Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Weronika Krych
Nr albumu: 171811

Toryczne przestrzenie rzutowe

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jarosława Wiśniewskiego

Maj 2002

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą:

Spis treści

Streszczenie: Definiujemy toryczne przestrzenie rzutowe. Wprowadzmy pojęcie grupy podstawowej w kowymiarze 1 i nakrycia uniwersalnego w kowymiarze 1 w celu wyróżnienia wśród nich podklasy ważonych przestrzeni rzutowych, które są dokładnie nakryciami uniwersalnymi w kowymiarze 1 dla torycznych przestrzeni rzutowych.

Słowa kluczowe: krata, stożek, wachlarz, rozmaitość toryczna, duży torus, orbita, grupa podstawowa w kowymiarze 1, nakrycie w kowymiarze 1, ważona przestrzeń rzutowa, toryczna przestrzeń rzutowa.

Klasyfikacja tematyczna wg AMS Math. Subj. Class 2000 podstawowa: 14M25, drugorzędna: 14F35, 14L30.

1 Wstęp

Miles Reid w swojej przełomowej pracy ([Reid]), która rozwija teorię Mori w świecie rozmaitości torycznych, formułuje następujący wynik (wniosek 2.5 o ściągnięciu promieni ekstremalnych):

Twierdzenie 1.1 *Jeśli Δ jest zupełnym, symplicjalnym wachlarzem, R promieniem ekstremalnym stożka $NE(X(\Delta))$ to istnieje odwzorowanie toryczne $\varphi_R : X \to Y = X(\Delta^*)$, które jest elementarnym ściągnięciem w sensie teorii Mori tzn. $\varphi_R(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ i dla nieprzywiedlnej krzywej $C \subset X$ zachodzi $\varphi_R(C) = punkt \Leftrightarrow C \in R$. Dodatkowo, jeśli*

$$\begin{array}{rccc} & A & \to & B \\ & \cap & & \cap \\ \varphi_R : & X & \to & Y \end{array}$$

są częścią, na której φ_R nie jest izomorfizmem, to A i B są nieredukowalnymi, domkniętymi torycznymi stratami,(...),oraz $\varphi_R : A \to B$ jest płaskim morfizmem, którego wszystkie włókna są ***ważonymi przestrzeniami rzutowymi****.*

Jednak, jeśli przyjąć powszechnie przyjętą definicję ważonych przestrzeni rzutowych, ostatnie zdanie nie jest prawdziwe. W swoim dowodzie Reid opisuje jak mogą wyglądać wachlarze włókien takiego ściągnięcia i nazywa je ważonymi przestrzeniami rzutowymi, mimo, że - jak pokażemy - mogą być to nie tylko ważone przestrzenie rzutowe.

W niniejszej pracy wprowadzamy pojęcie torycznej przestrzeni rzutowej, jako klasę rozmaitości torycznych opisanych w dowodzie Reida. Następnie zauważamy, że ważone przestrzenie rzutowe tworzą jej podklasę i chcemy zrozumieć co odróżnia ważone przestrzenie rzutowe od pozostałych torycznych przestrzeni rzutowych. W tym celu wprowadzamy grupę podstawową w kowymiarze 1. Okazuje się, że toryczna przestrzeń rzutowa jest ważoną przestrzenią rzutową wtedy i tylko wtedy gdy ma trywialną grupę podstawową w kowymiarze 1.

Równolegle wprowadzamy pojęcie nakrycia w kowymiarze 1 i pokazujemy, że każda toryczna przestrzeń rzutowa ma jednoznacznie wyznaczone nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1, które jest ważoną przestrzenią rzutową.

Na koniec uzyskane wyniki używamy do opisania wszystkich możliwości na algebraiczne działanie grupy cyklicznej na $\mathbb{P}^2$, które jest wolne poza skończoną liczbą punktów. Dowodzimy, że przestrzeń ilorazowa takiego działania jest zawsze toryczną przestrzenią rzutową.

2 Notacja i podstawowe definicje

W tej części przypomnimy notację i podstawowe definicje obiektów w kategorii torycznej. Większość oznaczeń jest zgodna z książką [Fu]. W całej pracy, jeśli nie powiemy inaczej, przez rozmaitość będziemy rozumieć rozmaitość algebraiczną zdefiniowaną nad ciałem liczb zespolonych.

Krata jednoparametrowych podgrup torusa to $\mathbb{Z}^n$, zwykle oznaczana przez N.
Wektor prymitywny w kracie to taki, że żadna jego całkowita podwielokrotność nie jest w kracie: $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \frac{v}{n} \notin N$.
Krata charakterów to krata dualna do kraty N, tzn. krata $\mathrm{Hom}(N, Z)$ funkcjonałów o wartościach całkowitych; oznaczana przez M.
Stożek to wymierny, ściśle wypukły, wielościenny stożek, czyli podzbiór $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ taki, że

- istnieją $v_1, \ldots, v_k$ wektory z kraty N takie, że każdy punkt $x \in \sigma$ zapisuje się jako $\sum a_i v_i$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$
- nie zawiera żadnej przestrzeni liniowej, tzn. $\sigma \cap (-\sigma) = 0$.

Takie σ oznaczamy także przez $\mathrm{cone}(v_1, \ldots, v_k)$.
Stożek dualny do stożka σ to stożek $\sigma^\vee = \{v \in M_{\mathbb{R}} = N^*_{\mathbb{R}} : \forall x \in \sigma \ v(x) \geqslant 0\}$
Półgrupa $\mathbf{S}_\sigma$ związana ze stożkiem σ to $\sigma^\vee \cap M$ z dodawaniem odziedziczonym z kraty M.
Algebra $\mathbf{A}_\sigma$ związana ze stożkiem σ to algebra wielomianów, której jednomiany utożsamiamy z elementami półgrupy S_σ, z przemianowaniem działania addytywnego

na multyplikatywne, tzn. $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$.
Rozmaitość afiniczna U_σ związana ze stożkiem σ, to $U_\sigma = \operatorname{Spec} A_\sigma$.

