Zadania z deskryptywnej teorii mnogości

Marcin Kysiak

Semestr letni roku ak. 2001/2002

Dokument ten zawiera zadania omówione przeze mnie na ćwiczeniach do wykładu monograficznego prof. P. Zakrzewskiego "Deskryptywna teoria mnogości" oraz kilka zadań, które powinny zostać moim zdaniem omówione, ale nie zostały z braku czasu. Zadania podzielone zostały na trzy kategorie:

- zadania zwykłe, które każdy uczestnik ćwiczeń powinien umieć rozwiązać.
- zadania trudniejsze, oznaczone symbolem $\bigstar$. Przeznaczone są one dla osób zainteresowanych, niekoniecznie związane są bezpośrednio z tematyką wykładu, lecz do ich rozwiązania nie potrzeba dodatkowej wiedzy.
- zadania bardzo trudne, oznaczone symbolem $\bigstar\bigstar$. Przeznaczone są dla osób szczególnie zainteresowanych teorią mnogości. Przyznaję, że najczęściej nie znam ich rozwiązania używającego tylko wiedzy z naszego wykładu.

Spis treści

1 Powtórka z dobrych porządków i indukcji pozaskończonej

Definicja 1.1. Częściowy porządek $\langle X, < \rangle$ nazywamy dobrym, jeżeli jest liniowy i każdy niepusty podzbiór $A \subseteq X$ ma element najmniejszy.

Definicja 1.2. Podzbiór O zbioru liniowo uporządkowanego X nazywamy odcinkiem początkowym, jeżeli spełnia warunek:

$$\forall x, y \in X \ \ (x \in O \ \wedge \ y < x) \Rightarrow y \in O.$$

Zad. 1.1. Wykaż, że porządek liniowy jest dobry wttw. gdy każdy właściwy odcinek początkowy ma bezpośredni następnik.

Zad. 1.2. Wykaż, że dla zbioru dobrze uporządkowanego $\langle X, \prec \rangle$ następujące warunki są równoważne:

- Istnieje funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall x, y \in X \ \ x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

- X jest przeliczalny.

Zad. 1.3. Wykaż, że istnieje zbiór dobrze uporządkowany $\langle X, < \rangle$ o tej własności, że X jest nieprzeliczalny, ale każdy właściwy odcinek początkowy w X jest przeliczalny.[1] Możesz skorzystać z faktu, że $\mathbb{R}$ można dobrze uporządkować.

Zad. 1.4 (Twierdzenie o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną). ($\bigstar$) Niech $\langle X, < \rangle$ będzie dobrym porządkiem a Y dowolnym zbiorem. Niech $\Phi : P(X \times Y) \to Y$ będzie dowolną funkcją. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna funkcja $F : X \to Y$ spełniająca warunek:

$$\forall x \in X \ \ \Phi(f \restriction O[x]) = f(x),$$

gdzie $O[x] = \{y \in X : y < x\}$.

Definicja 1.3. Zbiór $P \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy zbiorem doskonałym, gdy $\emptyset \neq P = \overline{P}$ oraz P nie ma punktów izolowanych.

[1] Dobry porządek o tej własności będziemy oznaczać symbolem ω_1.

Zad. 1.5. Wykaż, że dowolny nieprzeliczalny domknięty podzbiór $\mathbb{R}$ zawiera podzbiór doskonały.

Zad. 1.6. Dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}$ określmy ciąg zbiorów następująco:

- $F_0 = F$.
- $F_{n+1} = F_n \setminus \{x \in F_n : x \, \text{jest punktem izolowanym} \, F_n\}$.
- $F_\omega = \bigcap_n F_n$.

Skonstruuj taki zbiór domknięty F, że F_ω nie jest zbiorem doskonałym.

Zad. 1.7. (★) Dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}$ oraz dla $\alpha \in \omega_1$ określmy zbiory F_α następująco:

- $F_0 = F$,
- $G_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$,
- $F_\alpha = G_\alpha \setminus \{x \in G_\alpha : x \ \text{jest punktem izolowanym} \, G_\alpha\}$.

