Praca domowa – seria I.

Zadania należy oddać do 15 marca 2012.

Zadanie 1. Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz niech K_i dla $i = 0, 2, ...$ będą zwartymi podzbiorami Ω przy czym $K_i \subset \text{int}K_{i+1}$ oraz $\bigcup_i K_i = \Omega$. Rozważmy przestrzeń $\mathcal{H}(\Omega)$ funkcji holomorficznych na Ω z topologią zadaną przez półnormy

$$p_N(x) := \max\{|f^{(k)}(x)| : \ x \in K_N, \ k = 0, 1, ..., N\},$$

gdzie $f^{(k)}$ jest k-tą pochodną funkcji f oraz $f^{(0)} = f$.

(a) Pokazać, że p_N są półnormami dla $N = 0, 1, ...$ oraz że zadają na $\mathcal{H}(\Omega)$ metryzowalną, lokalnie wypukłą topologię.

(c) Czy operator $T : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ zadany wzorem $Tf = f'$ jest ciągły w tej topologii? Czy posiada punkt stały?

(d) Czy istnieje element $f_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ taki, że zbiór $\{T^k f : k = 1, 2, ...\}$ jest gęsty w $\mathcal{H}(\Omega)$?

Zadanie 2. Udowodnij, że w metryzowalnej przestrzeni liniowo topologicznej lokalnie wypukłej ciąg x_n jest słabo zbieżny do x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg zawiera podciąg, dla którego istnieją kombinacje wypukłe tworzące ciąg mocno zbieżny do x_0.

Definicja 1. *Niech (X, Y) – para dualna oraz $A \subset X$, $B \subset Y$. Zbiory*

$$A^p := \{y \in Y : | < x, y > | \leq 1, \ \text{dla wszystkich } x \in A\},$$
$$B^d := \{x \in X : | < x, y > | \leq 1, \ \text{dla wszystkich } y \in B\}$$

nazwiemy odpowiednio polarem *zbioru A oraz* polarem* *zbioru B.*

Zadanie 3. Niech (X, Y) będzie parą dualną. Pokazać, że jeśli $A \subset X$, to $(A^p)^d$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym, zbalansowanym, domkniętym (w topologii $\sigma(X, Y)$) zawierającym zbiór A.

Zadanie 4. Udowodnij, że $\{x \in l_2 : \ \frac{1}{2} \leq \|x\|_2 \leq 1\}$ nie jest zwarty w słabej topologii w l_2.

Zadanie 5. Niech $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ to wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$.

(a) Udowodnij, że wzór $\phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\omega_n)$ zadaje funkcjonał liniowy ciągły na $C[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ oraz udowodnij, że $\|\phi\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Udowodnij, że opisane wyżej funkcjonały o normie ≤ 1 są *słabo gęste w kuli jednostkowej w $C[0, 1]^*$