Opis kolejnych kroków konstrukcji rozmaitości afinicznej U_σ można znaleźć w [Fu, §1.2 i 1.3]
Wachlarz Δ w kracie N to zbiór stożków w $N_\mathbb{R}$ zamknięty na ściany i przecinanie, dokładniej, spełniający następujące warunki:

- jeśli stożek $\sigma \in \Delta$ to także wszystkie jego ściany należą do Δ
- jeśli stożki $\sigma, \tau \in \Delta$ to $\sigma \cap \tau \in \Delta$

FAKT [Oda, tw 1.3]. Jeśli τ jest ścianą σ to włożenie $\tau \hookrightarrow \sigma$ indukuje włożenie $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$ na podzbiór otwarty.

Rozmaitość toryczna to rozmaitość zdefiniowana przez wachlarz Δ w następujący sposób: $X(\Delta) = \coprod_{\sigma\in\Delta} U_\sigma / \sim$, gdzie $\sim$ oznacza utożsamienie podzbiorów otwartych odpowiadających wspólnym ścianom.

FAKT [Fu, §1.4 str 21 oraz §2.1, str 29]. Tak zdefiniowana rozmaitość toryczna jest separowanlna i normalna.

Dla skrócenia zapisu, wprowadzimy dodatkową notację:
$\Delta(\sigma)$ = wachlarz składający się ze stożka σ oraz wszystkich jego ścian
$\Delta(1)$ = jednowymiarowy szkielet wachlarza $\Delta = \{\sigma \in \Delta : \dim \sigma = 1\}$
$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_n)$ = otoczka wypukła = $\{\sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i \ : \ \sum_{i=1}^n t_i = 1, \ \ t_i \geqslant)\}$

Uwaga. Zwykle, jeśli stożek σ jest jednowymiarowy w $N_\mathbb{R}$, to będziemy go utożsamiać z wektorem prymitywnym generującym $\sigma \cap N$.

Niech Δ i Δ' będą wachlarzami odpowiednio w $N_\mathbb{R}$ i w $N'_\mathbb{R}$.
Odwzorowaniem wachlarzy nazywamy homomorfizmu krat $\varphi : N' \to N$, przy którym

$$\forall_{\sigma\in\Delta} \ \ \exists_{\sigma'\in\Delta'} \quad \varphi(\sigma) \subset \sigma'.$$

Będziemy je oznaczać także przez $\varphi : \Delta' \to \Delta$. Przypominamy, że z każdym odwzorowaniem wachlarzy związane są kolejno odwzorowania: krat charakterów, półgrup S_σ, algebr A_σ i wreszcie rozmaitości afinicznych U_σ stanowiących pokrycie $X(\Delta')$ i $X(\Delta)$.

Odwzorowania w kategorii torycznej to odwzorowanie pochodzące od odwzorowania wachlarzy.

Umowa. Jeśli $\varphi : N' \to N$, $\varphi : \Delta' \to \Delta$ jest odwzorowaniem wachlarzy, to odpowiadające mu odwzorowanie rozmaitości torycznych też będziemy oznaczać przez φ.

FAKT. Na rozmaitości torycznej $X(\Delta)$ mamy działanie dużego torusa $T_N \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$. Ponadto każdemu k-wymiarowemu stożkowi σ odpowiada $n-k$ wymiarowa orbita $\mathcal{O}_\sigma \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ ([Fu, §3.1]), na której torus $(\sigma + (-\sigma)) \cap N \otimes \mathbb{C}^*$ działa trywialnie.

Jednoparametrowa podgrupa torusa $\lambda_v : \mathbb{C}^* \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ związana z wektorem $v \in N$ wkłada się w duży torus następująco: $\lambda_v(t) = (t^{v_1}, \ldots, t^{v_n})$

Strata toryczne to domknięcia orbit: domknięcie orbity $\mathcal{O}_\sigma$ oznaczamy przez $V(\sigma)$.

3 π_1^1 czyli grupa podstawowa w kowymiarze 1

W tej części pracy wprowadzamy pojęcie grupy podstawowej w kowymiarze 1, dowodzimy jej podstawowych własności.

Definicja 3.1 *Dla nieprzywiedlnej zespolonej rozmaitości algebraicznej X definiujemy **grupę podstawową w kowymiarze 1** jako granicę odwrotną:*

$$\pi_1^1(X) = \varprojlim_{U \subset X} \pi_1(U)$$

gdzie U przebiega po otwartych, niepustych, algebraicznych podzbiorach X takich, że $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}(X \backslash U) \geqslant 2$

Uwaga. Przestrzeń X nazwiemy jednospójną w kowymiarze 1, jeśli $\pi_1^1(X) = 1$.

Uwaga. Wybór punktu bazowego nie ma znaczenia dla naszych rozważań, gdyż wszystkie obiekty, których grupę podstawową liczymy są łukowo spójne.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie, które ułatwi nam policzenie grupy π_1^1 dla konkretnych przestrzeni.

Twierdzenie 3.2 *Jeśli V jest domkniętą podrozmaitością gładkiej rozmaitości X kowymiaru zespolonego co najmniej* 2 *(*$\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} V \geqslant 2$*), to* $\pi_1(X) = \pi_1(X \backslash V)$.