Wykaż, że dla dowolnego $\alpha \in \omega_1$ istnieje taki zbiór domknięty F, że F_α nie jest zbiorem doskonałym.

2 Powtórka z topologii

Zad. 2.1. Niech X będzie dowolna przestrzenią metryczną. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- X jest ośrodkowa,
- X ma bazę przeliczalną,
- X ma własność Lindelöfa: każde pokrycie otwarte przestrzeni X ma podpokrycie przeliczalne.

Zad. 2.2 (Twierdzenie Cantora). Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wykaż, że jeżeli $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych o tej własności, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, to istnieje dokładnie jeden punkt $x \in X$ taki, że

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} F_n.$$

Sprawdź, że założenie o średnicach zbiorów F_n jest istotne nawet dla faktu, że ich przecięcie jest niepuste.

Zad. 2.3 (Twierdzenie Baire'a). Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wykaż, że jeżeli $\{F_n : n \in \omega\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych brzegowych, to $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ jest zbiorem brzegowym.

3 Przestrzenie polskie

Zad. 3.1. Wykaż, że przeliczalny produkt przestrzeni polskich jest przestrzenią polską.

Zad. 3.2. Wykaż, że przestrzeń $C([0, 1])$ z normą "supremum" jest przestrzenią polską.

Zad. 3.3. Wykaż, że każda przeliczalna przestrzeń metryczna zupełna ma punkt izolowany.

Zad. 3.4. Wykaż, że podprzestrzeń przestrzeni zupełnej (z metryką dziedziczoną) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięta. Zauważ, że podprzestrzeń przestrzeni zupełnej, która jest metryzowalna w sposób zupełny nie musi być domknięta.

Zad. 3.5. Na przestrzeni 2^ω możemy wprowadzić topologię na różne sposoby:

- Traktujemy 2^ω jako produkt przestrzeni dwupunktowych przestrzeni dyskretnych i wprowadzamy na nim topologię Tichonowa.
- Za bazę topologii przyjmujemy rodzinę $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$, gdzie $[s] = \{x \in 2^\omega : s \subseteq x\}$.
- Określamy metrykę d_1 wzorem

$$d_1(x, y) = \frac{1}{\min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}}.$$

- Określamy metrykę d_2 wzorem

$$d_2(x,y) = \sum_{n\in\omega} 2^{-n}|x(n) - y(n)|.$$

Wykaż, że wszystkie cztery sposoby wprowadzenia topologii dają w 2^ω dokładnie tę samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad. 3.6. Dla $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ oraz $z \in 2^\omega$ określmy

$$B_{z,f} = \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \;\; x \restriction [f(n), f(n+1)) \neq x \restriction [f(n), f(n+1))\}.$$

- Wykaż, że dla dowolnych $z \in 2^\omega$ i $f \in \omega^{\uparrow\omega}$ zbiór $B_{z,f}$ jest pierwszej kategorii Baire'a w 2^ω.
- Wykaż, że dowolny podzbiór 2^ω, który jest pierwszej kategorii Baire'a jest zawarty w zbiorze $B_{z,f}$ dla pewnych $z \in 2^\omega$ i $f \in \omega^{\uparrow\omega}$.

Zad. 3.7. Wykaż, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- ω^ω,
- $\omega^{\uparrow\omega} = \{x \in \omega^\omega : \forall n \in \omega \;\; x(n) < x(n+1)\}$,
- $[\omega]^\omega = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \;\; x(n) = 1\}$.

Zad. 3.8. Wykaż, że w przestrzeni ω^ω istnieje zbiór pierwszej kategorii Baire'a, który nie jest σ-zwarty.

Zad. 3.9. Sprawdź, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest przestrzenią polską.

Zad. 3.10. Wykaż, że jeżeli (X,d) jest przestrzenią metryczną to istnieje metryka d' na X równoważna d taka, że $d' \leqslant 1$. Ponadto sprawdź, że jeżeli d jest zupełna to istnieje taka d' zupełna.

