające się tam zależności stanowią punkt wyjścia dla rozważań dla krzywych wymiernych wyższych stopni. Rozdział drugi zawiera wpierw krótkie przypomnienie metod geometrii algebraicznej, z których będę korzystał później — a więc głownie wzór Riemanna-Hurwitza i formuła na genus. Następnie przedstawiane i dowodzone są ważne fakty, na których opierają się udowadniane twierdzenia. Będzie to więc wzór Koncewicza, wyliczenie residuum dla kilku szczególnych przypadków, a w końcu twierdzenie Cayley'a-Bacharacha. Sedno pracy stanowi rozdział trzeci — zawiera on nowe wyniki dla krzywych stopni 3. Na ostatni, czwarty rozdział składają się częściowe rezultaty w przypadku stopni 4 i 5.

1. Znane rezultaty dla stożkowych

Niech K i L będą dwiema prostymi na płaszczyźnie przecinającymi się w punkcie o. Niech teraz k_1, k_2, k_3 i l_1, l_2, l_3 będą punktami leżącymi odpowiednio na prostej K i L (zob. rys 1.1). Przez te punkty przeprowadzamy proste A_1, A_2 i A_3. Każde dwie z nich się przetną, ale, oczywiście, nie muszą mieć wspólnego przecięcia wszystkie trzy. Istnienie zaś wspólnego przecięcia zależy od położenia punktów k_1, k_2, k_3 i l_1, l_2, l_3.

---

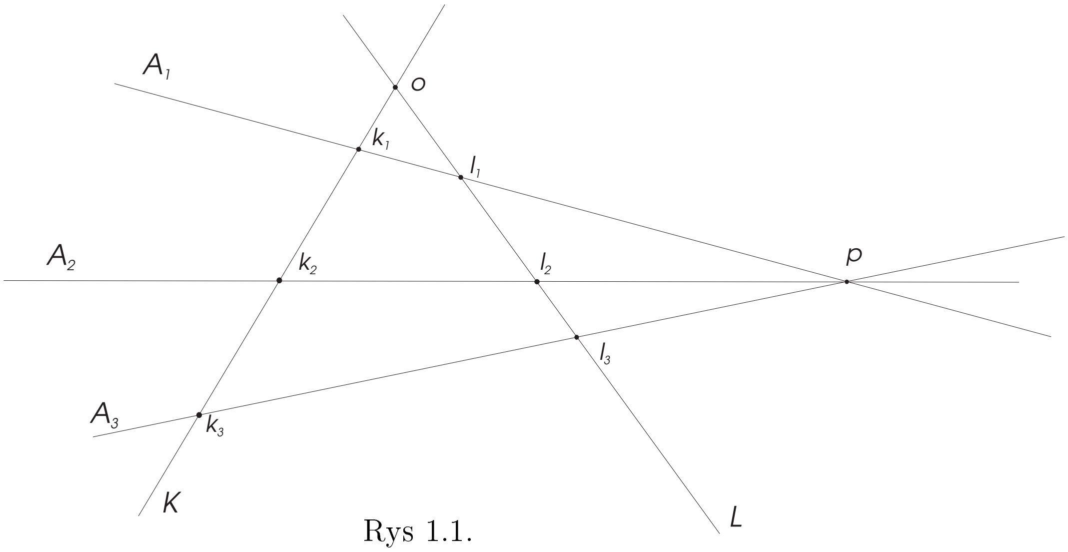
[1] Klasyfikacja AMS: 14N15, 51N15, 32A27, 51M04. Słowa kluczowe: Pascal, Cayley-Bacharach, residuum, krzywa wymierna.

Spróbujmy znaleźć jakieś warunki na wspomniane sześć punktów, które by to zagwarantowały.

Wpierw zauważmy, iż bez straty ogólności punkt o można przenieść do nieskończoności (homografią), to jest założyć równoległość prostych K i L. Jesteśmy więc w sytuacji twierdzenia Talesa. Zastosowanie go prowadzi do warunku koniecznego i dostatecznego:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_2} = \frac{l_1 - l_2}{l_3 - l_2}.$$

Niestety, ten warunek nie jest niezmienniczy ze względu na homografię, za której pomocą punkt o został wysłany do nieskończoności. Możemy jednak temu zaradzić zauważając, iż wielkość $\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}$ nie oznacza nic innego, jak dwustosunek czwórki punktów x_1, x_2, x_3, ∞. Ten zaś jest niezmienniczy ze względu na homografie. Otrzymujemy zatem następujące:



Rys 1.1.

Twierdzenie 1.1. *Proste A_1, A_2 i A_3 przetną się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dwustosunki punktów: k_1, k_2, k_3, o i l_1, l_2, l_3, o liczone odpowiednio na prostych K i L są sobie równe.*

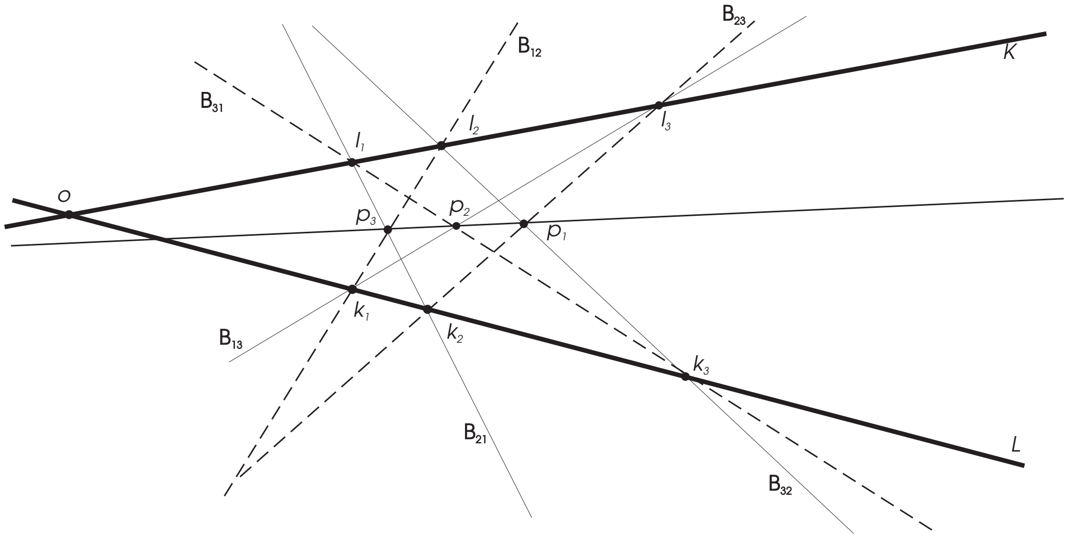
Uwaga 1.2. Na powyższe twierdzenie można spojrzeć także z innej strony. Jeśli oznaczymy przez p punkt przecięcia A_1 z A_2 i rozpatrzymy rzutowanie α prostej K na prostą L z punktu p, okaże się, iż jest ono holomorficzne (jako odwzorowanie sfer Riemanna). Znamy jego wartości w trzech punktach: $\alpha(o) = o, \alpha(k_1) = l_1, \alpha(k_2) = l_2$. Z klasyfikacji automorfizmów sfery Riemanna (homografie) natychmiast otrzymujemy tezę twierdzenia.

Rozważmy teraz, za [EGH] sytuację, w której również dane są proste K i L oraz trzy punkty na każdej, lecz obecnie przeprowadzamy nie proste A_1, A_2 i A_3, ale proste $B_{12}, B_{13}, B_{21}, B_{23}$, B_{31}, B_{32} takie, że prosta B_{ij} przechodzi przez punkty k_i i l_j. Sytuację obrazuje rysunkek 1.2.

Na tymże rysunku widać także punkty p_1, p_2 i p_3, otrzymane w przecięciu prostych odpowiednio: B_{23} i B_{32}, B_{13} i B_{31}, B_{12} i B_{21}. Teraz możemy sformułować następujące

Twierdzenie 1.3. (Pappus, zob. [EGH]). *Punkty p_1, p_2 i p_3 są współliniowe.*

Dowód. Załóżmy, bez straty ogólności, że punkty p_3 i p_2 leżą na prostej w nieskończoności. Oznacza to, że proste B_{12} i B_{21} oraz B_{13} i B_{31} są równoległe. A zatem, na mocy twierdzenia Talesa, istnieje homotetia o środku w punkcie o (jeśli punkt o leży na prostej w nieskończoności, zamiast homotetii rozważamy translacje), przeprowadzające prostą B_{12} na B_{21} a także druga, która przeprowadza B_{13} na B_{31}. Ich złożenie jest homotetią zamieniającą punkty k_2 i l_3 z k_3 i l_2. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy równoległość B_{23} i B_{32}. $\square$



Rys 1.2. Twierdzenie Pappusa

Twierdzenie to wydaje się czystą sztuką dla sztuki. Niemniej jednak można znaleźć jego bardzo użyteczne uogólnienie. Dwie proste, w naszym przypadku K i L, to szczególny przypadek stożkowej. Okazuje się, iż powyższy fakt zachodzi również w sytuacji, gdy punkty k_1,k_2,k_3 i l_1,l_2,l_3 leżą nie koniecznie na dwóch prostych, lecz na dowolnej stożkowej C. Jest to słynne