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że V jest gładkie. Przez chwilę rozmaitość będzie oznaczać gładką, tzn. $\mathbb{C}^\infty$, rozmaitość wyposażoną w metrykę Riemanna ρ.

Skorzystamy z następujących trzech faktów. Wszystkie trzy pochodzą z książki [DNF] i są to odpowiednio twierdzenia [DNF, III.2.§10 tw 1], [DNF, III.3.§12 tw 1], [DNF, III.2.§10 tw 3]:

Twierdzenie 3.3 (Aproksymacja przekształceniem gładkim) *Jeśli Y rozmaitością zwartą, $f : Y \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym, to można je aproksymować gładkim z dowolną dokładnością, tzn. $\forall \varepsilon > 0$ istnieje gładkie odwzorowanie $g : Y \to X$ takie, że $\rho(f, g) < \varepsilon$.*

Twierdzenie 3.4 (Przekształcenia bliskie są homotopijne) *Jeśli Y i X są gładkimi, zwartymi rozmaitościami, zaś $f, g : Y \to X$ odwzorowaniami ciągłymi, to isnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że jeśli $\rho(f, g) < \varepsilon$ to f i g są homotopijne.*

Uwaga. Skorzystamy z pozornie mocniejszej wersji tego twierdzenia: zamiast zwartości X będziemy zakładać jedynie jego lokalną zwartość.

Twierdzenie 3.5 (O transwersalności) *Niech Y, X będą gładkimi rozmaitościami, $V \subset X$ gładką domkniętą podrozmaitością. Jeśli $f : Y \to X$ jest gładkie, to w dowolnym jego otoczniu znajdziemy $g : Y \to X$, które jest transwersalne do V.*

Dowód twierdzenia 3.2. Pokażemy, że włożenie $X \backslash V \hookrightarrow X$ indukuje izomorfizm grup podstawowych. Popatrzmy na odpowiedni fragment ciągu dokładnego homotopii pary $(X, X \backslash V)$:

$$\pi_2(X, X\backslash V) \to \pi_1(X\backslash V) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X, X\backslash V)$$

Pokażemy, że $\pi_2(X, X\backslash V) = \pi_1(X, X\backslash V) = 1$.
Weźmy dowolny element $\pi_2(X, X\backslash V)$ czyli odwzorowanie ciągłe par $\omega : (S^2, x_0) \to (X, X\backslash V)$.
Zauważmy, że skoro $X\backslash V$ jest otwarty, to odwzorowania dostatecznie bliskie ω są odwzorowaniami par $(S^2, x_0) \to (X, X\backslash V)$ i są homotopijne z ω (twierdzenie 3.4). Wobec twierdzenia 3.3 o aproksymacji możemy założyć, że ω jest gładkie. Następnie, używając twierdzenia o transwersalności, że ω jest transwersalne do V. Ponieważ suma wymiarów S^2 i V (nad $\mathbb{R}$) jest ostro mniejsza od wymiaru X to transwersalność oznacza, że obraz ω jest rozłączny z V, czyli $\omega : (S^2, x_0) \to (X\backslash V, X\backslash V)$. Pokazaliśmy, że ω jest elementem neutralnym w $\pi_2(X, X\backslash V)$.
Dokładnie ten sam argument pokazuje, że $\pi_1(X, X\backslash V) = 1$.

$\square$

Uwaga. W dodatku przytaczamy definicje i twierdzenia potrzebne do dowodu twierdzenia 3.2 bez założenia gładkości V. Dowód w tej ogólniejszej sytuacji przebiega tak samo, tylko w ostatnim kroku korzystamy z ogólniejszego twierdzenia o transwersalności.

Wracamy do konwencji, że rozmaitość oznacza rozmaitość algebraiczną i wyciągniemy użyteczne dla nas wnioski z powyższego twierdzenia.

Wniosek 3.6 *Jeśli X jest rozmaitością gładką, to $\pi_1^1(X) = \pi_1(X)$.*

Dowód. W twierdzeniu 3.2 pokazaliśmy, że $\pi_1(X) = \pi_1(X \backslash V)$ dla V kowymiaru co najmniej 2. Z definicji

$$\pi_1^1(X) = \varprojlim_{V \subset X} \pi_1(X \backslash V) = \varprojlim_{V \subset X} \pi_1(X) = \pi_1(X)$$

$\square$

Fakt [Sz, II.§5 tw 3]. Każda rozmaitość normalna X jest gładka w kowymiarze 1, tzn. $\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(X)) \geqslant 2$.

Wniosek 3.7 *Jeśli X jest rozmaitością normalną, $\operatorname{Sing}(X)$ zbiorem jej punktów osobliwych, $X_0 := X \backslash \operatorname{Sing}(X)$ zbiorem punktów gładkich to $\pi_1^1(X) = \pi_1(X_0)$.*

Dowód. Z dowodu twierdzenia 3.2 wnioskujemy, że $\pi_1(X_0) = \pi_1(X_0 \backslash V)$ dla $V \subset X$ kowymiaru co najmniej 2, a zatem w definicji π_1^1 granica odwrotna realizuje się na zbiorze X_0.