Zad. 3.11. Wykaż, że rozkład Cantora-Bendixsona nieprzeliczalnego zbioru domkniętego F na sumę rozłączną zbioru doskonałego i przeliczalnego (por. zad. 1.5) jest wyznaczony jednoznacznie.

Zad. 3.12. Wykaż, że w przestrzeni metrycznej każdy zbiór domknięty jest typu G_δ.

Zad. 3.13. Niech (X, d) będzie przestrzenią polską a G jej podprzestrzenią polską (tzn. metryzowalną w sposób zupełny, natomiast niekoniecznie zupełną z metryką $d \restriction (G \times G)$). Wykaż, że G jest typu G_δ.

Zad. 3.14. Wykaż, że zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jet typu G_δ a nie jest zbiorem typu F_σ.

Zad. 3.15. Wykaż, że jeżeli X jest przestrzenią topologiczną zwartą, Y przestrzenią Hausdorffa a $f : X \to Y$ funkcją ciągłą i różnowartościową, to f jest homeomorfizmem przestrzeni X i $f[X]$.

4 Przedłużanie funkcji ciągłych

Zad. 4.1 (Twierdzenie Kuratowskiego). Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi a $A \subseteq X$ dowolnym zbiorem. Wykaż, że dla każdej funkcji ciągłej $f : A \to Y$ istnieje jej przedłużenie do ciągłej funkcji $g : G \to Y$ dla pewnego zbioru $G \supseteq A$ typu G_δ.

Zad. 4.2 (Twierdzenie Lavrentieva). Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ dowolnymi zbiorami a $f : A \to B$ homeomorfizmem. Wykaż, że istnieją zbiory $G \supseteq A$, $H \supseteq B$ typu G_δ oraz homeomorfizm $h : G \to H$ przedłużający f.

5 Drzewa

Definicja 5.1. Drzewem na zbiorze A nazywamy dowolny zbiór $T \subseteq A^{<\omega}$ taki, że

$$(s \in T \wedge n \leqslant |s|) \Rightarrow s \restriction n \in T.$$

Powiemy, że drzewo T jest dobrze przycięte, jeżeli dla dowolnego $s \in T$ istnieje $t \supsetneq s$, $t \in T$.

Powiemy, że drzewo $T \subseteq A^{<\omega}$ jest doskonałe, jeżeli dla dowolnego $s \in T$ istnieje $t \in T$ takie, że $t \supseteq s$ oraz istnieją $a, a' \in A$ takie, że

$$a \neq a' \wedge t^\frown a, t^\frown a' \in T.$$

Jeżeli $T \subseteq A^{<\omega}$ jest drzewem, to przez $[T]$ oznaczamy zbiór jego gałęzi:

$$[T] = \{x \in A^\omega : \forall n \in \omega \;\; x \restriction n \in T\}.$$

We wszystkich zadaniach zakładać będziemy, że A jest dyskretną przestrzenią polską.

Zad. 5.1. Wykaż, że dla dowolnego drzewa $T \subseteq A^{<\omega}$ zbiór $[T]$ jest domknięty w A^{ω}.

Zad. 5.2. Wykaż, że jeżeli $T, T' \subseteq A^{<\omega}$ są drzewami dobrze przyciętymi, oraz $T \neq T'$ to $[T] \neq [T']$. Zauważ, że założenie o tym, że drzewa są przycięte jest istotne.

Zad. 5.3. Wykaż, że dla dowolnego zbioru domkniętego $D \subseteq A^{\omega}$ istnieje drzewo dobrze przycięte T takie, że $D = [T]$.

Zad. 5.4. Wykaż, że zbiór $P \subseteq 2^{\omega}$ jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy $P = [T]$ dla pewnego drzewa doskonałego T.

Zad. 5.5. Wykaż, że w przestrzeni 2^{ω} każdy zbiór domknięty i niepusty jest retraktem całej przestrzeni.

6 Przestrzenie zerowymiarowe

Definicja 6.1. Niepusta przestrzeń metryczna ośrodkowa X jest zerowymiarowa, jeżeli ma bazę topologii złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych.

