Prace domowe

Piotr Hofman

2 grudnia 2017

1 Praca domowa 09.10.2017 termin oddania 13.10.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Pokaż przez indukcję, że każdy trójwymiarowy wielościan W może zostać rozłożony na sumę czworościanów o wierzchołkach w wierzchołkach wielościanu W w takisposób aby każde dwa czworościany miały rozłączne wnętrza (mogą się sytkać tylko bokami, krawędziami lub wierzchołkami).

Zadanie 2

Podaj przykład dwóch zbiorów $A \neq B$, takich że $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

Zadanie 3

Niech $X_i = \{n \in \mathbb{N} | n > i\}$ czy $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{N} \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i\right)$?

2 Praca domowa 16.10.2017 termin oddanie 20.10.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równoważność: $A \cap B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$.

Zadanie 2

Niech $A \in P(P(\mathbb{R}))$ będzie rodziną zbiorów spełniającą warunek

$$\forall_{B \in A} \forall_{C \subseteq \mathbb{R}} C \subseteq B \Longrightarrow C \in A.$$

Pokazać, że $\bigcup A = \{z \in R | \{z\} \in A\}$.

Zadanie 3

Dla dowolnego zbioru A, przez $P_2(A)$ oznaczymy rodzinę wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru A. Niech $\{X, Y\}$ będzie podziałem zbioru $P_2(N)$, tj. niech $X \cap Y = \emptyset$ oraz $X \cup Y = P_2(N)$. Pokazać, że istnieje taki nieskończony zbiór A, że $P_2(A) \subseteq X$ lub $P_2(A) \subseteq Y$.

3 Praca domowa 23.10.2017 termin oddanie 27.10.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Czy dla każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f = g \circ g$?

Zadanie 2

Niech $f : A \to B$ i niech $g : P(B) \to P(A)$ będzie taka, że $g(Y) = f^{-1}(Y)$, dla $Y \subseteq B$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R} \subseteq Rg(g)$ to $g(\bigcup g^{-1}(\mathcal{R})) = \bigcup \mathcal{R}$. (Rg to obraz)

Zadanie 3

Udowodnić, że jeśli $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in H} A_n$, dla dowolnego nieskończonego $H \subseteq \mathbb{N}$.

4 Praca domowa 28.10.2017 termin oddanie 3.11.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Pokazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest różnowartościowa oraz $A \subseteq Y$ to przeciwobraz A przy przekształceniu f jest tym samym, co obraz A przy przekształceniu f^{-1}.

zadanie 2

Niech $f : A \to A$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy gdy $f|_{Rg(f)} = id_{Rg(f)}$.

5 Praca domowa 03.11.2017 termin oddanie 13.11.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki, lub przynieść na zajęcia w poniedziałek. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Niech A będzie zbiorem skończonym a $f : A \to A$ biekcją. Udowodnić, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f^n = id_A$.

zadanie 2

Udowodnić, że $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f:I\to J} \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$.

zadanie 3

Niech $f : A \to A$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $x \in Z$ oraz $f^{-1}(Z) \subseteq Z$.

6 Praca domowa 11.11.2017 termin oddanie 17.11.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki, lub przynieść na zajęcia w poniedziałek. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Niech $f : A \to B$ i niech $C \subseteq A$ oraz $D \subseteq B$. Pokazać, że $C \subseteq f^{-1}(D)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(C) \subseteq D$.

Zadanie 2

Udowodnić, że każdy skończony porządek częściowy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem $\mathbb{N}$ uporządkowanym przez relację podzielności. (Uporządkowanie przez relację podzielności $x \leqslant y$ jeśli $x|y$). Podpowiedź: indukcja ze względu na ilość elementów w skończonym porządku.

Zadanie 3

Niech $\phi : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco: $\phi(n) = \{\langle x, n\rangle | x \leqslant n\} \cup \{\langle n, y\rangle | n \leqslant y\}$.

1. Znaleźć przeciwobraz $\phi^{-1}(T)$, gdzie T to rodzina wszystkich relacji przechodnich.
2. Czy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi(n)$ jest relacją przechodnią w $\mathbb{N}$?

7 Praca domowa 17.11.2017 termin oddanie 24.11.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Niech $\langle A, \leqslant\rangle$ będzie kratą zupełną (tj. zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy podzbiór ma kres górny). Funkcję $f : P(A) \to P(A)$ definiujemy następująco: $f(X) = \{a \in A : a \leqslant sup(X)\}$. Udowodnić, że dla dowolnych $X, Y \in P(A)$ zachodzi

1. $X \subseteq f(X)$,
2. $f(f(X)) = f(X)$,
3. $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$.

Zadanie 2

Niech r będzie relacją częściowego porządku w zbiorze A. Udowodnić, że jeśli $r \cup r^{-1}$ jest relacją przechodnią to każdy skierowany podzbiór zbioru A jest łańcuchem.

Zadanie 3

Niech r będzie częściowym porządkiem w zbiorze A i niech $f : A \to A$ będzie biekcją. Rozpatrzmy funkcję $g : A \times A \to A \times A$, określoną tak: $g(x, y) = \langle f(x), f(y)\rangle$. Udowodnić, że:

1. $g(r) \subseteq r$, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest monotoniczna;
2. $r \subseteq g(r)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x,y\in A}(f(x)rf(y) \Rightarrow xry)$.

8 Praca domowa 1.12.2017 termin oddanie 11.12.2017

Rozwiązania proszę zostawiać w mojej przegródce korytarzu do sekretariatu instytutu matamtyki i informatyki, lub przynieść na zajęcia. `https://www.mimuw.edu.pl/plan-budynku#sala4661`

Zadanie 1

Funkcja $f : P(A) \to P(A)$ jest ciągła. Powiemy, że zbiór $x \subseteq A$ jest dobry , gdy $x \subseteq f(x)$. Udowodnić, że iloczyn dowolnej rodziny zbiorów dobrych jest dobry i że suma dowolnej skierowanej rodziny zbiorów dobrych jest dobra.

Zadanie 2

W zbiorze funkcji $\mathbb{N} \to \{2, 3\}$ dany jest następujący porządek częściowy: $f \leqslant g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(\{2\}) \subseteq g^{-1}(\{2\})$. Czy ten porządek:

1. jest liniowy?
2. jest dobrze ufundowany?
3. ma elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe?
4. jest kratą zupełną?

Zadanie 3

Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem cześciowo uporządkowanym. Czy każdy izomorfizm porząd- kowy $f : A \to A$ jest funkcją identycznościową? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli:

1. zbiór A jest uporządkowany liniowo?
2. zbiór A jest skończony?
3. zbiór A jest skończony i uporządkowany liniowo?