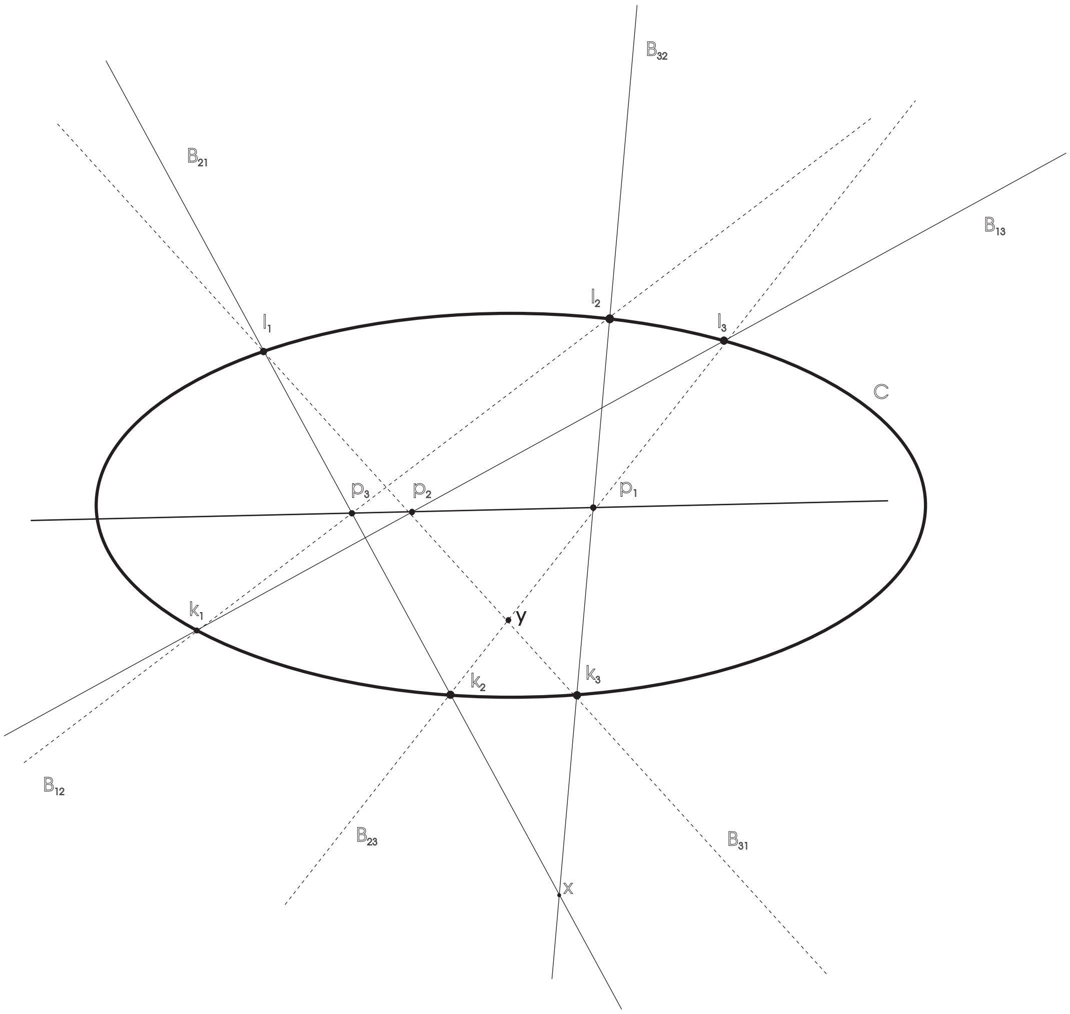
Twierdzenie 1.4. (Pascal). *Punkty p_1, p_2 i p_3 są współliniowe.*

Dowód pierwszy. (zob. [Ber]) Niech $x = B_{21} \cap B_{32}$, $y = B_{23} \cap B_{31}$ (zob. Rys. 1.3). Punkty p_3, x, l_1, k_2 leżą na prostej B_{21}. Niech γ będzie ich dwustosunkiem. Niech teraz η będzie dwustosunkiem punktów p_2, k_3, l_1, y leżących na prostej B_{31}.

Lemat 1.5. $\eta = \gamma$.

Dowód lematu. (zob. też fakt 2.2.5 poniżej). Wystarczy znaleźć odwzorowanie wymierne (homografię) przeprowadzające B_{21} w B_{31}, które czwórkę p_3, x, l_1, k_2 przeprowadzi na czwórkę p_2, k_3, l_1, y. Nie jest to trudne. Wpierw przeprowadzamy B_{21} na pęk prostych l_2^*, to jest proste przechodzące przez l_2. Naturalnie $l_2^* \simeq \mathbb{C}P^1$. Odwzorowujemy l_2^* na naszą stożkową C w ten sposób, że każdej prostej przechodzącej przez l_2 przypisujemy drugi jej punkt przecięcia z C. Punkty p_3, x, l_1, k_2 przechodzą odpowiednio na k_1, k_3, l_1, k_2. Następnie rzutujemy C z punktu k_2 na prostą B_{31} (por. fakt 2.2.5). Otrzymane złożenie $B_{21} \to l_2^* \to C \to B_{21}$ jest homografią (wykorzystaliśmy wymierność C) i spełnia nasze warunki. $\square$

Z twierdzenia 1.1, gdzie za punkt o położyliśmy l_1, za K i L proste B_21 i B_{31} uzyskujemy, że proste p_2p_3, xk_3, i k_2y, gdzie przez ab rozumiemy jedyną prostą przechodzącą przez punkty a i b, przecinają się w jednym punkcie. Ale $xk_3 = B_{32}$, a $k_2y = B_{23}$. Te ostatnie przecinają się w punkcie p_1. A zatem wszystkie punkty p_1, p_2, p_3 są współliniowe. $\square$



Rys 1.3.

Drugi dowód tego twierdzenia podam w rozdziale drugim. Jak ten pierwszy wykorzystuje wymierność krzywej C, tak drugi, ilustrujący zastosowanie twierdzenia Cayley'a-Bacharacha korzysta z faktu, że krzywa stożkowa ma stopień 2. A zatem, jak zobaczymy w następnym rozdziale, przez dowolne pięć punktów na płaszczyźnie można przeprowadzić dokładnie jedną stożkową. Nasze sześć punktów to pięć+jeden. Pięć wyznacza stożkową, szósty zaś jest już w jakimś sensie związany faktem leżenia na tejże samej stożkowej. Ów wiąz objawia się na punktach p_1, p_2 i p_3, zmuszając je do leżenia na jednej prostej.

2. Metody geometrii algebraicznej.

2.1 Podstawowe informacje o krzywych algebraicznych.

Krzywą algebraiczną w $\mathbb{C}P^2$ nazwiemy podrozmaitość algebraiczną $\mathbb{C}P^2$ wymiaru 1.

Ponieważ dim $\mathbb{C}P^2$ =2 na krzywą możemy patrzeć jak na zbiór zer wielomianu jednorodnego w trzech zmiennych. Wielomiany takie tworzą oczywiście przestrzeń liniową wymiaru $\binom{d+2}{d} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Jeśli utożsamimy wielomiany różniące się o czynnik multyplikatywny, czyli wyznaczające te same krzywe na płaszczyźnie, będziemy musieli zmniejszyć wymiar o 1. Uzyskujemy zatem następujący fakt:

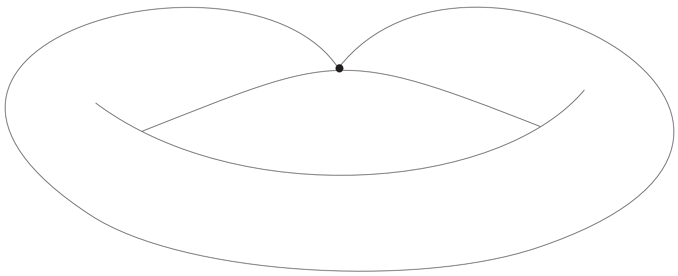
Fakt 2.1.1. *Przestrzeń krzywych stopnia d na płaszczyźnie ma wymiar $\frac{d(d+3)}{2}$.*

2.2 Genus krzywej algebraicznej

Warto w tym miejscu przypomnieć też definicję genusu krzywej algebraicznej. Jest to niezmiennik odwzorowań biwymiernych, który dla gładkich krzywych zgadza się z definicją topologiczną. Genusem gładkiej krzywej algebraicznej nazwiemy po prostu połowę pierwszej liczby Bettiego tej krzywej. Podam teraz dwa twierdzenia, które umożliwiają rozszerzenie definicji genusu na przypadek krzywych osobliwych. Będzie to twierdzenie o normalizacji, stanowiące, że dla każdej krzywej algebraicznej C istnieje gładka krzywa $\tilde{C}$ i odwzorowanie $\tilde{C} \to C$, biwymierne i izomorficzne poza zbiorem punktów osobliwych nazwane normalizacją krzywej. Drugi fakt — formuła Riemanna-Hurwitza mówi, że biwymierna równoważność zachowuje genus, a zatem poniższa definicja jest poprawna:

Definicja. Niech C będzie rzutową krzywą algebraiczną. **Genusem** C nazwiemy genus jej normalizacji. W szczególności **krzywą wymierną** nazwiemy krzywą o genusie zero. W przypadku krzywych nieredukowalnych wymierność jest równoważna biwymiernej równoważności z $\mathbb{C}P^1$.

Krzywe wymierne nieredukowalne są biwymiernie równoważne z $\mathbb{C}P^1$. Możemy więc, na przykład, rozważać na nich dwustosunek. W rozdziale 2.5 rozszerzymy definicję dwustosunku na krzywe redukowalne.



Rys. 2.1 Krzywa osobliwa genusu 0

Przez następne kilka chwil przypomnę pewne fakty dotyczące normalności:

Definicja. Niech X będzie rozmaitością algebraiczną, a $x \in X$ pewnym jej punktem. Rozmaitość X nazwiemy **normalną** w x jeśli dla każdego U otwartego zawierającego x dowolna funkcja meromorficzna na $U \setminus \{x\}$ przedłuża się do funckji meromorficznej przez punkt x.

Uwaga 2.2.1. Jest to jedna z wielu możliwych definicji normalności w punkcie. Inne, wykorzystujące na przykład pojęcie całkowitej domkniętości, można znaleźć w monografii Hartshorna [Hart].

Definicja. Rozmaitość algebraiczną X nazwiemy **normalną**, jeśli jest ona normalna w każdym punkcie.

Normalność rozmaitości jest pojęciem o bardzo głębokich zastosowaniach. Nam jednak będą potrzebne dwa fakty, których dowód można znaleźć choćby u Hartshorna:

Fakt 2.2.2. *Zbiór punktów osobliwych rozmaitości normalnej X^{sing} ma zespolony kowymiar co najmniej 2.*

Wniosek 2.2.3. Każda krzywa normalna jest gładka. $\square$

Definicja. Niech X będzie rozmaitością algebraiczną. **Normalizacją** X nazywamy rozmaitość normalną $\widetilde{X}$ wraz z biwymiernym odwzorowaniem $\widetilde{X} \mapsto X$ będącym izomorfizmem poza przeciwobrazem punktów nienormalnych na X.