$\square$

Mumford ([M]) w celu badania natury punktów osobliwych na normalnych powierzchniach zespolonych wprowadził lokalną grupę podstawową, która oznacza granicę prostą po nakłutych otoczeniach (w klasycznej topologii):

$$\pi_x = \varprojlim_{U \ni x} \pi_1(U \backslash \{x\})$$

W przypadku powierzchni nasza grupa podstawowa w kowymiarze 1, jest zdefiniowana analogicznie w kategorii algebraicznej, tzn. zbiory U są otwarte w sensie topologii Zariskiego.
Mumford udowodnił, że osobliwości powierzchni normalnych są charakteryzowane przez tę lokalną grupę podstawową. Dokładniej [M, roz. III]:

Twierdzenie 3.8 (Mumford) *Jeśli (X,x) jest normalną zespoloną osobliwością i $\pi_x(X) = 0$ to x jest punktem gładkim.*

Nietrudno zobaczyć, że ważona płaszczyzna rzutowa ma najczęściej 3 punkty osobliwe ([Dim]). Okaże się ważona przestrzeń rzutowa jest zawsze jednospójna w kowymiarze 1. Oznacza to, że w przypadku ważonych przestrzeni rzutowych nietrywialną pętlę wokół jednego punktu osobliwego można ściągnąć nie zawadzając o żaden osobliwy punkt.

Definicja 3.9 *Nakryciem w kowymiarze 1 nazywamy surjektywny, skończony morfizm* $\varphi : Y \to X$ *niezramifikowany w kowymiarze 1. Dokładniej, istnieje podrozmaitość* $V \subset X$ *taka, że:*

- $\mathrm{codim}(V) \geqslant 2$
- $\varphi\,|_{Y_1}: Y_1 \to X \backslash V$ *jest nakryciem topologicznym, gdzie* $Y_1 = \varphi^{-1}(X\backslash V)$.

Uwaga. Nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1 to odwzorowanie $Y \to X$, które jest nakryciem w kowymiarze 1, a Y jest jednospójne w kowymiarze 1 tzn. $\pi_1^1(Y) = 0$.

Lemat 3.10 *Jeśli zbiór punktów gładkich* X_0 *rozmaitości normalnej* X *ma topologiczne nakrycie uniwersalne* $p : \tilde{X}_0 \to X_0$ *takie, że* p *oraz* $\tilde{X}_0$ *są algebraiczne, to* p *rozszerza się do nakrycia uniwersalnego w kowymiarze 1.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że problem wystarczy rozwiązać dla X afinicznego (porównaj [Ii, §2.14]). Weźmy więc X spełniający nasze założenia. Mamy wtedy następujące diagramy, odpowiednio na poziomie rozmaitości i na poziomie algebr:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \uparrow \\ \tilde{X}_0 & \xrightarrow{p} & X_0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow \\ \tilde{A}_0 & \xleftarrow{p} & A_0 \end{array}$$

Chcemy znaleźć $\tilde{X}$ oraz $\tilde{A}$, które uzupełnią te diagramy. Oznaczmy przez $\tilde{K}$ ciało ułamków $\tilde{A}_0$. Położymy $\tilde{A}$ = całkowite domknięcie pierścienia $p(A)$ w $\tilde{K}$ oraz $\tilde{X} = \mathrm{Spec}\,\tilde{A}$. Wówczas włożenie $A \hookrightarrow \tilde{A}$ daje żądane rozszerzenie.

$\square$

4 Grupa π_1^1 dla rozmaitości torycznych

Teraz zajmiemy się znalezieniem opisu grupy podstawowej w kowymiarze 1 dla rozmaitości torycznych. Wszystkie dowody lematów dotyczące tych wyliczeń są wykonane na podstawie książki [Fu].

Lemat 4.1 *Niech X będzie normalną, nieprzywiedlną rozmaitością, zaś U jej dowolnym otwartym, gęstym, podzbiorem w sensie topologii Zariskiego. Wtedy włożenie $U \hookrightarrow X$ indukuje surjekcję grup podstawowych: $\pi_1(U) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$,*

Uwaga. Ten lemat jest uogólnieniem części twierdzenia 3.2 - pokazujemy tutaj, że $\pi_1(X, U) = 1$ w ciągu:

$$\pi_1(U) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \to \pi_1(X, U) \to \pi_0(U) = 1$$

Dowód lematu 4.1. Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem uniwersalnym. Obetnijmy je do przeciwobrazu zbioru U - otwartego w sensie topologii Zariskiego, tzn. popatrzmy na $p_1 : Y_1 \to U$, gdzie $Y_1 = p^{-1}(U)$. Nasza rozmaitość X jest normalna i nieprzywiedlna, a zatem jest lokalnie nieprzywiedlna jako przestrzeń analityczna, tzn. wyjęcie pozbioru mniejszego wymiaru (nad $\mathbb{C}$) nie rozspójnia spójnych podzbiorów otwartych. Zatem, ponieważ, p jest odwzorowaniem otwartym, Y_1 jest spójne. Rozpatrzmy ciągi dokładne grup homotopii rozwłóknienia [Spa, roz 7, §2, tw 10] dla nakryć p i p_1:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \pi_1(Y_1) & \stackrel{p_1^*}{\to} & \pi_1(U) & \to & \pi_0(F) & \to & \pi_0(Y_1) & = & 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \| & & \\ 1 = & \pi_1(Y) & \stackrel{p^*}{\to} & \pi_1(X) & \to & \pi_0(F) & \to & \pi_0(Y) & = & 1 \end{array}$$

Ze zwykłego argumentu "chodzeniem po diagramie" wnioskujemy, że interesujący nas homomorfizm jest surjektywny.