Zad. 6.1. Wykaż, że przestrzenie $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, 2^{ω} i ω^{ω} są zerowymiarowe.

Zad. 6.2. Wykaż, że dowolna przestrzeń metryczna ośrodkowa zerowymiarowa zanurza się homeomorficznie w 2^{ω}.

Zad. 6.3. Wykaż, że przestrzeń 2^{ω} jest jedyną z dokładnością do homeomorfizmu zwartą, doskonałą przestrzenią metryczną zerowymiarową.

Zad. 6.4. Wykaż, że odwzorowanie $\varphi : \omega^{\omega} \longrightarrow [\omega]^{\omega} \subseteq 2^{\omega}$ określone następująco:

$$\varphi(x) = 0^{x(0)} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x(1)} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x(2)} {}^\frown 1 ...$$

gdzie

$$0^k = \underbrace{0^\frown ... ^\frown 0}_{k \text{ zer}}$$

jest homeomorfizmem ω^{ω} i $[\omega]^{\omega} = \{x \in 2^{\omega} : \exists^{\infty} n \;\; x(n) = 1\}$.

7 Wzmacnianie topologii polskich

Zad. 7.1. Wykaż, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią polską oraz $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbf{Bor}(X, \tau)$, to można tak wzmocnić topologię τ do topologii polskiej $\tau' \supseteq \tau$, że $\mathbf{Bor}(X, \tau) = \mathbf{Bor}(X, \tau')$ oraz $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Clop}(X, \tau')$.

Zad. 7.2. Wykaż, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią polską, Y przestrzenią metryczną ośrodkową, a $f : (X, \tau) \to Y$ dowolną funkcją borelowską, to można tak wzmocnić topologię τ do topologii polskiej $\tau' \supseteq \tau$, że $\mathbf{Bor}(X, \tau) = \mathbf{Bor}(X, \tau')$ oraz $f : (X, \tau') \to Y$ jest ciągła.

Zad. 7.3. Wykaż, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią polską to można tak wzmocnić jej topologię do topologii polskiej $\tau' \supseteq \tau$, że $\mathbf{Bor}(X, \tau) = \mathbf{Bor}(X, \tau')$, ale (X, τ') jest zerowymiarowa.

8 Schematy Łuzina

Definicja 8.1. Niech X będzie przestrzenią polską. Schematem Łuzina nazywamy rodzinę $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ taką, że

- $A_s \subseteq X$ dla dowolnego $s \in \omega^{<\omega}$,
- $A_{s^\frown i} \cap A_{s^\frown j}$ dla dowolnych $s \in \omega^{<\omega}$ i $i, j \in \omega$, $i \neq j$;
- $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$ dla dowolnych $s \in \omega^{<\omega}$ i $i \in \omega$.

Jeżeli $\forall x \in \omega^\omega \;\; \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(A_{x \restriction n}) = 0$, to definiujemy

$$D = \{x \in \omega^\omega : \bigcap_n A_{x \restriction n} \neq \emptyset\}$$

oraz $f : D \to X$ wzorem

$$\{f(x)\} = \bigcap_n A_{x \restriction n}.$$

Zad. 8.1. Niech $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ będzie schematem Łuzina na przestrzeni polskiej X takim, że $\forall x \in \omega^\omega \;\; \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(A_{x \restriction n}) = 0$. Wykaż, że

- f jest ciągła i "1-1",
- jeżeli dla każdego $s \in \omega^{<\omega}$ zbiór A_s jest domknięty w X, to D jest domknięty w ω^ω,

- jeżeli dla każdego $s \in \omega^{<\omega}$ zbiór A_s jest otwarty w X, to f jest zanurzeniem homeomorficznym D w X.

Zad. 8.2. Wykaż, że jeżeli τ_1, τ_2 są topologiami polskimi na przestrzeni X takimi, że $\mathbf{Bor}(X, \tau_1) = \mathbf{Bor}(X, \tau_2)$, to również

$$\mathbf{\Sigma}^1_1(X, \tau_1) = \mathbf{\Sigma}^1_1(X, \tau_2).$$

Zad. 8.3. Wykaż, że dowolny zbiór borelowski w dowolnej przestrzeni polskiej jest ciągłym i różnowartościowym obrazem zbioru domkniętego w ω^ω.

