Ćwiczenia – 26.03.2012.
Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.
Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.

Uwaga 1. Zadania 1–6 są naprawdę nietrudne i każdy może je łatwo zrobić, jeśli tylko zechce przebrnąć przez definicje.

Uwaga 2 (Wyjątkowa okazja!). Tylko teraz – za jedno zadanie otrzymasz aż 14 punktów! Każdy podpunkt zadania 7 wart jest 2 punkty. W rzeczywistości te podpunkty nie są wcale tak trudne (choć zadanie 7 samo w sobie jest jak widać złożone). Jeżeli zrobisz zadanie 7 to udowodnisz sobie, że te półtorej godziny 23 kwietnia na pewno nie poszło w las, a jednocześnie masz okazję zdobyć bardzo dużo punktów (czyli podwójny zysk).

Zadanie 1. Udowodnić *Uwagę 8* z ćwiczeń tzn. pokazać, że

1. $\Delta_j : L^p \to L^p$ jest operatorem ciągłym dla $j \geq -1$,
2. $\Delta_j \Delta_{j'} u \equiv 0$, gdy $|j - j^{'}| > 2$,
3. $\mathcal{F}(S_{j-1} u \Delta_j v) \subset 2^j \mathcal{C}$,
4. $(S_j u)\hat{}(\xi) = \chi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi)$.

Zadanie 2. Uzupełnić dowód *Stwierdzenia 9* z ćwiczeń tzn. pokazać, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy $\chi(2^{-j}\cdot)\hat{f} \to \hat{f}$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Zadanie 3. Pokazać, że $B^s_{2,2} \simeq H^s$ dla $s \in (0,1)$.

Zadanie 4. Pokazać, że przestrzeń $B^s_{p,q}$ nie zależy od wyboru ϕ i χ (oczywiście przy założeniu, że zadają one rozkład Paley'a–Littlewooda).
Wskazówka: To wynika natychmiast z Lematu 13 (tego z omikronem), więc warto zacząć od dowodu lematu.

Zadanie 5. Pokazać *Stwierdzenie 14*: Niech $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Wówczas dla wszystkich s rzeczywistych $B^s_{p_1,q_1}$ wkłada się w sposób ciągły w $B^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,q_2}$.

Zadanie 6. Udowodnić *Wniosek 19*: Przestrzeń $B^s_{p,q} \cap L_\infty$ jest algebrą oraz zachodzi nierówność

$$\|uv\|_{B^s_{p,q}} \leq C\|u\|_{L_\infty}\|v\|_{B^s_{p,q}} + \|v\|_{L_\infty}\|u\|_{B^s_{p,q}}.$$

Zadanie 7 (Każdy podpunkt za 2 punkty.)**.** Udowodnić *Twierdzenie 20*: Jeżeli $s' < s$, to dla wszystkich $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mnożenie przez ϕ jest operatorem zwartym między $B^s_{p,\infty}$ a $B^{s'}_{p,1}$.
Aby to zrobić, można postępować tak:

1. Uzasadnić, że wystarczy pokazać, że dla dowolnego ciągu (u_n) ograniczonego w $B^s_{p,\infty}$, zbieżnego do 0 w $\mathcal{S}'$ mamy $\|\phi u\|_{B^{s'}_{p,1}} \to 0$.

2. Uzasadnić, że ciąg ϕu jest ograniczony w $B^{s'}_{p,1}$.

3. Uzasadnić, że w dowodzie zbieżności $\|\phi u\|_{B^{s'}_{p,1}} \to 0$ wystarczy pokazać, że
$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_j \phi u_n\|_{L^p} = 0$$
dla wszystkich $j \geq -1$.

4. Pokazać, że to natomiast można dowodzić przy założeniu (bez utraty ogólności), że $p = 1$.

5. Dowód sprowadza się zatem do pokazania, że (pomijając analogiczny przypadek $j = -1$) dla $j \geq 0$ mamy $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_j \phi u_n\|_{L^1} = 0$. W tym celu udowodnić, że $\Delta_j \phi u_n \to 0$ punktowo.

6. Pokazać, że dobrą majorantą dla $\Delta_j \phi u_n$ jest
$$C 2^{jd} \left(\sup_n \|u_n\|_{B^s_{1,\infty}} \right) \|\tau_{-x} h(2^j \cdot) \phi\|_{B^{-s}_{\infty,1}},$$
gdzie $h(x) = (\mathcal{F}^{-1}\tilde{\phi})(-x)$, zaś $\tilde{\phi}$ jest funkcją definiującą rozkład P–L (tylda tutaj nie jest niczym magicznym - chroni nas tylko przed kolizją oznaczeń). Jej całkowalność wynika z lematu:

7. Udowodnić lemat: Niech $f, g \in \mathcal{S}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$. Wówczas odwzorowanie
$$z \mapsto \|(\tau_z f) g\|_{B^\sigma_{p,q}}$$
należy do $L^1(\mathbb{R}^d)$.