Twierdzenie 2.2.4. *Dla każdej rozmaitości algebraicznej X istnieje jej normalizacja.*

Warto teraz podać pewne własności stożkowych. Gładkie stożkowe są wyznaczane przez warunek przechodzenia przez $2 \cdot 3 - 1 = 5$ (por. 2.4.4) punktów na $\mathbb{C}P^2$. Każda stożkowa jest też wymierna. Skonstruuję teraz pewien izomorfizm stożkowej C z $\mathbb{C}P^1$.

Niech $a \in C \subset \mathbb{C}P^2$. Każdej prostej przechodzącej przez a przypisujemy drugi jej punkt przecięcia z C. Otrzymane odzworowanie przeprowadzające a^* w C będę oznaczał przez π_a.

Fakt 2.2.5. *Jeśli C gładka, to π_a jest izomorfizmem. W szczególności, jeśli L jest dowolną prostą nie przechodzącą przez a, to π_a indukuje izomorfizm między C a L, który punktowi $x \in C$ przypisuje punkt $y = L \cap \pi_a^{-1}(x)$.*

Obok tego niezwykle prostego faktu podam jeszcze drugi, równie prosty. Mówi on, jak wyglądają degeneracje układu punktów definiujących krzywą. Będzie on miał bardzo głębokie konsekwencje w rozdziale 3.

Stwierdzenie 2.2.6. *Niech $a, b, c, d \in \mathbb{C}^2$ będą takimi różnymi punktami, że dowolna krzywa stopnia dwa przechodząca przez a, b, c przechodzi przez d. Wtedy te punkty są współliniowe.*

Dowód. Weźmy za krzywą C sumę prostej ab i dowolnej prostej przechodzącej przez c, a nie przechodzącej przez d. Z założenia $d \in ab$. Podobnie uzyskujemy $d \in ac$. Czyli $b \in ad$ i $c \in ad$. $\square$

2.3 Formuła Riemanna-Hurwitza

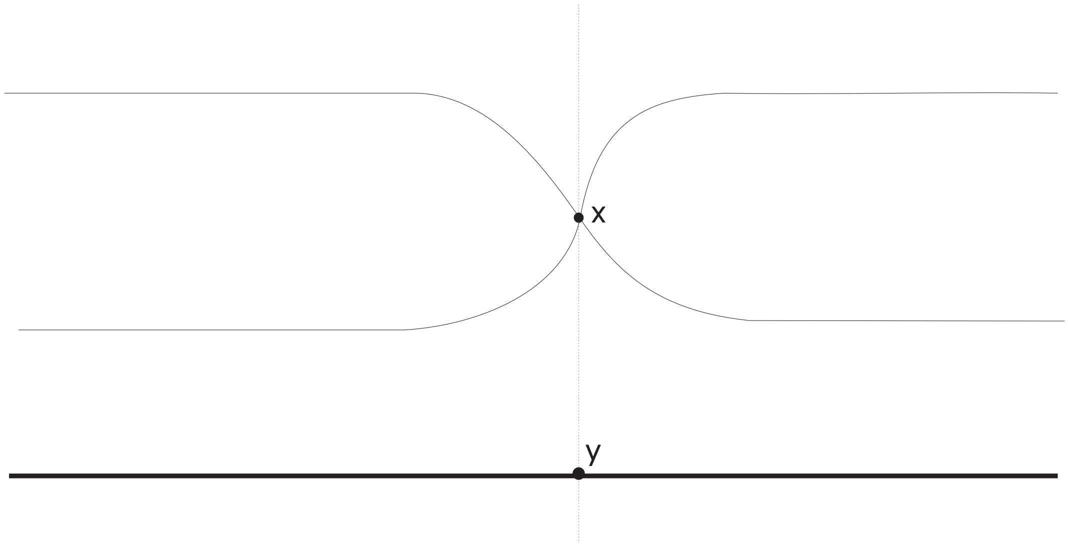
W poniższym podpunkcie będziemy zajmowali się sytuacją, w której dane jest odwzorowanie holomorficzne f między krzywymi zespolonymi X i Y. Będziemy starali się znaleźć zależność między charakterystykami Eulera tych krzywych w terminach stopnia i sumy punktów rozgałęzienia f. W poniższych rozważaniach f będzie odwzorowaniem holomorficznym między dwoma zwartymi i spójnymi krzywymi zespolonymi.

Definicja. Niech $y \in Y$ będzie wartością niekrytyczną f. **Stopniem** f nazywamy liczbę $\deg f = \# f^{-1}(y)$.

Uwaga 2.3.1. Z powyższej definicji trudno dostrzec, że definicja nie zależy od wyboru punktu y. Można jednak zdefiniować stopień w terminach homologicznych.

Uwaga 2.3.2. W przypadku odwzorowań, które nie są holomorficzne, punkty w przeciwobrazie należy liczyć wraz ze znakami zależącymi od tego, czy f_* zachowuje orientację w danym punkcie, czy nie. Oczywiście w przypadku odwzorowań zespolonych wszystkie punkty występują ze znakiem $+1$.

Definicja. Niech $x \in X$ będzie dowolnym punktem dziedziny, a $y = f(y)$ — jego obrazem. Powiemy, że f ma w x rozgałęzienie **stopnia** $\nu(x)$, jeśli f w otoczeniu x można, po stosownej zamianie współrzędnych zapisać jako $f(z) = z^{\nu(x)}$.



Rys. 2.2. Punkt x jest punktem rozgałęzienia krotności 2

Uwaga 2.3.3. Jeśli x jest punktem gładkim odwzorowania, to $\nu(x) = 1$.

Możemy przystąpić teraz do dowodu formuły Riemanna-Hurwitza. Jakkolwiek spotyka się ją przede wszystkim w teorii odwzorowań krzywych holomorficznych, jest ona prawdziwa w ogólniejszej sytuacji, co jasno wynika z jej dowodu.

Twierdzenie 2.3.4 (Formuła Riemanna-Hurwitza). *Jeśli f jest holomorficzne stopnia d, to*

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - \sum_{y \in Y} (\nu(y) - 1).$$

Dowód. (zob. [GrHa]) Skorzystajmy z prostego lematu z topologii algebraicznej:

Lemat 2.3.5. Niech C będzie zwartym CW-kompleksem, a c_n - liczbą komórek n-wymiarowych. Wtedy:

$$\chi(C) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_n.$$

Odwzorowanie f jest holomorficzne, więc zbiór wartości krytycznych jest skończony. Znajdźmy rozkład komórkowy $Y = Y^0 \cup Y^1 \cup Y^2$ taki, że wszystkie punkty rozgałęzienia odwzorowania f są 0-komórkami, a f obcięte do każdej 1- i 2-komórki jest produktowe. Oznaczmy przez c_i, $0 \leq i \leq 2$ liczbę i-komórek w rozkładzie. Przeciągnięcie rozkładu komórkowego przez f zadaje rozkład komórkowy X.

Z lematu 2.3.5:

$$\chi(X) = d \cdot c_2 - d \cdot c_1 + d \cdot c_0 - \sum_{y \in Y^0} (\nu(y) - 1),$$
$$\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{y \in Y} (\nu(y) - 1)$$

Skorzystaliśmy z faktu, że w przeciwobrazie 0-komórki y^0 znajduje się $d-\nu(y^0)+1$ punktów, z których wszystkie są 0-komórkami. □

Uwaga 2.3.6. Powyższy dowód nie zakłada holomorficzności odwzorowania f, a jedynie skończoność zbioru punktów rozgałęzienia. Warunek ten jest konieczny, aby można było przedstawić Y jako skończony CW-kompleks z punktami rozgałęzienia zawartymi w 0-szkielecie.

Wniosek 2.3.7. *Odwzorowania biwymierne między krzywymi gładkimi zachowują charakterystykę Eulera, a więc także i genus.* □

2.4 Formuła na genus.

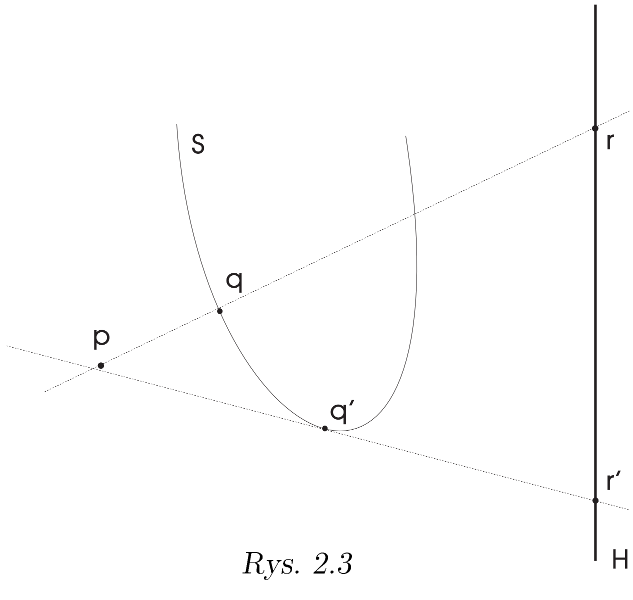
Formuła Riemanna-Hurwitza może być użyta do wyprowadzenia tzw. formuły na genus, wyrażającej genus gładkiej krzywej w $\mathbb{C}P^2$ w zależności od jej stopnia. Przytoczę teraz konstrukcję za [GrHa].

Niech S będzie gładką krzywą w $\mathbb{C}P^2$ wyrażoną jako zero wielomianu jednorodnego $F[Z_0\colon Z_1\colon Z_2]$ stopnia d. Wielomian F zapisany w mapie $Z_0 = 1$ będziemy oznaczać przez $f(z_1, z_2)$.

Weźmy punkt $p \notin S$ i linię H nie zawierającą p. Bez straty ogólności można przyjąć, że $p = [0\colon 0\colon 1], H = \{Z_2 = 0\}$. Możemy też założyć, że prosta w nieskończoności $L = \{Z_0 = 0\}$ nie jest styczna do S.

