Ćwiczenia 29.03.2012

Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.

Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.

Definicja 0.1. Ślad operatora $T = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* \otimes y_i$ to $tr(T) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^*(y_i)$. (O $\otimes$ należy myśleć tak, że $Tx = \sum x_i^*(x)y_i$).

Zadanie 1. $T : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ t. że $Tf(t) = \int_0^t f(s)ds$

- Czy jest to operator Hilberta-Schmidta?
- Czy jest to operator nuklearny?
- Jaki ma ślad?

Zadanie 2. Udowodnij, że operator A na przestrzeni Hilberta jest Hilberta-Schmidta $\Leftrightarrow$ A^*A jest operatorem nuklearnym.

Zadanie 3. Niech $T : X \to Y$ - nuklearny, $R : W \to X$, $S : Y \to Z$ - ograniczone. Pokaż, że:

1. RTS też jest nuklearny, $n(RTS) \leqslant ||R||n(T)||S||$,
2. Gdy $W = H_0$, $X = H_1$, $Y = H_2$, $Z = H_3$ - przestrzenie Hilberta, to RTS - jest operatorem Hilberta-Schmidta oraz $||RTS||_{HS} \leqslant ||R||\ ||T||_{HS}||S||$.

Zadanie 4. . Pokaż, że w przestrzeni lokalnie wypukłej, gdy K zwarty, to $\overline{co}(K) \subset \overline{co}(E(K))$, gdzie $E(K)$ to zbiór punktów ekstremalnych. Czy może się zdarzyć, że $\overline{co}(K)$ ma punkty ekstremalne nie należące do K?

K 5. Udowodnić, że złożenie dwóch operatorów Hilberta-Schmidta jest nuklearne.

Zadanie 5. Niech A będzie zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta H. Powszechnie[1] wiadomo, że wówczas operator A^*A jest symetrycznym operatorem zwartym, a zatem posiada przeliczalnie wiele wartości własnych, które można ustawić malejąco $\lambda_1(A^*A) \geqslant \lambda_2(A^*A) \geqslant ... \geqslant 0$. Definiujemy $s_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$. Pokazać, że

1. A jest nuklearny $\Leftrightarrow$ ciąg $\{s_i(A)\} \in l_1$,
2. A jest H-S $\Leftrightarrow$ ciąg $\{s_i(A)\} \in l_2$,
3. $\sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{\sum_i s_i(A)^2} = \|A\|_{HS}$.

[1] powszechnie przy ulicy Banacha 2

Definicja 0.2. Niech $C(S)$ - wszystkie zespolone funkcje ciągłe na zwartej przestrzeni Hausdorffa S z normą supremum oraz $A \subset C(S)$ podprzestrzeń, algebra w $C(S)$ (tzn. dla $f, g \in A$ $fg \in A$). Zbiór $A^{\perp} = \{\mu$ regularna, borelowska miara zespolona na S, $\int f d\mu = 0$ dla $f \in A\}$ nazywamy **anihilatorem** A. Definiujemy $A_E = \{f|_E : \ f \in A\}$.

Definicja 0.3. Zbiór $E \subset S$ nazywamy A-antysymetrycznym jeśli każda funkcja $f \in A$, która jest rzeczywista na E jest stała na E.

Zadanie 6. Niech $K = \{\mu \in A^{\perp} : \ ||\mu|| \leqslant 1\}$, gdzie $||\mu|| = |\mu|(S)$. Udowodnij, że jeśli A jest domkniętą podalegbrą, rozdziela punkty S, jest samosprzężona (tj. dla $f \in A$ $\overline{f} \in A$) oraz dla każdego $p \in S$ istnieje $f \in A$ taka, że $f(p) \neq 0$, to

- K jest wypukły, zbalansowany i słabo* zwarty,
- Jeśli $K \neq \{0\}$, to dla μ - punktu ekstremalnego K i E nośnika μ mamy następującą własność: jeśli $f \in A$, $f|_E$-rzeczywista, to f jest stała na E.
- Udowodnij, że jeśli $g \in C(S)$ oraz $g|_E \in A_E$, dla każdego maksymalnego zbioru antysymetrycznego E, to $g \in A$.