Ćwiczenia – 12.03.2012.

Zadania oznaczone literą K należy oddawać pisemnie. Niektóre z nich mogą być trochę trudniejsze. Pozostałe są do przemyślenia.

Przypominam, że za każde zadanie przedstawione przy tablicy jest jeden punkt.

W poniższych definicjach występuje symbol '$\|\cdot\|$', oznacza on normę na odpowiedniej przestrzeni (domyślenie się która przestrzeń jest w danym momencie odpowiednia zajmuje oczywiście 0,08 sekundy).

Definicja 1. *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami Hilberta. Powiemy, że operator liniowy $T : H_1 \to H_2$ jest operatorem Hilberta-Schmidta (H-S) jeżeli zachodzi jeden z równoważnych warunków:*

1. *istnieje baza ortonormalna $\{e_i\} \subset H_1$ taka, że $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \infty$,*
2. *dla każdej bazy ortonormalnej $\{e_i\} \subset H_1$, mamy $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \infty$,*
3. *dla każdej pary baz ortonormalnych $\{e_i\} \subset H_1$ i $\{f_i\} \subset H_2$, mamy*

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |< Te_i, f_j >|^2 < \infty$$

Ponadto $\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2}$, gdzie $\{e_i\}$ – baza ortonormalna, nazwiemy normą Hilberta-Schmidta operatora T.

Definicja 2. *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Powiemy, że operator liniowy $T : X \to Y$ jest operatorem nuklearnym wtedy i tylko wtedy, gdy można go przedstawić w postaci $T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i$ dla $x_i^* \in X^*$, $y_i \in Y$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|y_i\| \leq \infty$. Oczywiście $\otimes$ rozumiemy tak: $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) y_i$. Ponadto*

$$n(T) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|y_i\| : \ x_i^* \in X^*, \ y_i \in Y, \ T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i\}$$

nazwiemy normą nuklearną operatora T.

Definicja 3. *Powiemy, że operator jest zwarty, gdy przeprowadza zbiory ograniczone na prezwarte.*

Zadanie 1. Pokazać równoważność, o której mowa w Definicji 1. Spróbować zrozumieć te definicje. Spróbować znaleźć kilka przykładów operatorów nuklearnych, H-S i zwartych.

Zadanie 2. Pokazać, że $\|\cdot\|_{HS}$ i $n(\cdot)$ są normami oraz, że zachodzi oszacowanie $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{HS} \leq n(\cdot)$. Wywnioskować z tego, że operatory nuklearne są operatorami H-S, które zaś są operatorami ograniczonymi.

Zadanie 3. Pokazać nawet więcej, tj., że operatory H-S są zwarte.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $H = L_2(\Omega)$, gdzie Ω – otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że operator liniowy $T : H \to H$ jest H-S wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $(Tf)(s) = \int_\Omega K(s,t)f(t)dt$ dla pewnej funkcji $K \in H^2$ oraz, że $\|T\|_{HS} = \|K\|_{H^2} := \sqrt{\int_{\Omega\times\Omega} |K(s,t)|^2 dsdt}$.

Zadanie 5. Niech $T : c_0 \to l_2$ będzie dane wzorem $T((\xi_n)_{n=0}^\infty) = (\frac{1}{n}\xi_n)_{n=0}^\infty$.

1. Pokazać, że T jest zwarte.
2. Udowodnić, że $T(B_{c_0})$ nie jest domknięte (B_{c_0} – kula jednostkowa).
3. Opisz $T(B_{c_0})$ i jego punkty ekstremalne.

K 4. Znaleźć wszystkie funkcje $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}_+$, które spełniają warunek:

$$\forall_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\ h(x,y) = \frac{1}{4}(h(x+1,y+1) + h(x-1,y+1) + h(x+1,y-1) + h(x-1,y-1)).$$

Zadanie 6. Jeśli ktoś się zna na tym (np. pisze pracę licencjacką na temat operatorów nuklearnych) to może się zastanowić i zaprezentować po krótce zastosowania tej teorii.