Rzutujemy S na H z punktu p. Odwzorowanie rzutowania oznaczymy przez π_p. Do niego zastosujemy formułę Riemanna-Hurwitza. Niech $q \in S$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $(\partial f/\partial z_2)(q) \neq 0$. (na rys. 2.3 punkt q)
   Tutaj odwzorowanie π_p jest lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu q.
2. $(\partial f/\partial z_2)(q) = 0$. (na rys. 2.3 punkt q')



Rys. 2.3

W tym przypadku nie znika pochodna f po z_1, ponieważ S jest gładka. Przyjąwszy z_2 jako lokalną współrzędną S wokół q rozwikłujemy z_1 jako funkcję z_2. Spełniony jest warunek:

$$f(z_1(z_2), z_2) \equiv 0,$$

a zatem:
$$\frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dz_2} = 0.$$
Stąd rząd rozgałęzienia S nad H w punkcie q, równy rzędowi, do jakiego znika $\frac{dz_1}{dz_2}$ jest równy rzędowi zera $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ w punkcie q, czyli indeksowi przecięcia S z $\{\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0\}$.

Powyższe rozważania prowadzą do następującego rezultatu:

Jeśli $r \in H$ jest wartością regularną odwzorowania π_p to jej przeciwobraz składa się dokładnie z d punktów (krotność przecięcia S z prostą pr). Suma rzędów rozgałęzienia odpowiadających wszystkim wartościom krytycznym jest równa indeksowi przecięcia S z $\{\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0\}$. Na mocy twierdzenia Bézout liczba ta wynosi $d(d-1)$.

Korzystamy teraz z formuły Riemanna-Hurwitza:
$$\chi(S) = d \cdot \chi(\mathbb{C}P^2) - \sum_{q \in S}(v(q) - 1) = 2d - d(d-1).$$
Stąd:
$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$
A zatem udowodniliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 2.4.1 (formuła na genus). *Niech S będzie gładką krzywą w $\mathbb{C}P^2$ stopnia d. Wtedy S ma genus $g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.* □

Spróbujmy teraz uogólnić tę formułę na przypadek krzywych osobliwych. W naszych rozważaniach ograniczymy się do najprostszych osobliwości. Są nimi punkty podwójne.

Definicja. Powiemy, że krzywa C ma w punkcie x_0 **punkt podwójny**, jeśli pewne otoczenie punktu x_0 jest analitycznie dyfeomorficzne ze zbiorem $\{(x,y) \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\}$.

Uwaga 2.4.2. Jeśli S jest krzywą z osobliwościami typu punkt podwójny, rozumowanie wyprowadzające formułę 2.4.1 można powtórzyć *mutatis mutandis*. Niech dla przykładu $s \in S$ będzie punktem osobliwym typu punkt podwójny. Dołóżmy założenie generyczności — prosta ps nie jest styczna do S. Niech $h : \tilde{S} \to S$ będzie normalizacją krzywej S. Formułę Riemanna-Hurwitza zastosujemy do złożenia $\Pi = h \circ \pi_p$. Wpierw oczywiste jest, że Π ma stopień d, gdyż odwzorowanie h poza $h^{-1}(s)$ jest 1-1. Należy teraz oszacować wkład punktu $r = \pi_p(s)$ do sumy po punktach rozgałęzienia. Suma rzędów rozgałęzienia, która w przypadku gładkim równała się indeksowi przecięcia S z $\{\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0\}$, będzie w przypadku osobliwym o 2 większa. Istotnie, odwzorowanie Π rozgałęzia się nad r z rzędem 4 – w każdym z dwóch punktów w przeciwobrazie ma rozgałęzienie rzędu 2. Stąd $\chi(\tilde{S})$ zwiększa się o 2, a zatem genus spadnie o 1 w stosunku do sytuacji gładkiej. Uzyskujemy zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4.3. Niech S będzie nieprzywiedlną krzywą stopnia d w $\mathbb{C}P^2$ mającą k punktów podwójnych. Wtedy:
$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - k. \square$$

Uwaga. W powyższym stwierdzeniu założyliśmy, że krzywa jest nieredukowalna. Jeśli krzywa jest przywiedlna, jej normalizacja jest rozłączną sumą krzywych niższych stopni. O ile formuła Riemanna-Hurwirtza pozostaje nadal słuszna, o tyle przestaje być prawdą wzór $\chi(S) = 2 - 2g$, gdyż zerowa i druga liczba Bettiego normalizacji są równe ilości składowych spójnych.

Wniosek 2.4.4. *Jeśli krzywa stopnia d ma więcej jak $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ punktów osobliwych, to jest redukowalna, to znaczy jest sumą krzywych niższych stopni.*

Dowód. Przypuśćmy, że D jest taką krzywą. Jeśli byłaby nieredukowalna miałaby genus ujemny, co jest absurdalne. □

Wniosek 2.4.5. *Przestrzeń krzywych wymiernych stopnia d ma wymiar $3d-1$. W szczególności przez dowolne $3d-1$ punktów w położeniu ogólnym na $\mathbb{C}P^2$ przechodzi skończenie wiele takich krzywych.*

Dowód. Niech S będzie krzywą wymierną stopnia d mającą osobliwości co najwyżej typu punkt podwójny. Z twierdzenia 2.4.3 uzyskujemy, że krzywa jest wymierna, jeśli ma k punktów podwójnych, przy czym

$$k = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Przestrzeń krzywych stopnia d ma wymiar $\frac{d(d+3)}{2}$ (zob. fakt 2.1.1). Warunek na posiadanie punktu osobliwego jest kowymiaru 1. Stąd wymiar przestrzenie krzywych wymiernych wynosi

$$\frac{d(d+3)}{2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 3d - 1.\square$$

Uwaga. Możemy rozpatrywać również bardziej skomplikowane osobliwości, które odpowiednio zmniejszają genus. Są one jednak pomijane w generycznych przypadkach. Dla przykładu, kowymiar punktu potrójnego wynosi 3, obniża on zaś genus tylko o 2. Stąd generyczna krzywa wymierna nie ma punktów potrójnych.

2.5 Wzór Koncewicza.

Kończący poprzedni paragraf wniosek narzuca jedno pytanie. Czy, dla dowolnego d, $3d-1$ punktów w położeniu ogólnym wyznacza jednoznacznie krzywą wymierną stopnia d przez nie przechodzącą. Odpowiedź jest twierdząca, gdy $d = 1$ — przez każde 2 różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Gdy $d = 2$ również. Jednoznaczność krzywej stopnia 2 przechodzącej przez 5 punktów wynika choćby z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pascala[2]. Niemniej już w przypadku $d = 3$ tę jednoznaczność tracimy. W dowodzie stwierdzenia 2.5.2 można odnaleźć przyczynę tego zjawiska.

Podobnie ma się rzecz w przypadku wyższych stopni; dokładną liczbę takich krzywych opisuje następujący wzór Koncewicza:

Twierdzenie 2.5.1 (Wzór Koncewicza). *Niech N_d będzie ilością krzywych wymiernych stopnia d przechodzących przez $3d-1$ punktów w $\mathbb{C}P^2$ leżących w położeniu ogólnym. Wtedy zachodzi następujący wzór:*

$$N_1 = 1;$$

$$N_d = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1,d_2\geq 1}} N_{d_1} N_{d_2} \left[d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right], \ d > 1.$$

[2] Gdy k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 są dane, każdej prostej z k_3^* można przypisać jednoznacznie punkt l_3.

Zapewnia on jedyność krzywej stopnia 2 przechodzącej przez 5 punktów. Przez 8 punktów przechodzi już 12 różnych krzywych wymiernych stopnia 3. Dalsze obliczenia pokazałyby, że $N_4 = 620, N_5 = 87304$. Pod koniec tego rozdziału przytoczę, za [DiFIz] dowód wzoru Koncewicza w ogólnej postaci. Na razie, także za [DiFIz], udowodnię następujące:

Stwierdzenie 2.5.2. *Przez $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ punktów na $\mathbb{C}P^2$ znajdujących się w położeniu ogólnym przechodzi dokładnie $3(d-1)^2$ krzywych stopnia d mających jeden punkt osobliwy typu prosty punkt podwójny.*

Uwaga 2.5.3. Formuła Riemanna-Hurwitza mówi, iż w przypadku $d = 3$ krzywe takie są wymierne. A zatem przez osiem punktów na płaszczyźnie przechodzi 12 krzywych wymiernych stopnia 3.

Dowód (stwierdzenia 2.5.2). Ustalamy współrzędne jednorodne $[x_0\colon x_1\colon x_2]$ w $\mathbb{C}P^2$. Krzywe będziemy zapisywali jako wielomiany jednorodne odpowiednich stopni. Rozważmy więc pęk krzywych stopnia d przechodzących przez $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ punktów. Krzywe w pęku zapisują się w następujący sposób:

$$f_\lambda = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$$

gdzie $\{f_0 = 0\}$ i $\{f_1 = 0\}$ są dwiema różnymi krzywymi, a $\lambda = [\lambda_0\colon \lambda_1] \in \mathbb{C}P^1$ – parametrami. Poszukujemy takiej konfiguracji parametrów i takiego punktu $z \in \mathbb{C}P^2$, że zachodzi:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}(z) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(z) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(z) = 0,\ \ 0 \le i \le 2$$

Ten warunek, na mocy relacji Eulera dla wielomianu jednorodnego pociąga za sobą $f_\lambda(z) = 0$. A zatem w tej sytuacji z jest punktem osobliwym krzywej $\{f_\lambda = 0\}$. Przyjrzyjmy się więc temu układowi: aby mógł on być spełniony w jakimś punkcie $z \in \mathbb{C}P^2$, macierz pochodnych w tym punkcie musi mieć rząd 1. Oznacza to, że następujące wyznaczniki muszą się zerować:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} \ \text{i}\ \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Powyższy warunek daje, na mocy twierdzenia Bézout $4(d-1)^2$ punktów. Musimy jednak odjąć te punkty, w których $\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$. W nich bowiem zerują się powyższe wyznaczniki, ale nie zerują się wyznaczniki z pochodnymi po x_0 i x_1 (zakładamy, że f_0 i f_1 są generyczne w pęku). Daje to, po odjęciu wspomnianych $(d-1)^2$ parametrów, $3(d-1)^2$ różnych położeń punktu krytycznego z. Każdy zaś taki punkt daje parametr $[\lambda_0\colon \lambda_1]$, a więc różne krzywe z pęku mające jeden punkt osobliwy. □

Dowód formuły Koncewicza[3].

