Praca domowa – seria II.

Zadania należy oddać do 10 maja 2012.

Zadanie 1. Niech $\mathcal{S}_2$ oznacza zbiór wszystkich operatorów Hilberta–Schmidta na przestrzeni Hilberta H. Nadto niech dla $A, B \in \mathcal{S}_2$

$$< A, B >:= tr(AB^*).$$

Pokazać, że $(\mathcal{S}_2, < \cdot, \cdot >)$ jest przestrzenią Hilberta (w szczególności, że jest zupełna) z własnością aproksymacji (czyli, że elementy $\mathcal{S}_2$ można aproksymować w normie generowanej przez $< \cdot, \cdot >$ operatorami skończonego wymiaru) oraz, że $\mathcal{S}_2$ jest podalgebrą algebry operatorów ograniczonych na H.

Zadanie 2. Niech $(\mathcal{R}, \mu)$ i $(\mathcal{S}, \nu)$ będą przestrzeniami o skończonej mierze. Nadto niech $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ oraz T będzie operatorem liniowym takim, że

$$T : L^{p_0}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) \text{ jest ograniczony,}$$
$$T : L^{p_1}(\mu) \to L^{q_1}(\nu) \text{ jest zwarty.}$$

Pokazać, że jeśli $\theta \in (0, 1)$ oraz p, q spełnia równanie

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

to $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ jest zwarty.

Zadanie 3. Niech $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ - funkcja Heaviside'a, $E_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Oblicz lub wyraź poprzez $H(x)$:

- $E_\alpha \star H$,
- $E_\alpha \star E_\beta$.
- $x^2 H(x) \star e^x H(x)$,
- $[(1-x)H(x)] \star [e^x H(x)]$,
- $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$.

Zadanie 4. Oznaczmy przez $[\phi]^\wedge$ transformatę Fouriera dystrybucji temperowanej ϕ. Oblicz:

1. $[\text{sgn } x]^\wedge$,
2. $[x^{-m}]^\wedge$, $m > 0$,
3. $[|x|]^\wedge$,
4. $[x^n|x|]^\wedge$,
5. $[\ln|x|]^\wedge$

Zadanie 5. Rozważmy macierze $n \times n$, t. że $a_{ij} \geq 0$, $\forall i \ \sum_j a_{ij} = 1$, $\forall j \ \sum_i a_{ij} = 1$. Znajdź punkty ekstremalne wśród takich macierzy.