Zad. 8.4. Wykaż, że w przestrzeni ω^ω każdy zbiór zwarty ma puste wnętrze.

Zad. 8.5 (Twierdzenie Aleksandrowa-Urysohna). Wykaż, że przestrzeń ω^ω jest jedyną z dokładnością do homeomorfizmu przestrzenią polską zerowymiarową o tej własności, że każdy zbiór zwarty ma puste wnętrze. Korzystając z tej informacji rozwiąż ponownie zadanie 3.7.

9 Operacja Suslina

Definicja 9.1.

- Schematem Suslina na przestrzeni polskiej X nazywamy dowolną rodzinę $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ podzbiorów X.
- Dla schematu Suslina $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ definiujemy operację $\mathcal{A}$ Suslina następująco:
$$\mathcal{A}_s A_s = \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_n A_{x\restriction n}.$$
- Jeżeli $\Gamma \subset X$ dla pewnej przestrzeni polskiej X, to przez $\mathcal{A}\Gamma$ oznaczamy klasę zbiorów postaci $\mathcal{A}_s A_s$ dla pewnego schematu Suslina $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}} \subseteq \Gamma$.

Zad. 9.1. Wykaż, że jeżeli $\forall n \in \omega \;\; A_n \in \Gamma$ to $\bigcup_n A_n, \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}\Gamma$.

Definicja 9.2. Schemat Suslina $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ nazwiemy regularnym, jeżeli $s \subseteq t \Rightarrow A_s \supseteq A_t$.

Zad. 9.2. Wykaż, że dla dowolnego schematu Suslina $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ istnieje regularny schemat Suslina $(B_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ taki, że

$$\mathcal{A}_s A_s = \mathcal{A}_s B_s.$$

Zad. 9.3. Udowodnij, że jeżeli Γ jest rodziną podzbiorów przestrzeni polskiej X taką, że $X \in \Gamma$, to

$$\mathcal{A}\Gamma = \mathcal{A}\mathcal{A}\Gamma.$$

Zad. 9.4 (Twierdzenie Hurewicza). (★) Wykaż, że przestrzeń polska zawiera domkniętą kopię przestrzeni ω^ω wtedy i tylko wtedy, gdy X nie jest σ-zwarta.

10 Mierzalność i własność Baire'a

Przez $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ oznaczać będziemy odpowiednio rodziny zbiorów pierwszej kategorii Baire'a i miary Lebesgue'a zero. Jeżeli Γ jest klasą podzbiorów zbioru X, to przez $\sigma(\Gamma)$ oznaczamy σ-ciało generowane przez Γ.

Definicja 10.1. Mówimy, że podzbiór A przestrzeni polskiej X ma własność Baire'a jeżeli istnieje taki zbiór borelowski $B \subseteq X$ oraz taki zbiór pierwszej kategorii $F \subseteq X$, że $A = B \bigtriangleup F$. Rodzinę zbiorów o własności Baire'a w przestrzeni X oznaczać będziemy przez $\mathbf{BP}(X)$.

Zad. 10.1. Wykaż, że dla podzbioru A przestrzeni polskiej X następujące warunki są równoważne:

- A ma własność Baire'a;
- $A \bigtriangleup B \in \mathcal{M}$ dla pewnego $B \in \mathbf{Bor}(X)$;
- $A \in \sigma(\mathbf{Bor}(X) \cup \mathcal{M})$.

Zad. 10.2. Wykaż, że dla zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:

- A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a (to znaczy, z definicji, spełnia warunek Caratheodory'ego);
- $A \bigtriangleup B \in \mathcal{N}$ dla pewnego $B \in \mathbf{Bor}(X)$;
- $A \in \sigma(\mathbf{Bor}(X) \cup \mathcal{N})$.