Ustalmy $3d - 2$ punkty na płaszczyźnie $\mathbb{C}P^2$. Dwa z nich będą oznaczane p_1, p_2, pozostałe — po prostu q^*. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{D}$ generycznych krzywych wymiernych stopnia d przechodzących przez te punkty (pod pojęciem generyczny rozumiem tu mający dokładnie

[3] Poniższy dowód pochodzi od samego Koncewicza i wykorzystuje wysoce nietrywialne wyniki dotyczące zbieżności krzywych w topologii Gromova. Nie będę tu ich przytaczał — znakomitym źródłem jest książka [AuLaF], szczególnie rozdziały 7 i 8.

$\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ punktów osobliwych typu punkt podwójny, czyli tyle, ile potrzeba aby zagwarantować wymierność krzywej). Niech $p_0 \in \mathbb{C}P^2$ będzie dowolnym punktem, a L_3, L_4 dwiema ustalonymi prostymi przechodzącymi przez p_0 a nie zawierającymi żadnego spośród punktów p_1, p_2, q^*. Przez $\widetilde{\mathcal{D}}$ będę oznaczał krzywe $D \in \mathcal{D}$ z wyróżnionymi punktami p_3 i p_4 leżącymi odpowiednio w $D \cap L_3$ i $D \cap L_4$. Rozpatrywane krzywe są wymierne i, w ogólnej sytuacji, nieredukowalne. Możemy mówić zatem o dwustosunku punktów p_1, p_2, p_3, p_4. Zadaje on odwzorowanie $\pi\colon \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}P^1$, gdzie

$$\pi(\widetilde{D}) = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} \cdot \frac{p_2 - p_4}{p_1 - p_4}, \quad p_i \in \widetilde{D}. \tag{$\triangle$}$$

Lemat 2.5.4. *Jeśli $\widetilde{D} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ to $\pi(\widetilde{D}) \neq 0$. Jeśli zaś $\pi(\widetilde{D}) = 1$, to $p_0 \in \widetilde{D}$ oraz $p_3 = p_4 = p_0$.*

Dowód lematu. Pierwsza część jest oczywista. Jeśli $\pi(\widetilde{D}) = 1$, to po wzięciu mapy, w której $p_4 = \infty$, jeśli p_3 będzie skończone mamy $p_1 - p_3 = p_2 - p_3$, stąd sprzeczność. Punkty p_1 i p_2 były różne. □

Wprowadźmy w $\widetilde{\mathcal{D}}$ topologię Gromova (zob. [AuLaF]). Zachodzi wtedy

Fakt 2.5.5. *W domknięciu $\widetilde{\mathcal{D}}$ znajdują się krzywe wymierne będące sumami krzywych wymiernych stopni d_1 i d_2, gdzie $d_1 + d_2 = d$.*

Dowód faktu. Niech $\widetilde{D}_n$ będzie ciągiem krzywych z $\widetilde{\mathcal{D}}$. Wybieramy podciąg w zbieżny w sensie Gromova. Możemy tak uczynić, gdyż krzywe mają ograniczony stopień. Jeśli nie zachodzi degeneracja, granica ciągu nadal leży w $\widetilde{\mathcal{D}}$. A więc interesuje nas przypadek zdegenerowany. Z twierdzenia Gromova o zbieżności degeneracje polegają na pojawieniu się nowego punktu osobliwego typu punkt podwójny. Dodatkowy zaś punkt podwójny na krzywej i tak już wymiernej wymusza załamanie się nieprzywiedlności (zob. wniosek 2.4.4). Składowe krzywej zdegenerowanej są oczywiście wymierne. □

Stwierdzenie 2.5.6. *Odwzorowanie π przedłuża się na domknięcie. Aby policzyć wartość $\pi(D_0)$, dla D_0 należy wstawić ∞ tam, gdzie pojawia się $p_c - p_d$, dla p_c i p_d leżących w różnych składowych.*

Dowód stwierdzenia. Niech D_n będzie ciągiem krzywych wymiernych (od tej pory opuszczamy tyldę). Każdą krzywą D_n można sparametryzować za pomocą S^2, to znaczy znaleźć odwzorowanie holomorficzne $f_n\colon S^2 \to D_n$, gładkie poza zbiorem punktów osobliwych D_n. Przeciwobraz każdego punktu osobliwego składa się z dwóch punktów $\alpha_i^{(n)}$ i $\beta_i^{(n)}$, utożsamianych przy odwzorowaniu f_n. Ponieważ dwustosunek liczy się na $\mathbb{C}P^1$, wygodnie będzie rozpatrywać, zamiast ciągu D_n, ciąg S_n sfer z wyróżnionymi punktami $\alpha_i^{(n)}$ i $\beta_i^{(n)}$.

Poniższy lemat wynika z dowodu twierdzenia Gromova. Udowodnienie go wymagałoby przytoczenia tego dowodu niemal w całości, toteż odsyłam do ósmego rozdziału [AuLaF]. Tutaj zaś przytoczę jedynie krótkie uzadnienie, aby ułatwić lekturę wspomnianej książki pod tym kątem.

Lemat 2.5.7. Jeśli S_n degeneruje się do sumy $S^+ \cup S^-$, a punkty a_+^n i a_-^n w granicy znajdą się odpowiednio w S^+ i S^- to w pewnej parametryzacji S_n za pomocą $\mathbb{C}P^1$ między a_+^n a a_-^n znajduje się pierścień o coraz większym module. □

(**Modułem** pierścienia A_n nazywamy taką liczbę L, oznaczaną też $|A_n|$, że pierścień jest konforemnie równoważny $S^1 \times [0, L]$).

Uwaga. Na mocy lematu Schwarza moduł jest dobrze określony i jest niezmienniczy względem biholomorfizmów.

Uzasadnienie lematu Zmiana topologii w ciągu krzywych zbieżnych w sensie Gromova przypomina zmianę topologii ciągu krzywych wyposażonych w metrykę o stałej krzywiźnie równej -1[4]. Ta ostatnia zaś polega na degeneracji części cienkiej krzywych, to jest takiej, że promień iniektywności jest mniejszy od $\frac{\pi}{8}$[5]. Te części są pierścieniami o coraz większych modułach. Stąd, mając ograniczenie na pola krzywych, wnioskujemy, że można uzyskać znaleźć pierścienie o modułach dążących do ∞ w dowolnie cienkiej części krzywych, to jest takiej, gdzie promień iniektywności jest dowolnie mały.

Uwaga. Z tego lematu natychmiast wynika teza stwierdzenia 2.5.6. Istotnie, punkty p_c i p_d są granicami ciągów p_c^n i p_d^n wyznaczonych jednoznacznie z dokładnością do parametryzacji krzywej S_n. Wkład różnicy $p_c^n - p_d^n$ do dwustosunku dąży zatem do nieskończoności, gdyż między tymi punktami znajdujemy pierścienie o coraz większym module. Co kończy dowód stwierdzenia 2.5.6. $\square$

Interesować nas będzie stopień odwzorowania π. Weźmy wpierw ciąg $x \to 0$ i popatrzmy na liczbę krzywych w przeciwobrazie $\pi^{-1}(x)$.

Dwustosunek czwórki punktów $\frac{p_1-p_3}{p_2-p_3} \cdot \frac{p_2-p_4}{p_1-p_4}$ dąży do zera, przy czym zarówno $p_1 - p_3$ jak i $p_2 - p_4$ są oddzielone od zera, gdyż na $\mathbb{C}P^2$ odległość p_1 od prostej L_3 jest większa od zera, podobnie jak odległość p_2 od L_4. Stąd musi zajść $p_2 - p_3 \to \infty$ oraz $p_1 - p_4 \to \infty$. Dzieje się tak, gdy zachodzi degeneracja, o której mówi lemat 2.5.7. W granicy uzyskujemy rozbicie krzywej D w przeciwobrazie zera na na krzywe D_1 i D_2 stopni odpowiednio d_1 i d_2, przy czym $p_1, p_3 \in D_1$, a $p_2, p_4 \in D_2$. Policzmy ilość możliwych do uzyskania krzywych granicznych:

Dla każdego $d_1 \leq d$ wybieramy $3d_1 - 2$ punktów z q^*, które łącznie z p_1 ustalają ilość możliwych D_1 na N_{d_1}. Podobnież, $3d_2 - 2$ pozostałych punktów wraz z p_2 ustala liczbę krzywych D_2 na N_{d_2}. Punkt p_3 można wybrać na d_1 sposobów (z przecięcia L_3 z D_1), punkt p_4 — na d_2. Otrzymujemy zatem $\binom{3d-4}{3d_1-2} d_1 d_2$ krzywych w przeciwobrazie zera. To jeszcze nie wszystko. Każda taka krzywa może powstać na $d_1 d_2$ różnych sposobów. Odpowiadają one wyborowi punktu przecięcia D_1 z D_2. W ustalonym tak punkcie p krzywa D ma postać $zw = 0$. Możemy teraz zaburzyć krzywą D tak, aby w otoczeniu p zapisywała się jako $zw = \varepsilon$ i przechodziła przez p_1, p_2, q^* (zob. [Sie]), czyli leżała w $\mathcal{D}$. Stąd wszystkie krzywe w przeciwobrazie 0 występują z krotnością $d_1 d_2$. Uzyskaliśmy następujące:

Stwierdzenie 2.5.8.

$$\deg \pi = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ 0 \leq d_1, d_2 \leq d}} N_{d_1} N_{d_2} \binom{3d-4}{3d_1-2} d_1^2 d_2^2.$$

To jeszcze nie wszystko. Możemy policzyć stopień π poprzez patrzenie na $\pi^{-1}(x)$, gdy $x \to 1$. Tutaj mamy dwa przypadki:

(i) Brak degeneracji. Zgodnie z lematem 2.5.4 w przeciwobrazie pojawi się N_d krzywych wymiernych przechodzących przez punkty p_0, p_1, p_2 i q^*. Taki będzie wkład krzywych niezdegenerowanych do stopnia.