□

Definicja 4.2 *Niech v będzie wektorem w kracie N, zaś $\lambda_v : \mathbb{C}^* \to T_N$ jednoparametrową grupą od niego pochodzącą. Z wektorem v można związać pętlę w torusie T_N, którą będziemy też oznaczać przez λ_v. Pochodzi ona od włożenia $S^1 \simeq U(1) \hookrightarrow \mathbb{C}^*$, zadanego przez $U(1) = \{t : |t| = 1\}$ złożonego z jednoparametrową grupą λ_v.*

Wniosek 4.3 *Niech Δ będzie wachlarzem w $N_{\mathbb{R}}$. Każda pętla w $\pi_1(X(\Delta))$ jest homotopijna z algebraiczną, tzn. pochodzącą od jednoparametrowej podgrupy λ_v związanej z wektorem $v \in N$.*

Dowód. Każda rozmaitość toryczna jest normalna, nieprzywiedlna i zawiera jako gęsty, otwarty podzbiór duży torus, a zatem z twierdzenia 4.1 wynika w szczególności, że $\pi_1(T_N) \twoheadrightarrow \pi_1(X(\Delta))$, zaś $\pi_1(T_N) \simeq N$ jest oczywiście generowana przez $\lambda_{e_1}, \ldots, \lambda_{e_n}$.

□

Lemat 4.4 *Dla rozmaitości torycznej* $\pi_1^1(X(\Delta)) = \pi_1(X(\Delta(1)))$

Dowód. $X(\Delta(1))$ jest gładkim, otwartym podzbiorem $X(\Delta)$, a jego dopełnienie ma kowymiar co najmniej 2: $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}(X(\Delta)\backslash X(\Delta(1))) \geqslant 2$.

□

Lemat 4.5 *Jeśli wektor* v *leży w relatywnym wnętrzu pewnego stożka* $\sigma \in \Delta$*, to pętla* λ_v *jest ściągalna.*

Dowód. Jeśli v leży w relatywnym wnętrzu stożka $\sigma \in \Delta$ to istnieje granica $\lim_{t\to 0} \lambda_v(t) = x_\sigma$ ([Fu, §2.3]), więc odwzorowanie $\lambda_v : \mathbb{C}^* \to X(\Delta)$ rozszerza się do odwzorowania $\widetilde{\lambda_v} : \mathbb{C} \to X(\Delta)$, co oznacza, że pętla λ_v jest ściągalna.

□

Lemat 4.6 *Niech* N *będzie kratą rangi* n*,* Δ *dowolnym wachlarzem w* $N_{\mathbb{R}}$*, którego promienie są generowane przez prymitywne wektory* $v_1, \dots, v_k$*. Wtedy:*

$$\pi_1(X(\Delta(1))) = N/N'$$

gdzie $\Delta(1)$ *jest jednowymiarowym szkieletem* Δ*, zaś* $N' \subset N$ *podkratą rozpiętą przez wektory* $v_1, \dots, v_k$*.*

Dowód. Z wniosku 4.3 wiemy, że $\pi_1(X(\Delta(1)))$ jest generowane przez $\{\lambda_v : v \in N\}$, a z lematu 4.5, że ściągalne są pętle $\lambda_{v_1}, \dots, \lambda_{v_k}$. Dla każdego wektora v_i mamy izomorfizm $\mathbb{C}^* \times \ldots \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \simeq X(\mathrm{cone}(v_i))$ i przy włożniu $X(\mathrm{cone}(v_i)) \hookrightarrow X(\Delta)$ pętla λ_{v_i} jest ściągana. Zatem $\pi_1(X(\mathrm{cone}(v_i))) = N/\mathbb{Z} \cdot v_i$. Mamy więc $X(\Delta(1))$ pokryte zbiorami otwartymi $X(v_i)$, których grupy podstawowe rozpoznaliśmy. Przecięcie każdych dwóch spośród tych zbiorów jest dużym torusem. Użyjemy twierdzenia van Kampena:

$$\pi_1(X(\Delta(1))) = (\prod \pi_1(X(\mathrm{cone}(v_i))))/_\sim = (\prod(N/\mathbb{Z} \cdot v_i))/_\sim = N/N'$$

gdzie $\sim$ oznacza utożsamienie wzdłuż odwzorowania pochodzącego od włożenia $T_N \hookrightarrow X(\mathrm{cone}(v_i))$, czyli surjekcji: $N \twoheadrightarrow N/\mathbb{Z} \cdot v$.

□

Wyniki tego rozdziału podsumujemy w twierdzeniu charakteryzującym grupę podstawową w kowymiarze 1 dla rozmaitości torycznych:

Twierdzenie 4.7 (π_1^1 dla rozmaitości torycznych) *Niech* Δ *będzie wachlarzem w kracie* N*. Wtedy:*

$$\pi_1^1(X(\Delta)) = N/N'$$

gdzie N' *jest podkratą* N *generowaną przez wektory z* 1 *- wymiarowych stożków w* Δ*.*

5 Ważone przestrzenie rzutowe

Przypomnimy teraz definicję ważonej przestrzeni rzutowej i zobaczymy, że zawsze jest rozmaitością toryczną. Następnie zajmiemy się wyznaczeniem jej grupy podstawowej w kowymiarze 1.

Notacja 5.1 *Niech $v_0, \ldots, v_n$ będą wektorami prymitywnymi w kracie N rangi n takimi, że $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(v_0, \ldots, v_n))$. Przez $\Delta(v_0, \ldots, v_n)$ oznaczymy wachlarz składający się ze stożków $\sigma_i = \mathrm{cone}(v_0, .\overset{i}{\vee}., v_n)$ i wszystkich ich ścian.*

Definicja 5.2 *Niech $a_0, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Ważoną przestrzenią rzutową z wagami $(a_0, \ldots, a_n)$ nazywamy przestrzeń orbit działania $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ przy działaniu:*

$$t \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (t^{a_0} \cdot x_0, \ldots, t^{a_n} \cdot x_n)$$

i oznaczamy $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$. Klasę ważonych przestrzeni rzutowych oznaczamy przez $w\mathbb{P}$.