Zad. 10.3. Wykaż, że następujące warunki są równoważne dla podzbioru A przestrzeni polskiej X:

- A ma własność Baire'a;
- istnieje taki zbiór otwarty $U \subseteq X$, że $U \bigtriangleup A \in \mathcal{M}$

Zad. 10.4. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $A \in \mathbf{BP} \setminus \mathcal{M}$ istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $U \subseteq^*_{\mathcal{M}} A$ (tzn. $U \setminus A \in \mathcal{M}$).

Zad. 10.5. Podaj przykład takiego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, że A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, ale dla dowolnego zbioru otwartego niepustego $U \subseteq \mathbb{R}$ mamy $U \not\subseteq^*_{\mathcal{N}} A$.

Zad. 10.6. Wykaż, że w dowolnej nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej istnieje zbiór, który nie ma własności Baire'a.

Definicja 10.2. Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów przestrzeni polskiej X ma własność c.c.c. jeżeli nie istnieje nieprzeliczalna rodzina zbiorów borelowskich spoza $\mathcal{I}$.

Zad. 10.7. Wykaż że ideały $\mathcal{N}_\mu(X)$ oraz $\mathcal{M}(X)$ dla dowolnej przestrzeni polskiej X i borelowskiej miary μ na X mają własność c.c.c..

Zad. 10.8. Wykaż, że istnieją takie zbiory $F \in \mathcal{M}$ i $G \in \mathcal{N}$, że $\mathbb{R} = F \cup G$.

Zad. 10.9.

- Wykaż, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, który ma własność Baire'a, ale nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
- Wykaż, że istnieje zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$, który jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, ale nie ma własności Baire'a.

Zad. 10.10. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że $A \in \mathbf{BP} \setminus \mathcal{M}$. Wykaż, że zbiory $A - A$ oraz $A + A$ mają niepuste wnętrza.

Zad. 10.11. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym miary dodatniej. Wykaż, że zbiory $A - A$ oraz $A + A$ mają niepuste wnętrza.

Definicja 10.3. Powiemy, że zbiór $A \subseteq 2^\omega$ jest ogonowy, gdy dla dowolnych $\forall x, y \in 2^\omega$ jeżeli $\forall^\infty n \;\; x(n) = y(n)$, to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Zad. 10.12. (★) Wykaż, że jeżeli zbiór $A \in \mathbf{BP}(2^\omega)$ jest ogonowy to $A \in \mathcal{M}$ lub $2^\omega \setminus A \in \mathcal{M}$. Przypomnij sobie również (z "Rachunku Prawdopodobieństwa I") prawo 0–1 Kołmogorowa.

Zad. 10.13. (★★)

- Czy istnieje taki zbiór domknięty miary zero $A \subseteq R$, że $A + A \in \mathcal{N}$, ale $A - A = \mathbb{R}$?
- Czy istnieje taki zbiór domknięty miary zero $A \subseteq R$, że $A - A \in \mathcal{N}$, ale $A + A = \mathbb{R}$?

Definicja 10.4. Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi. Powiemy, że funkcja $f : X \to Y$ jest $\mathbf{BP}$-mierzalna, jeżeli $f^{-1}[U] \in \mathbf{BP}(X)$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq Y$.

Zad. 10.14. Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f : X \to Y$ jest $\mathbf{BP}$-mierzalna, to istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{M}(X)$, że $f_{\restriction (X \setminus F)}$ jest ciągła.

Zad. 10.15. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $H \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $\mu(G) < \varepsilon$ oraz $f_{\restriction (\mathbb{R} \setminus H)}$ jest ciągła.

Zad. 10.16. (★) Podaj przykład takiej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalnej w sensie Lebesgue'a, że dla dowolnego $H \in \mathcal{N}$ funkcja $f_{\restriction (\mathbb{R} \setminus H)}$ nie jest ciągła.

11 Twierdzenia o oddzielaniu

Zad. 11.1. Wykaż, że dla każdej rodziny $\{A_n : n \in \omega\}$ parami rozłącznych analitycznych podzbiorów przestrzeni polskiej X istnieje rodzina $\{B_n : n \in \omega\}$ parami rozłącznych zbiorów borelowskich przestrzeni X takich, że $A_n \subseteq B_n$.