[4] zob. rozdział 8 [AuLaF] paragraf 3.2

[5] zob. tamże, paragraf 1

(ii) Zachodzi degeneracja. Ustalmy d_1, d_2 oraz $D = D_1 + D_2$. Musi zajść $p_1, p_2 \in D_1$, $p_3, p_4 \in D_2$. Każda krzywa D wystąpi z krotnością $d_1 d_2$, dokładnie z tych powodów co w poprzednim podpunkcie. Trzeba policzyć ilość tych krzywych. Krzywą D_1 wyznaczają punkty p_1, p_2 i $3d_1 - 3$ punktów z q^*. Pozostałe $3d_2 - 1$ punktów z q^* wyznacza krzywą D_2. Punkty p_3 i p_4 możemy zaś wybrać na d_2 sposobów każdy.

Nasze rozważania podsumujmy kolejnym stwierdzeniem.

Stwierdzenie 2.5.9.

$$\deg \pi = N_d + \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ 0 \le d_1, d_2 \le d}} N_{d_1} N_{d_2} \binom{3d-4}{3d_1-3} d_1 d_2^3.$$

Dokończenie dowodu wzoru Koncewicza. Porównując oba powyższe wyrażenia na stopień uzyskujemy:

$$N_d = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ 0 \le d_1, d_2 \le d}} N_{d_1} N_{d_2} \left(\binom{3d-4}{3d_1-2} d_1^2 d_2^2 - \binom{3d-4}{3d_1-3} d_1 d_2^3 \right),$$

co jest właśnie dowodzonym wzorem. □

2.6 Residuum formy i jego własności.

Residuum formy jest pojęciem lokalnym określonym dla form meromorficznych z biegunami na pewnych hiperpowierzchniach. Przypuśćmy więc, że $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ jest sumą podrozmaitości algebraicznych kowymiaru 1. Niech:

$$\omega = \frac{g(z)}{f_1(z) \cdots f_n(z)} \, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

gdzie przynajmniej lokalnie $X_i = \{f_i = 0\}$. Przypuśćmy, że punkt $0 \in \mathbb{C}^n$ jest izolowanym przecięciem wszystkich X_i. Residuum formy ω w punkcie 0 określamy jako:

$$\int_{\Gamma(\varepsilon)} \omega,$$

gdzie $\Gamma(\varepsilon) = \{x : |f_i(x)| = \varepsilon_i\}$ jest n-wymiarowym cyklem. Orientację dobieramy tak, aby $\int_{\Gamma(\varepsilon)} d \arg f_1 \wedge \ldots \wedge d \arg f_n \ge 0$, a $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ jest takie, że $\Gamma(\varepsilon)$ jest gładkim cyklem wokół zera zawartym w pewnej kuli o promieniu δ.

Elementarne własności residuów, na przykład niezależność od wyboru ε można znaleźć w książce Tsikha [Tsi]. Tutaj zamieszczę trzy — te, z których będę korzystał.

Pierwszą z nich jest nietrudny fakt mówiący ogólnie, że w prostych przypadkach residuum liczy się prosto. A mianowicie

Stwierdzenie 2.6.1.*Jeśli*

$$\mathcal{J} = \det \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j(0)} \right\} \neq 0$$

to $res_0 \omega = \frac{g(0)}{\mathcal{J}}$.

Dowód. Fakt ten otrzymujemy natychmiast po zamianie zmiennych z x_i na f_i i zastosowaniu wzoru całkowego Cauchy'ego (zob. [GrHa]). □

Jeżeli jednak nie mamy transwersalności, sytuacja się komplikuje. Ilustruje to następujący przykład:

Twierdzenie 2.6.2 ([BoŻo]). *Niech* $n = 2$. *Rozważmy funkcje* f_1, f_2 *i* g, *których części najniższego rzędu w otoczeniu 0 są odpowiednio* $P(z,w), Q(z,w)$ *i* $R(z,w)$. *Przypuśćmy też, że:*

$$P = \prod_{i=1}^{p}(z - a_i w),\ Q = \prod_{i=1}^{q}(z - b_i w),\ R = \prod_{i=1}^{r}(z - c_i w),$$

gdzie a_i *oraz* b_j *są różne. Oznacza to, że zera* P *i* Q *w otoczeniu punktu 0 składają się odpowiednio z* p *i* q *parami transwersalnych gałęzi. Załóżmy także, że* $r + 2 = p + q$, *a więc znikanie funkcji* P *i* Q *w zerze jest częściowo kompensowane przez znikanie* R. *Wtedy zachodzi:*

$$res_0 \frac{g\, dz \wedge dw}{f_1 f_2} = \sum_{i=1}^{p} res_{a_i} \frac{\widetilde{R}(u)}{\widetilde{P}(u)\widetilde{Q}(u)} = -\sum_{j=1}^{q} res_{b_j} \frac{\widetilde{R}(u)}{\widetilde{P}(u)\widetilde{Q}(u)},$$

gdzie $\widetilde{P}(u) = \prod(u - a_i)$, $\widetilde{Q}(u) = \prod(u - b_i)$, $\widetilde{R}(u) = \prod(u - c_i)$.

Dowód. Ze względu na transwersalność gałęzi P i Q można odrzucić człony wyższych rzędów. Rozpatrujemy zatem całkę:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\substack{|P|=\varepsilon_1 \\ |Q|=\varepsilon_2}} \frac{R\, dz\, dw}{PQ}.$$

Rozdmuchujemy punkt 0, kładąc $z = uw$. Po zamianie zmiennych pod całką otrzymujemy:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{\widetilde{R}(u)\, du\, dw}{w\widetilde{P}(u)\widetilde{Q}(u)},$$

gdzie całkujemy wzdłuż cyklu:

$$\widetilde{\Gamma}(\varepsilon) = \{|w|^p \cdot |\widetilde{P}(u)| = \varepsilon_1,\ |w|^q \cdot |\widetilde{Q}(u)| = \varepsilon_2\}. \qquad (*)$$

Cykl $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ po zrzutowaniu na płaszczyznę u zadaje cykl:

$$\Delta(\delta) = \{|\widetilde{P}^{\tilde{q}}(u)\widetilde{Q}^{-\tilde{p}}(u)| = \delta\}, \qquad (**)$$

gdzie $\delta = \varepsilon_1^{\tilde{q}}\varepsilon_2^{-\tilde{p}} = const$, a także $\tilde{p} = \frac{p}{\mathrm{NWD}\,(p,q)}$, $\tilde{q} = \frac{q}{\mathrm{NWD}\,(p,q)}$. Liczbę δ możemy dowolnie zmieniać. Jeśli weźmiemy ją dostatecznie małą, okaże się, że $\Delta(\delta)$ jest homologiczny z sumą konturów wokół punktów a_i, $\Delta_i(\delta) = \{|u - a_i| = \mathrm{const}\}$. A zatem cykl $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ rozpada się na sumę cykli postaci:

$$\widetilde{\Gamma}_i(\varepsilon) = \Delta_i(\delta) \times \{|w| = \mathrm{const}\}$$

Ich orientacja zadana jest przez $d\arg P \wedge d\arg Q = d\arg u \wedge d\arg w$, pod warunkiem, że standardowo definiujemy orientację na $\Delta_i(\delta)$ i $\{|w| = \text{const}\}$.

Pozostaje tylko scałkować po współrzędnej w i skorzystać ze wzoru całkowego Cauchy. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_i(\varepsilon)} \omega = \mathrm{res}_{a_i} \frac{\widetilde{R}}{\widetilde{P}\widetilde{Q}} = \frac{\widetilde{R}(a_i)}{\left(\prod\limits_{j\neq i} (a_i - a_j)\right) \cdot \widetilde{Q}(a_i)} \qquad (\dagger).$$

Środkowy wyraz w tym wzorze to nic innego jak klasyczne residuum funkcji meromorficznej w punkcie a_i. Jeśli położymy $\delta \gg 0$ będziemy mogli rozbić $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ na sumę torusów, tym razem jednak wokół b_j. Zmieni się także znak orientacji.

Twierdzenie, z wyjątkiem ostatniej równości w ($\dagger$) pracuje również w przypadku, gdy któreś liczby a_i pokrywają się. Nie można jednak spodziewać się, że będzie pracowało gdy $a_i = b_j$, dla pewnych i i j. □

Pokazaliśmy, jak residuum się liczy. Teraz przyszedł czas na tę jego własność, która czyni je użytecznym w zastosowaniach. Niech więc przez chwilę M będzie zamkniętą rozmaitością zespoloną wymiaru n, zaś ω — n-formą meromorficzną

Twierdzenie 2.6.3. (o residuach).*Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą dywizorami biegunów formy ω, a ich przecięcie $N = X_1 \cap \ldots \cap X_n$, będzie rozmaitością wymiaru 0. Wtedy zachodzi:*

$$\sum_{x\in N} res_x \omega = 0.$$

Dowód tego nietrywialnego twierdzenia korzysta z twierdzenia Stokesa i podany jest na przykład w [GrHa]. □

2.7 Twierdzenie Cayley'a-Bacharacha.

Z twierdzenia o residuach niemal natychmiast wynika podstawowe twierdzenie w tej pracy:

Twierdzenie Cayley'a-Bacharacha.*Niech C i D będą krzywymi na $\mathbb{C}^2$ stopni odpowiednio c i d, przecinającymi się w $c \cdot d$* **różnych** *punktach. Niech krzywa E ma stopień co najwyżej $c + d - 3$ i przechodzi przez wszystkie punkty przecięcia C z D z wyjątkiem co najwyżej jednego. Wtedy przechodzi też przez ten jeden.*

Dowód. Niech $C = \{f_1 = 0\}, D = \{f_2 = 0\}, E = \{g = 0\}$. Rozpatrujemy formę:

$$\omega = \frac{g(x)\,dx_1 \wedge dx_2}{f_1 \cdot f_2}.$$

Warunek na stopień krzywej E gwarantuje, że forma nie ma bieguna na prostej w nieskończoności. Jedyne jej punkty residualne to punkty przecięcia C z D. Niech P_i, $0 < i \leq nm - 1$ będą punktami przecięcia C z D leżącymi z założenia na E, P_0 zaś ostatnim punktem. Jeśli $i > 0$ to $g(P_i) = 0$ i $\mathrm{res}_{P_i}\omega = 0$. Z twierdzenia o residuach $\mathrm{res}_{P_0}\omega = 0$, a zatem $g(P_0) = 0$, czyli E przechodzi przez dodatkowy punkt. W dowodzie milcząco wykorzystałem fakt, że punkty P_i są parami różne, dzięki czemu przecięcie C z D jest transwersalne. □