Uwaga. Dla dowolnej naturalnej liczby k mamy izomorfizm:

$$\mathbb{P}(ka_0, \ldots, ka_n) \simeq \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$$

i można założyć, że $NWD(a_0, \ldots, a_n) = 1$, ale nawet wtedy liczby $a_0, \ldots, a_n$ nie są wyznaczone jednoznacznie ([Fl], [Dim], [Dolg]).

Wprowadzimy teraz strukturę rozmaitości torycznej na przestrzeni $w\mathbb{P}^n$ rozpoznając, że działanie $\mathbb{C}^*$, które ją definiuje jest toryczne.

Stwierdzenie 5.3 *Na przestrzeni $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ można wprowadzić strukturę rozmaitości torycznej w następujący sposób: niech N będzie kratą w $\mathbb{R}^n$ generowana przez wektory prymitywne $v_0, \ldots, v_n$ spełniające $a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n = 0$. Wtedy*

$$X(\Delta(v_0, \ldots, v_n)) \simeq \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$$

Dowód. Oznaczmy przez Δ wachlarz $\Delta(v_0, \ldots, v_n)$. Oznaczmy przez $p : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ odwzorowanie ilorazowe z powyższej definicji. Naszym celem jest udowodnienie, że p jest toryczne.
Najpierw zobaczymy jak wygląda wachlarz dla $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. Niech N' będzie kratą rangi $n+1$ w $\mathbb{R}^{n+1}$, której standardową bazą są wektory $e_0, \ldots, e_n$. Niech Δ' będzie wachlarzem skonstruowanym podobnie jak Δ, tzn. Δ' składa się ze stożków $\mathrm{cone}(e_0, .\overset{i}{\vee}., e_n)$. To jest

właśnie wachlarz $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \simeq X(\Delta')$.
Określimy odwzorowanie toryczne $\varphi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to X(\Delta)$ na poziomie krat wzorem $\varphi(e_i) = v_i$ i pokażemy, że pokrywa się ono z p. Z definicji φ jest rzutowaniem wzdłuż wektora $(a_0, \ldots, a_n)$, co oznacza, że jego jądro jest generowane przez ten wektor i mamy ciąg dokładny:

$$0 \to \mathbb{Z} \cdot (a_0, \ldots, a_n) \to N' \to N \to 0$$

Zastosujemy teraz do tego ciągu funktor $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$, aby zobaczyć $\varphi : T_N \to T_{N'}$ na poziomie torusów. Ponieważ $\varphi : N' \to N$ jest surjektywne otrzymujemy ciąg dokładny:

$$0 \to (\mathbb{Z} \cdot (a_0, \ldots, a_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}^*) \to N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to 0$$

gdzie $\mathbb{C}^* \hookrightarrow N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ jest określone wzorem: $t \mapsto (a_0, \ldots, a_n) \otimes t$. Zatem na poziomie torusów jądrem φ jest jednoparametrowa podgrupa odpowiadająca wektorowi $(a_0, \ldots, a_n)$. Wykazaliśmy zatem, że na poziomie torusów mamy dzielenie przez żądane działanie $\mathbb{C}^*$, czyli $p\,|_{T_{N'}} = \varphi\,|_{T_{N'}}$.
Rozpatrzmy teraz n - wymiarowy stożek σ' z wachlarza Δ'. Niech σ będzie jego obrazem przy φ w wachlarzu Δ. Ponieważ $\varphi : N' \to N$ jest rzutowaniem takim, że $\varphi : \sigma' \to \sigma$ jest identycznością to $\varphi : U_{\sigma'} \to U_\sigma$ jest $\mathbb{C}^*$-wiązką. Jej włóknami są orbity działania jednoparametrowej grupy odpowiadającej wektorowi wzdłuż którego jest rzutowanie. Oznacza to, że $\varphi\,|_{U_{\sigma'}} = p\,|_{U_\sigma}$. Ostatecznie $\varphi = p$.

□

Jako uwagę pokażemy teraz, że każda ważona przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ powstaje jako iloraz $\mathbb{P}^n$ przy działaniu pewnej skończonej grupy. To odwzorowanie jest najczęsciej rozgałezione w kowymiarze 1.

Twierdzenie 5.4 *Każda ważona przestrzeń rzutowa jest przestrzenią orbit działania skończonej grupy na przestrzeni rzutowej tego samego wymiaru: jeśli* $NWD(a_0, \ldots, a_n) = 1$, *to* $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) = \mathbb{P}^n/G$, *gdzie* $G = \mathbb{Z}_{a_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{a_n}$ *działa po współrzędnych.*

Dowód. Skonstruujemy toryczne odwzorowania q i q' w następującym diagramie:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{q'} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) \end{array}$$

w którym φ jest rzutowaniem zdefiniowanym tak jak w dowodzie stwierdzenia 5.3, a φ_1 jest standardowym dzieleniem przez homotetie.
Na poziomie krat $\varphi : N' \to N$ oraz $\varphi_1 : N_1' \to N_1$ są rzutami odpowiednio wzdłuż: φ

- wektora $(a_0, \ldots, a_n)$, φ_1 - wzdłuż wektora $(1, \ldots, 1)$. Wybierzemy teraz odpowiednią bazę dla podkraty N_1' kraty N' tak, aby wektor $(1, \ldots, 1)$ kraty N_1' był wektorem $(a_0, \ldots, a_n)$ kraty N'.
Tak więc połóżmy $N_1' = \mathbb{Z}a_0e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\, a_ne_n$ i $q' : N_1' \hookrightarrow N'$ włożenie krat. Na poziomie rozmaitości q' odpowiada dzieleniu przez działanie $G = \mathbb{Z}_{a_0} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{a_n}$: niech ε_i będzie pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia a_i i generatorem $\mathbb{Z}_{a_i} \subset G$. Wtedy to działanie wygląda tak:

$$(1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, 1)(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \varepsilon_i \cdot x_i, \ldots, x_n)$$

i opuszcza się do szukanego działania na $\mathbb{P}^n$, a więc opisany diagram krat uzupełnia się do przemiennego:

$$\begin{array}{ccc} N_1' & \xrightarrow{q'} & N' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ N_1 & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Wobec tego skonstuowaliśmy odwzorowanie $q : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ zamykające wyjściowy diagram.