12 Klasy borelowskie, zbiory uniwersalne

Zad. 12.1. Wykaż, że nie istnieje X-uniwersalny zbiór borelowski dla klasy zbiorów borelowskich przestrzeni polskiej X.

Zad. 12.2. Wykaż, że w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej dla dowolnych $\alpha < \beta < \omega_1$ mamy:

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\beta \cap \mathbf{\Pi}^0_\beta.$$

Zad. 12.3. Wykaż, że w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej dla dowolnego $\alpha < \omega_1$

- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$,
- $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \neq \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Delta}^0_\alpha \neq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

13 Rangi drzew ufundowanych

Definicja 13.1. Niech $T \subseteq \omega^{<\omega}$ będzie drzewem ufundowanym. Rangę T definiujemy następująco:

- $\mathrm{rank}_T(t) = \sup\{\mathrm{rank}_T(s) + 1 : t \subsetneq s \in T\}$ dla $t \in T$,
- $\mathrm{rank}(T) = \sup\{\mathrm{rank}_T(t) : t \in T\}$.

Zad. 13.1. Sprawdź, że dla dowolnego drzewa ufundowanego $T \subseteq \omega^{<\omega}$ jego ranga $\mathrm{rank}(T)$ jest dobrze określona.

Zad. 13.2. Zauważ, że dla $\emptyset \neq T \subseteq \omega^{<\omega}$ mamy

$$\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}_T(\emptyset).$$

Zad. 13.3. Wykaż, że dla dowolnego $\alpha < \omega_1$ istnieje ufundowane drzewo $T \subseteq \omega^{<\omega}$ takie, że $\mathrm{rank}(T) \geqslant \alpha$.

14 Hiperprzestrzeń

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to przez $K(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów X.

Definicja 14.1. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $d \leqslant 1$, to na $K(X)$ definiujemy metrykę d_H, zwaną metryką Hausdorffa, następująco:

- dla $K, L \in K(X)$ definiujemy $\delta(K, L) = \sup_{x \in K} d(x, L)$;
- dla $K, L \neq \emptyset$ definiujemy

$$d_H(K, L) = \max\{\delta(K, L), \delta(L, K)\},$$

- $d_H(\emptyset, L) = d_H(L, \emptyset) = 1$ dla $L \neq \emptyset$,
- $d_H(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Zad. 14.1. Sprawdź, że d_H jest metryką na $K(X)$.

Definicja 14.2. Na $K(X)$ wprowadzamy topologię, zwaną topologią Vietorisa, której podbazę[2] stanowią zbiory postaci:

$$\{K \in K(X) : K \cap V = \emptyset\}$$

oraz

$$\{K \in K(X) : K \subset U\},$$

gdzie U, V są zbiorami otwartymi w X.

Zad. 14.2. Wykaż, że metryka Hausdorffa na przestrzeni polskiej X zadaje topologię Vietorisa.

Definicja 14.3. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Dla ciągu zbiorów $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ definiujemy jego topologiczną granicę dolną $\underline{\lim}_n A_n$ oraz górną $\overline{\lim}_n A_n$ następująco:

- $\underline{\lim}_n A_n = \{x \in X : \forall U$ – otoczenia otwartego punktu $x \ \forall^\infty n \ U \cap A_n \neq \emptyset\}$,
- $\overline{\lim}_n A_n = \{x \in X : \forall U$ – otoczenia otwartego punktu $x \ \exists^\infty n \ U \cap A_n \neq \emptyset\}$.

Jeżeli granica górna jest równa granicy dolnej, to ich wspólną wartość oznaczamy przez $\lim_n A_n$.

Zad. 14.3. Wykaż, że

- $\underline{\lim}_n A_n = \{x \in X : \exists (x_n)_{n \in \omega} \ x_n \in A_n \wedge x_n \to x\}$,
- $\overline{\lim}_n A_n = \{x \in X : \exists (x_n)_{n \in \omega} \ x_n \in A_n \wedge x_{n_i} \to x$
  dla pewnego podciągu $(n_i)_{i \in \omega}\}$.