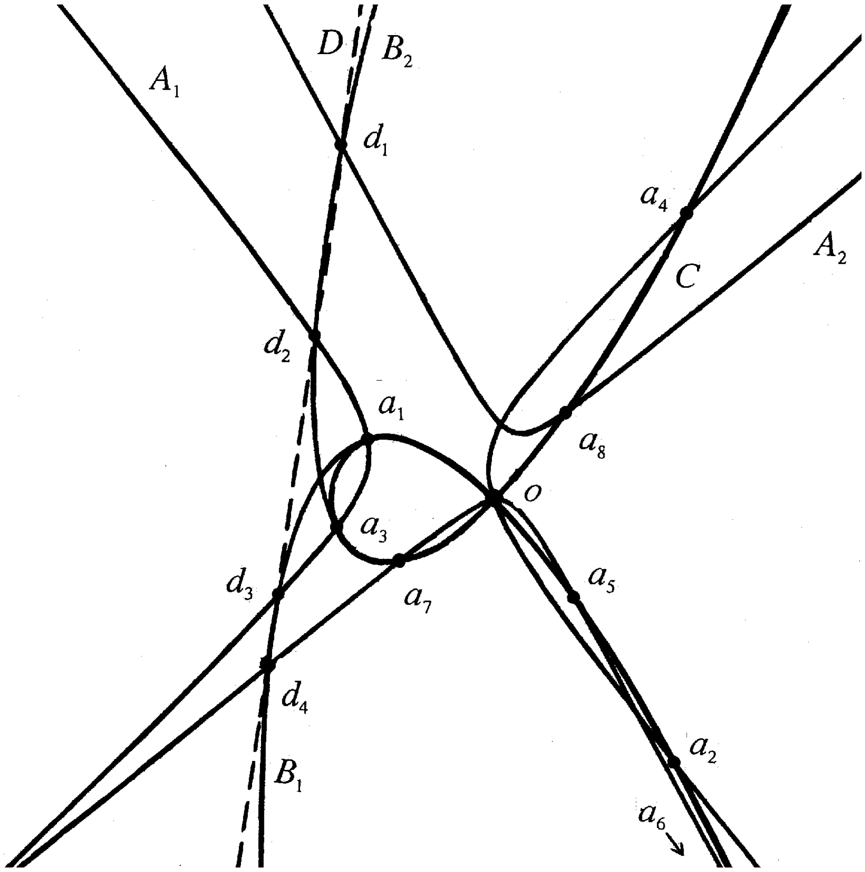
Z twierdzenia Cayley'a-Bacharacha twierdzenie Pascala wynika w sposób niemal natychmiast. Przypomnijmy oznaczenia: C jest stożkową, na której leżą punkty $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$. Prowadzimy proste $B_{ij}, j \neq i$ łączące punkty k_i z l_j. Proste B_{ij} i B_{ji} przecinają się w punkcie p_m, gdzie $i, j \neq m$. Twierdzenie Pascala mówi, że punkty p_1, p_2 i p_3 są współliniowe.

Drugi dowód twierdzenia Pascala. Rozważmy krzywe $E = C + L, F = B_{12} + B_{13} + B_{23}, D = B_{21} + B_{31} + B_{32}$, gdzie L jest prostą przechodzącą przez p_1 i p_2. Twierdzenie będzie udowodnione, gdy pokażemy, że L przechodzi przez p_3. Ale krzywe F i D mają stopień 3. Przecinają się one w punktach k_i, l_j i p_m. Jest ich dziewięć. O ośmiu z nich wiemy, że leżą także na krzywej E — o wszystkich punktach k_i,l_j oraz o p_1 i p_2. Krzywa E ma stopień 3=3+3-3. Z twierdzenia Cayley'a-Bacharacha E przechodzi przez p_3. Punkt ten nie należy do stożkowej. Istotnie, prosta B_{23} miałaby wtedy z nią trzy punkty wspólne, czyli pokrywałaby się. Gwałci to warunek generyczności. Stąd punkt p_3 leży na prostej L. □

Zgromadzone i przedstawione fakty pozwalają dowodzić nowe twierdzenia i uzyskiwać nowe wyniki.

3. Przypadek stopnia d=3

Rozważmy następującą sytuację. Dana jest krzywa C stopnia 3 mająca punkt podwójny w zerze. Z formuły na genus wynika, iż krzywa ta jest wymierna. Wybierzmy jeszcze 8 punktów $a_1, \ldots, a_8$ na C w położeniu ogólnym.



Rys 3.1. Ilustracja twierdzenia 3.1[6].

[6] Powyższy rysunek został wykonany na komputerze. Do narysowania stożkowych przechodzących przez pięć punktów użyto algorytmu opartego na twierdzeniu Pascala.

Zdefiniujmy teraz cztery stożkowe — A_1 przechodzi przez $0, a_1, a_2, a_3, a_4$; A_2 — przez $0, a_5, a_6, a_7, a_8$, podczas gdy B_1 przechodzi przez $0, a_1, a_2, a_5, a_6$, a B_2 przez $0, a_3, a_4, a_7, a_8$.

Popatrzmy na krzywe stopnia 4 $A = A_1 + A_2$ i $B = B_1 + B_2$. Przecinają się one w ośmiu punktach $a_1, \dots, a_8$, a także w 0 z krotnością 4. Pozostałe cztery punkty przecięcia oznaczmy przez $d_1, \dots, d_4$. Wtedy zachodzi:

Twierdzenie 3.1 ([BoŻo]). *Punkty $d_1, \dots, d_4$ są współliniowe.*

Dowód. Rozważana przez nas sytuacja dotyczy tak naprawdę dwóch kwartyk A i B. Możemy rozpatrzyć system liniowy $\mathcal{L}$ krzywych stopnia 4, które przechodzą przez osiem punktów $a_1, \dots, a_8$ i mających punkt podwójny w zerze. Twierdzenie udowodnimy przy założeniach generyczności A i B w $\mathcal{L}$, które za chwilę zostaną sformułowane. Jako, że warunki generyczności są otwarte w sensie Zariskiego, a warunek współliniowości domknięty, uzyskujemy tezę w sytuacji, gdy kwartyki są sumami stożkowych, która to sytuacja generyczna być nie musi.

Lemat 3.2. *Dla generycznych punktów $a_1, \dots, a_8$ istnieją dwie krzywe w $\mathcal{L}$, takie, że:*

(1) Krzywe A i B przecinają się transwersalnie poza 0.

(2) Kierunki styczne do A i B w 0 są parami różne.

Uwaga: Ponieważ, jak już zostało wspomniane, warunki (1) i (2) są otwarte w sensie Zariskiego, z istnienia krzywych A i B, wynika, że generyczne krzywe spełniają (1) i (2).

Dowód lematu zostanie podany po dowodzie twierdzenia.

Przypuśćmy teraz, że $\{f_1 = 0\}$ i $\{f_2 = 0\}$ definiują kwartyki A i B spełniające tezę lematu 3.2. Niech krzywa C będzie zadana równaniem $g = 0$. Rozpatrujemy formę:

$$\omega_h = \frac{g(x,y)h(x,y)}{f_1 f_2}\, dx \wedge dy,$$

gdzie h jest pewnym wielomianem stopnia co najwyżej 2. Rozpatrzmy także formę:

$$\omega_0 = \frac{g(x,y)}{f_1 f_2}\, dx \wedge dy.$$

Formy ω_h i ω_0 mają bieguny na kwartykach A i B, możemy zatem rozpatrywać residua w punktach ich przecięć. Zachodzi przy tym:

$$\mathrm{res}_{a_i}\omega_0 = 0,\ \mathrm{res}_{a_i}\omega_h = 0,$$

na mocy stwierdzenia 2.6.1 i założenia o generyczności kwartyk. Ponadto, jeśli zachodzi $h(d_i) = 0$ to $\mathrm{res}_{d_i}\omega_h = 0$, a także, gdy $h(0) = 0$ to $\mathrm{res}_0\omega_h = 0$. Ten ostatni fakt wynika ze stwierdzenia 2.6.2.

Lemat 3.3. $\mathrm{res}_0\omega_0 = 0$.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie i połóżmy za h wielomian stopnia 2 znikający na $d_1, \dots, d_4$. Forma ω_h ma zerowe residua w a_i i d_j. Jej residuum w 0 wynosi $h(0) \cdot \mathrm{res}_0\omega_0$. Z twierdzenia o residuach ta liczba musi być 0. Stąd $h(0) = 0$. A zatem dowolna stożkowa przechodząca przez $d_1, \cdots, d_4$ musi przechodzić przez 0. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy pewne 3 z tych czterech punktów leżą na pewnej prostej L przechodzącej przez 0. Niech to będą d_1, d_2, d_3. Połóżmy $\tilde{h}$ jako wielomian liniowy definiujący tę linię. Powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy $\tilde{h}(d_4) = 0$, a zatem wszystkie pięć punktów są współliniowe. Ale te pięć punktów to przecięcie prostej z kwartyką A bądź B. Stąd $L \subset A$ i $L \subset B$, a więc kierunki styczne w zerze do A i B są takie same. Przeczy to warunkowi generyczności. Zatem $\mathrm{res}_0 \omega_0 = 0$. □

Dokończenie dowodu twierdzenia 3.1. Niech teraz h będzie dowolnym wielomianem stopnia 2 znikającym w trzech spośród czterech punktów $d_1, \ldots, d_4$. Na mocy lematu 3.3 i twierdzenia o residuach h musi znikać w czwarym punkcie. Ze stwierdzenia 2.2.6 otrzymujemy tezę. □

Dowód lematu 3.2. Połóżmy za A sumę dwóch stożkowych przechodzących przez 0 i przecinających transwersalnie $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Przypuśćmy też, że kierunki styczne do A w zerze nie pokrywają się z kierunkami stycznymi do C. Takie stożkowe wyznaczają punkty $a_1, \cdots, a_8$, ponadto dla generycznej ósemki punktów odpowiadające im stożkowe spełniają te własności. Teraz za B weźmiemy sumę krzywej C i pewnej prostej nieprzechodzącej przez żaden z punktów a_i, ani przez 0. Kwadryki A i B spełniają założenia lematu z samej konstrukcji. □

Istnieje także możliwość udowodnienia twierdzenia dualnego. Dualność w geometrii rzutowej oznacza przejście z $\mathbb{C}P^n$ do $(\mathbb{C}P^n)^*$ za pomocą iloczynu skalarnego w $\mathbb{C}^{n+1}$ (zob. [Ber]. Punktowi z $\mathbb{C}P^n$, a więc linii w $\mathbb{C}^{n+1}$, przyporządkowujemy hiperpłaszczyznę do niej prostopadłą, a więc punkt w $(\mathbb{C}P^n)^*$. W rozważanym przypadku $n = 2$. Krzywej odpowiada krzywa złożona z prostych stycznych. Proste zamieniają się miejscami z punktami: warunek, że trzy punkty leżą na jednej prostej jest dualny do warunku, iż trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Przykładowo, dualne do twierdzenia Pascala twierdzenie Brianchon (zob. [Ber]) mówi, że dla sześciokąta opisanego na stożkowej, główne przekątne przecinają się w jednym punkcie. Podobnie można znaleźć twierdzenie dualne do twierdzenia 3.1. Będzie ono dotyczyło krzywych kwasijednorodnych stopnia 3 z jednym punktem osobliwym i jednym punktem przegięcia oznaczanym przez ∞. Modelową taką krzywą jest $y^2 = x^3$, pozostałe są z nią izomorficzne. Podane wyżej warunki mają, co pokażę poniżej, zagwarantować, że krzywa dualna jest wymierną kubiką stopnia 3.