$\square$

Uwaga. Ponieważ liczby $a_0, \ldots, a_n$ nie są wyznaczone jednoznacznie to również omówione odwzorowania nie są wyznaczone jednoznacznie.

Ostatnie w tej częsci twierdzenie podsumuje wyniki ostatnich dwóch rozdziałów w użytecznej dla nas formie:

Twierdzenie 5.5 *Przestrzeń rzutowa z wagami $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ jest jednospójna w kowymiarze 1 tzn. $\pi_1^1(\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)) = 0$.*

Dowód. Wynika to wprost z twierdzenia 4.7, które mówi, że $\pi_1^1(X(\Delta)) = N/N'$. Dla $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ te kraty N i N' są takie same, bo krata N' jest zdefiniowana jako podkrata N rozpięta przez wektory $v_0, \ldots, v_n \in \Delta(1)$, zaś stwierdzenie 5.3 mówi, że wektory $v_0, \ldots, v_n$ rozpinają kratę N.

$\square$

6 Toryczne przestrzenie rzutowe

W tej części pracy zdefiniujemy rozmaitości toryczne, których wachlarz jest prawie taki sam jak dla ważonych przestrzeni rzutowych - tzn. taki, jaki opisuje Reid w swoim dowodzie. Dla takich wachlarzy wprowadziliśmy już notację (5.1) przy okazji definiowania ważonych przestrzeni rzutowych. Różnica między tymi dwoma klasami rozmaitości na poziomie wachlarzy i krat polega na tym, że wektory definiujące wachlarz nie muszą rozpinać kraty N.

Definicja 6.1 *Toryczną przestrzenią rzutową nazywamy $X(\Delta(v_0, \ldots, v_n))$ dla dowolnych wektorów spełniających założenia w notacji 5.1. Klasę torycznych przestrzeni rzutowych oznaczamy $t\mathbb{P}$.*

Przykład 6.2 *Klasa przestrzeni $t\mathbb{P}$ jest istotnie szersza od klasy $w\mathbb{P}$: rozpatrzmy wachlarz rozpięty przez wektory w standardowej kracie $N = \mathbb{Z}^2$:*

$$v_0 = (1, -1), \quad v_1 = (1, 2), \quad v_2 = (-2, 1)$$

Rozpinają one kratę indeksu 3 w wyjściowej kracie, a więc $X(\Delta(v_0, v_1, v_2))$ nie jest ważoną przestrzenią rzutową, ale oczywiście należy do $t\mathbb{P}$. Jak pożniej zobaczymy powstaje z $\mathbb{P}^2$ przez podzielenie przez następujące działanie $\mathbb{Z}_3$ (ε jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia 3 z 1):

$$\varepsilon \cdot (x_0,\ x_1,\ x_2) = (x_0,\ \varepsilon \cdot x_1,\ \varepsilon^2 \cdot x_1)$$

Przed sformułowaniem zasadniczego wyniku w tym rozdziale udowodnimy pomocniczy:

Lemat 6.3 *Niech $\hat{N} \subset N$ będą kratami rangi n. Niech $\hat{\Delta}$ i Δ oznaczają ten sam wachlarz rozptrywany odpowiednio w kracie $\hat{N}$ i N. Wtedy skończona grupa $G = N/\hat{N}$ działa na $X(\hat{\Delta})$ i odwzorowanie ilorazowe $\xi : X(\hat{\Delta}) \to X(\Delta)$ pochodzi od włożenia krat $\xi : \hat{N} \to N$.*

Dowód. Mamy następujący ciąg dokładny grup:

$$0 \to \hat{N} \to N \to G \to 0$$

do którego stosujemy funktor $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ i dostajemy:

$$0 \to Tor^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{C}^*) \to T_{\hat{N}} \to T_N \to G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to 0$$

Powyższy ciąg możemy przepisać jako:

$$0 \to G \to T_{\hat{N}} \to T_N \to 0$$

Zatem na torusach mamy nakrycie topologiczne z $\xi : T_{\hat{N}} \to T_N$ z grupą Galois G. Ponieważ G działa na $T_{\hat{N}}$ przez lewe przesunięcia, więc to działanie rozszerza się do działania na $X(\hat{\Delta})$. Pokażemy, że ξ jest odwzorowaniem ilorazowym. Odnotujmy najpierw, że wystarczy jeśli znajdziemy pokrycie podzbiorami afinicznymi, na których ξ jest ilorazowe.

Ustalmy $\sigma \in \Delta$. Pokażemy, że obcięcie $\xi\mid_{U_\sigma}: U_{\hat{\sigma}} \to U_\sigma$ jest ilorazowe. Działanie G na torusie $T_{\hat{N}}$ daje działanie G na algebrze torusa $A_{\hat{0}}$ i odwzorowanie $\xi : A_0 \to A_{\hat{0}}$ jest włożeniem na G - niezmienniczą podalgebrę. G, jako podgrupa torusa, działa również na algebrze $A_{\hat{\sigma}}$, więc obcięcie $\xi\mid_{A_{\hat{0}}}: A_{\hat{\sigma}} \to A_\sigma$ jest także włożeniem na G-niezmienniczą podalgebrę. Ale to oznacza, że rzeczywiście $\xi : X(\hat{\Delta}) \to X(\Delta)$ jest ilorazowe wszędzie.

