Ćwiczenia przedostatnie – gonimy grupę Julii.

Zadanie 1. Wyszukać w literaturze (Rudin, Wikipedia) definicje, potrzebne do zrobienia pozostałych zadań.

Zadanie 2. Podać kilka przykładów algebr Banacha i C^*–algebr. Zidentyfikować, czym w tych konkretnych przykładach jest inwolucja. Wystarczy ok. 4 przykłady.

Zadanie 3. Niech $T \in B(H)$. Pokazać, że $kerT^* = (ImT)^\perp$ oraz $kerT = (ImT^*)^\perp$.

Zadanie 4. Pokazać, że $L_1[0,1]$ ze splotem jest przemienną algebrą Banacha. Czy ma jedynkę? Zaproponować rozsądną nadalgebrę $L_1[0,1]$ posiadającą jedynkę.

Zadanie 5. Pokazać, że $L_1(\mathbb{R})$ ze splotem jest algebrą z inwolucją (czym jest ta inwolucja?), ale nie jest C^* algebrą.

Remark 0.1. Trzymamy się konwencji, że jeśli E jest miarą spektralną, to $E_{xy}(\omega) =< E(\omega)x, y >$.

Zadanie 6. Sprawdzić z definicji miary spektralnej (miarę spektralną oznaczamy przez E):

1. $(\phi_1, \phi_2, ...)$ – baza o.n., $A \subset \mathbb{N}$, wówczas $E(A)(x) = \sum_{i \in A} < x, \phi_i > \phi_i$,
2. $E(B)E(A)(x) = \sum_{j \in A \cap B} < x, \phi_j > \phi_j$,
3. w $L_2[0,1]$ mamy:
    - $E(\omega)f = \chi_\omega f$, gdzie χ – indykator, funkcja charakterystyczna, itd.
    - $E_{fg}(\omega) = \int_0^1 \chi_\omega(t) f(t) \bar{g}(t) dt = \int_\omega f(t)\bar{g}(t)dt$

Zadanie 7. Pokazać, że jeśli $\omega_1, ..., \omega_n$ są rozłączne to $T = \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\omega_j)$ jest operatorem unitarnym o normie $\|T\| = \max_j |\alpha_j|$

Zadanie 8. E – miara spektralna, U – operator unitarny. Pokazać, że $F = U^*EU$ też jest miarą spektralną (równość rozumiemy jako równość dla każdej ω).

Zadanie 9. [Na kartce] Pokazać, że nie jest prawdą, że jeśli $f_n \rightharpoonup f$ i $g_n \rightharpoonup g$ to $f_n g_n \rightharpoonup fg$. Co jeśli jedną ze zbieżności zamienimy na silną? Np. $f_n \to f$ i $g_n \rightharpoonup g$, czy wtedy $f_n g_n \rightharpoonup fg$?

Zadanie 10. [Na kartce] Niech $Tf = Ik * f$, gdzie $I = (1, 1, ..., 1)$, $k(s) = |s|^{-\alpha}$, dla $0 < \alpha < d$ oraz $f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ bedą dane, przy czym supp$f_0 \subset B(1)$– kula jednostkowa w $\mathbb{R}^d$. Niech ponadto

$$K = \{g \in J : g(0, x) = f_0(x)\},$$

gdzie J jest pewnym ograniczonym podzbiorem pewnej przestrzeni $X \subset \mathcal{D}'([0,t_0] \times \mathbb{R}^d)$. Dobrać w ten sposób zbiór J i czas t_0, żeby zbiór K był niepusty, żeby J był ograniczony w jakiejś normie (np. w owej przestrzeni X, którą też należy dobrać) lub jakichś półnormach i żeby odwzorowanie

$$A[g](t,x) := e^{-\int_0^t \mathrm{div}_x Tg(s,x(s))ds} f_0(x)$$

miało punkt stały w zbiorze K. Przypominam, że $x(s)$ zadane jest równaniem

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= Tf(s,x), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Może się okazać, że to zadanie jest trywialne, jak również, że jest nieprawdziwe, ale w to ostatnie wątpię. Tak, czy inaczej zadanie to wymaga pewnego wysiłku badawczego. Treść jest sformułowana luźno ponieważ tak w istocie wygląda próba udowodnienia istnienia rozwiązań równań cząstkowych. To na matematyku spoczywa trudność określenia przestrzeni, w której rozwiązania mają istnieć i przedziału czasowego. Generalnie stoi przed Państwem problem, który należy rozwiązać, wszelkimi dostępnymi środkami. Powodzenia[1].

[1] dobrym pomysłem jest poświęcić na to zadanie 20 minut. jeśli okaże się, że nie wychodzi, to pewnie warto odpuścić i nie marnować czasu.