Twierdzenie 3.1' ([BoŻo]). *Niech zatem C będzie kwasijednorodną kubiką z punktem przegięcia ∞. Niech $a_1, \ldots, a_8$ będą punktami na C leżącymi poza punktem przegięcia. Rozważmy proste L_i styczne do C w a_i. Przez L_∞ będę oznaczał prostą styczną do C w nieskończoności. Możemy zdefiniować stożkowe:*

A_1 będzie styczna do L_∞, L_1, L_2, L_3 i L_4, A_2 — do L_∞, L_5, L_6, L_7 i L_8. B_1 wyznaczać będzie styczność do L_∞, L_1, L_2, L_5 i L_6, natomiast B_2 — do L_∞, L_3, L_4, L_7 i L_8. Niech, podobnie jak w twierdzeniu 3.1 $A = A_1 + A_2$, a $B = B_1 + B_2$. Istnieją cztery dodatkowe proste $M_1, \ldots, M_4$ styczne jednocześnie do A i B. Wtedy proste te przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Wystarczy pokazać, że to twierdzenie jest dualizacją twierdzenia 3.1. Jedyny nietrywialny fakt mówi, że dualizacja krzywej C jest krzywą wymierną stopnia 3 z jednym puntem osobliwym typu punkt podwójny. Ponieważ warunki na krzywą C klasyfikują ją z dokładnością do izomorfizmu, możemy przyjąć, że $C = \{y^2 = x^3\}$. Pozostaje tylko znaleźć krzywą dualną.

Niech $f\colon t \to (t^2, t^3)$ będzie parametryzacją C. Styczna do C w punkcie $f(t_0)$ ma kierunek $(2t_0, 3t_0^2)$. A zatem równanie stycznej wygląda następująco:

$$3t_0^2 x - 2t_0 y + k = 0,$$

gdzie k wyznaczamy z warunku przechodzenia prostej przez $f(t_0)$, co daje $k = -t_0^4$.

Powyższe równanie można przepisać w inny sposób:

$$y = px + q,$$

gdzie $p = \frac{3}{2}t_0, q = \frac{1}{2}t_0^3$. Liczby (p, q) są współrzędnymi w przestrzeni dualnej, przy czym zachodzi $4p^3 = 27q$. Odwrotnie, dla zadanych (p, q) spełniających ten warunek, możemy znaleźć odpowiednie t_0, a co za tym idzie proste styczne do C są w bijektywnej odpowiedniości z elementami zbioru $Z = \{[p{:}\,q{:}\,r] \in \mathbb{C}P^2 \mid 4p^3 = 27qr^2\}$. Z jest oczywiście krzywą stopnia 3 w $\mathbb{C}P^2$. Przyjąwszy $q = 0$ jako prostą w nieskończoności uzyskujemy, że część afiniczna Z zadana jest równaniem $4p^3 = 27r^2$ definiującym krzywą wymierną stopnia 3 z punktem podwójnym w zerze. □

Twierdzenie 3.1 jest próbą uogólnienia twierdzenia Pascala w jednym kierunku: zamiast prostych przechodzących przez punkty bierzemy stożkowe. Inną możliwością jest pozostawienie prostych za cenę częściowej rezygnacji z generyczności. Zamiast prostych przeprowadzanych przez 2 punkty jak w rozdziale 1, możemy brać proste przechodzące przez trzy punkty na kubice. Prowadzi to do innych uogólnień, spośród których kilka zamieszczę. Ich dowody sprowadzają się do zastosowania w odpowiedni sposób twierdzenia Cayley'a-Bacharacha.

Twierdzenie 3.4 ([BoŻo]).*Niech S będzie krzywą stopnia 3. Proste X, Y, Z generycznymi prostymi przecinającymi krzywą S w punktach x_i, y_i, z_i. Oznaczamy przez A stożkową przechodzącą przez x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, przez B_1 i B_2 zaś — proste przechodzące odpowiednio przez x_3, z_2 i y_3, z_3. Krzywa A wyznacza punkt d_3 na prostej Z, proste B_1, B_2 wyznaczają odpowiednio punkty d_1 i d_2 na prostych Y i X. Wtedy punkty d_1, d_2 i d_3 są współliniowe.*

Dowód: Korzystamy z twierdzenia Cayley'a-Bacharacha. Krzywa $D = X + Y + Z$ ma stopień 3, podczas gdy krzywa $C = A + B_1 + B_2$ — cztery. Przecinają się one we wszystkich punktach x_i, y_i, z_i, d_i. Krzywa $E = S + L$, gdzie L jest prostą przechodzącą przez d_1 i d_2 ma stopień $4 = 4 + 3 - 3$. Stąd E przechodzi przez d_3, a zatem przechodzi L. □

Uwaga 3.5. Powyższe twierdzenie prawdziwe jest również w przypadku, gdy prosta Z przechodzi przez punkt osobliwy krzywej S z osobliwością typu punkt podwójny, a więc gdy $z_2 = z_3$. Jest to przypadek graniczny twierdzenia 3.4. Jeśli bowiem weźmiemy prostą Z^ε blisko Z, otrzymamy prostą L^ε przechodzącą przez punkty $d_1^\varepsilon, d_2^\varepsilon, d_3^\varepsilon$. Gdy $\varepsilon \to 0$, to $Z^\varepsilon \to Z$ i te punkty dążą do punktów d_1, d_2 i d_3. Stąd, ponieważ przestrzeń prostych w $\mathbb{C}P^2$ jest zwarta, proste L^ε zbiegają do L dając szukane uogólnienie.

4. Pewne rezultaty dla wyższych stopni.

Pewnych uogólnień twierdzenia 3.1 można spodziewać się także w przypadku krzywych wymiernych wyższych stopni. I one mogą iść w dwóch kierunkach — albo dla krzywych wymiernych wyższych stopni, albo dla krzywych z jednym, dobrze zrozumianym punktem osobliwym. Istotnym problemem staje się zanik czytelności geometrycznej. Rysunek ilustrujący twierdzenie 3.1 trudno narysować odręcznie, jeśli zwiększy się stopień — czytelność rysunków spadnie do zera.

Tutaj jednak ograniczę się do podania uogólnień twierdzenia 3.4 na przypadek stopnia 4 i 5.

Niech więc S będzie krzywą stopnia 4, zaś proste X, Y, Z — trzema prostymi w położeniu ogólnym. Przecinają one S w punktach x_i, y_i, z_i, gdzie teraz $0 < i \leq 4$. Definiujemy: A_1 jako stożkową przechodzącą przez x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, A_2 zaś — jako stożkową przechodzącą przez x_3, x_4, y_3, z_2, z_3 oraz B jako prostą przechodzącą przez punkty z_4 i y_4. Prosta B przecina X w punkcie d_1 proste A_1, A_2 wyznaczają punkty d_2 i d_3 odpowiednio na prostych Z i Y.

Twierdzenie 4.1. *Punkty d_1, d_2 i d_3 są współliniowe.*

Dowód. Postępujemy dokładnie tak samo, jak w przypadku twierdzenia 3.4. □

Podobnie pracujemy w przypadku stopnia 5. Zamiast prostej B bierzemy stożkową A_3 przechodzącą przez punkty x_5, y_4, y_5, z_4, z_5, która wyznacza punkt d_1 na prostej X. Wszystkie oznaczenia jak wyżej, tylko krzywa S ma stopień 5.

Twierdzenie 4.2. *Punkty d_1,d_2 i d_3 leżą na jednej prostej.* □

Bibliografia:

[AuLaF] M. Audin, J. LaFontaine eds. "Holomorphic curves in symplectic geometry" Birkhäuser, Boston 1994.

[Ber] M. Berger "Géometrie", Cenric/Fernand Nathan, Paris 1977, 1978.

[BoŻo] M. Borodzik, H. Żołądek, *"The Pascal theorem and some its generalizations"*, preprint 2001.

[DiFItz] P. Di Francesco, C. Itzykson, *"Quantum intersection rings"*, in "Moduli of algebraic curves" (H. Dijgraaf, C. Faber and G. van der Geer eds.), Birkhäuser, Boston 1995, s. 81-148.

[EGH] D. Eisenbud, M. Green, J. Harris, *"Cayley-Bacharach theorems and conjectures"*, Bull. AMS **35**(1996) No 3, 295-324.

[GrHa] P. Griffiths, J. Harris, "Principles of algebraic geometry", J. Wiley & Sons, New York 1984.

[Hart] R. Hartshorne, "Algebraic geometry", Springer-Verlag, New York 1997.

[Sie] B. Siebert *"Gromov-Witten invariants for general symplectic manifolds"* preprint.

[Tsi] A. K. Tsikh, "Multidimensional residua and their applications", Nauka, Novosybirsk 1988 (w języku rosyjskim).