Zad. 14.4. Wykaż, że przy oznaczeniach z definicji 14.1 mamy:

[2]Rodzina jest podbazą topologii, jeżeli skończone przecięcia zbiorów z tej rodziny tworzą bazę.

- $\delta(K, K_n) \to 0 \Rightarrow K \subseteq \underline{\lim}_n K_n$,
- $\delta(K_n, K) \to 0 \Rightarrow K \supseteq \overline{\lim}_n K_n$.

Zauważ, że $d_H(K_n, K) \to 0 \Rightarrow K = \lim A_n$. Sprawdź, że implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa.

Zad. 14.5. Wykaż, że jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową, to $K(X)$ jest również ośrodkowa.

Zad. 14.6. Wykaż, że jeżeli X jest przestrzenią zupełną to $K(X)$ też jest przestrzenią zupełną.

Zad. 14.7. Wykaż, że jeżeli X jest przestrzenią zwartą to $K(X)$ też jest przestrzenią zwartą.

Zad. 14.8. Wykaż, że $K(2^\omega) \approxeq 2^\omega$.

Zad. 14.9. Wykaż, że jeżeli X jest przestrzenią polską, to $x \mapsto \{x\}$ jest zanurzeniem homeomorficznym X w $K(X)$.

Zad. 14.10. Niech X będzie przestrzenią polską. Wykaż, że

- relacja $\in$ jest domknięta w $X \times K(X)$,
- relacja $\subseteq$ jest domknięta w $K(X)^2$,
- relacja $K \cap L \neq \emptyset$ jest domknięta w $K(X)^2$,
- funkcja $\langle K, L\rangle \mapsto K \cup L$ z $K(X)^2$ w $K(X)$ jest ciągła,

Zad. 14.11. Wykaż, że rodzina zwartych zbiorów doskonałych podzbiorów przestrzeni polskiej X jest typu G_δ w $K(X)$.

Definicja 14.4. Strukturą Effrosa na przestrzeni polskiej X nazywamy rodzinę $F(X)$ wszystkich zbiorów domkniętych przestrzeni X wraz z σ-ciałem podzbiorów $F(X)$ generowanym przez zbiory postaci

$$\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\},$$

gdzie $U \subseteq X$ jest dowolnym zbiorem otwartym.

Zad. 14.12. Wykaż, że struktura Effrosa na przestrzeni polskiej X jest standardowa, tzn. istnieje topologia polska τ na zbiorze $F(X)$ taka, że σ-ciało występujące w definicji struktury Effrosa jest dokładnie σ-ciałem borelowskich podzbiorów $(F(X), \tau)$.

15 Zbiory borelowsko $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełne

Definicja 15.1. Dany jest liniowy porządek $<$ na zbiorze A. Liniowy porządek, zwany porządkiem Kleene'ego–Brouwera na $A^{<\omega}$ definiujemy następująco: Jeżeli $\mathbf{s} = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}\rangle$ oraz $\mathbf{t} = \langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle$, to

$$\mathbf{s} <_{KB} \mathbf{t} \Leftrightarrow \mathbf{s} \supsetneq \mathbf{t} \wedge (\exists i < \min\{m, n\} \;\; \forall j < i \;\; s_j = t_j \,\&\, s_i = t_i).$$

Zad. 15.1. Niech $\langle X, <\rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Wykaż, że dla dowolnego drzewa $T \subseteq A^{<\omega}$: T jest ufundowane wtedy i tylko wtedy, gdy porządek Kleene'ego–Brouwera ograniczony do T jest dobrym porządkiem.

Zad. 15.2. Wykaż, że zbiór $\mathbf{LO}$ liniowych porządków na ω jest domkniętym podzbiorem $2^{\omega\times\omega}$.

Zad. 15.3. Wykaż, że zbiór $\mathbf{NWO} \subseteq \mathbf{LO}$, złożony ze wszystkich porządków na ω, które nie są dobre, jest $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny.