**Ćwiczenia – 26.03.2012.**

*Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.*

**Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.**

*Część z tych zadań jest oczywista, część zapewne zostanie zrobiona na wykładzie - należy zrobić te, które pozostaną.*

**Uwaga 1.** W każdym z poniższych zadań może występować inna definicja transformaty Fouriera (różnią się one stałą). Należy się domyśleć o jaką definicję transformaty chodzi (tak żeby zadanie dało się zrobić).

**Zadanie 1** (Lemat Riemanna-Lebesgue'a)**.** Udowodnij, że jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (czyli ciągła i znikająca w nieskończoności) oraz $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

**Zadanie 2.** Niech $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Udowodnić:

1. $\hat{}$ jest liniowa,
2. $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$,
3. $(\tau_h f)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}$, gdzie $\tau_h f(x) = f(x+h)$,
4. $(fe^{2\pi i h\cdot x})\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi - h)$,
5. $g(x) - \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$,
6. $(\frac{\partial f}{\partial x_j})\hat{}(\xi) = 2\pi i\xi_j \hat{f}(\xi)$, gdy $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1$
7. $(-2\pi i x_j f)\hat{}(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$, gdy $x_j f \in L_1$.

**Zadanie 3.** Pokazać, że istnieje przestrzeń liniowo topologiczna $X$ taka, że $X^*$ rozdziela punkty $X$, w której funkcje z zadania **K 4** z $h(0) = 1$ tworzą zbiór zwarty (czyli, że faktycznie możemy stosować twierdzenie Kreina-Millmana).

**Zadanie 4** (Transformata odwrotna)**.** Niech $\mathcal{S}$ – funkcje Schwartza. Pokazać, że transformata Fouriera jest ciągłym odwzorowaniem z $\mathcal{S}$ w $\mathcal{S}$ takim, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g$$

oraz

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

**Zadanie 5** (Transformata na $L_2$)**.** Niech $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Spróbować zdefiniować transformatę Fouriera dla takich funkcji (nie koniecznie całkowalnych). Pokazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}d\xi.$$

Zastanowić się (bez dowodów), czy własności z Zadania 2 przenoszą się na $L_2$.

**Zadanie 6** (Nierówność Younga)**.** Niech $f \in L_p$, $g \in L_q$ pokazać, że wówczas $f * g \in L_r$, gdzie $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ oraz

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Zadanie 7** (Nierówność Hausdorffa–Younga)**.** Niech $f \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$. Pokazać, że $\hat{f} \in L_{p'}$ oraz

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

**Zadanie 8** (Nierówność Bernsteina)**.** Niech $f$ – gładka oraz $\mathrm{supp}\hat{f} \subset B(0, \lambda R)$. Pokazać, że dla $1 \leq p \leq q \leq \infty$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{L_q} \leq C_R \lambda^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}} \|f\|_{L_p},$$

gdzie $C_R$ jest pewną stałą zależną tylko od $R$. Oczywiście $B(0, R)$ to kula w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu $R$.

**Zadanie 9.** Pokazać, że jeżeli gradient funkcji harmonicznej na $\mathbb{R}^n$, całkowalnej z kwadratem też jest całkowalny z kwadratem, to funkcja jest stała. Dowód jednolinijkowy.