□

Twierdzenie 6.4 *Dla każdej torycznej przestrzeni rzutowej $X(\Delta(v_0, \dots, v_n))$ istnieje jednoznacznie wyznaczone nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1, które jest ważoną przestrzenią rzutową $\xi : \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) \to X(\Delta(v_0, \dots, v_n))$. Ponadto liczby $a_0, \dots, a_n$ są całkowite dodatnie i spełniają warunek $\sum_{i=0}^n a_i v_i = 0$.*

Dowód. Nakrycie to pochodzi od odpowiedniego włożenia krat. Niech $\hat{N}$ będzie podkratą kraty N generowaną przez wektory $v_0, \dots, v_n$. Te wektory są liniowo zależne w N, a dodatkowo $0 \in \operatorname{conv}(v_0, \dots, v_n)$. Niech więc $a_0, \dots, a_n$ oznaczają liczby całkowite dodatnie, które realizują $\sum_{i=0}^n a_i v_i = 0$. Rozpatrzmy wachlarz $\Delta(v_0, \dots, v_n)$ w kratach $\hat{N}$ i N oznaczając go odpowiednio przez $\hat{\Delta}$ i Δ. Oczywiście $X(\hat{\Delta})$ jest ważoną przestrzenią rzutową $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$. Zgodnie z lematem 6.3 odwzorowanie $\xi : X(\hat{\Delta}) \to X(\Delta)$ pochodzące od włożenia krat jest ilorazowe i związane z działaniem grupy $N/\hat{N}$ na $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$. Pozostaje wykazać, że ξ jest nierozgałęzione w kowymiarze 1 i wobec następujących faktów:

- punkty rozgałęzienia ξ odpowiadają punktom z nietrywialną grupą izotropii działania $N/\hat{N}$
- punkty z tej samej orbity działania dużego torusa mają tę samą grupę izotropii
- każda orbita $\mathcal{O}_\tau$ zawiera się w całości w zbiorze afinicznym U_τ

ustalmy 1-wymiarowy stożek τ (czyli pewien wektor $v \in \{v_0, \dots, v_n\}$) i sprawdźmy, że $\xi\mid_{U_{\hat{\tau}}}: U_{\hat{\tau}} \to U_\tau$ jest nierozgałezione na $\mathcal{O}_\tau$ ($\hat{\tau}$ oznacza stożek τ rozpatrywany w kracie $\hat{N}$). Ponieważ v jest prymitywny w kracie N i w kracie $\hat{N}$ to $U_{\hat{\tau}} \simeq U_\tau \simeq \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ oraz $\mathcal{O}_{\hat{\tau}} \simeq \mathcal{O}_\tau \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$. Pokażemy, że można wybrać współrzędne tak, aby odwzorowanie $\xi : U_{\hat{\tau}} \to U_\tau$ było produktem identyczności i już opisanego odwzorowania na torusach:

mainowicie rozpatrzmy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z}\cdot v & \to & \hat{N} & \to & \hat{N}/\mathbb{Z}\cdot v & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}\cdot v & \to & N & \to & N/\mathbb{Z}\cdot v & \to & 0 \end{array}$$

Nietrudno jest zauważyć, że jeśli rozszczepimy górny ciąg, a następnie dolny to uzyskamy zgodne rozszczepienia. Zatem dostajemy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \to & U_{\hat{\sigma}} & \to & \mathcal{O}_{\hat{\sigma}} \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \to & U_{\sigma} & \to & \mathcal{O}_{\sigma} \end{array}$$

gdzie $\mathcal{O}_{\hat{\sigma}} \to \mathcal{O}_{\sigma}$ jest nakryciem topologicznym z grupą Galois $N/\hat{N}$. Ostatecznie ξ jest nakryciem w kowymiarze 1, a wobec twierdzenia 5.5 jest to nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1.

□

Twierdzenie 6.5 (Charakteryzacja klasy $w\mathbb{P}$ w klasie $t\mathbb{P}$) *Jeśli X jest toryczną przestrzenią rzutową to jest ważoną przestrzenią rzutową wtedy i tylko wtedy gdy jest jednospójny w kowymiarze 1. Krótko:*

$$X \in t\mathbb{P} \quad \Longrightarrow \quad (X \in w\mathbb{P} \Longleftrightarrow \pi_1^1(X) = 1)$$

Dowód. Ostatnie twierdzenie 6.4 mówi, że mamy jednoznacznie wyznaczone nakrycie uniwersalne ważoną przestrzenią rzutową, więc jest ono trywialne dokładnie w klasie ważonych przestrzeni rzutowych.

□

Wniosek 6.6 *Łącząc powyższy wynik 6.4 i twierdzenie 5.4 otrzymujemy, że dla każdej torycznej przestrzeni rzutowej X istnieje skończone odwzorowanie $\psi : \mathbb{P}^n \to X$. Nie jest ono wyznaczone jednoznacznie.*

Zanim pójdziemy dalej, zobaczmy jeszcze, że przestrzenie $t\mathbb{P}$ rzeczywiście mogą pojawić się w sytuacji opisanej przez Reida, tzn. mogą być włóknami ściągnięć odpowiadającym promieni ekstremalnym stożka $NE(X)$. Weźmy dowolną 2-wymiarową toryczną przestrzeń rzutową (przykład 6.2). Twierdzenie o stożku mówi, że promienie ekstremalne w $NE(X)$ odpowiadają stratom torycznym wymiaru 1, czyli stożkom kowymiaru 1. Weźmy więc dowolny stożek σ wymiaru 2. Ściągnięcie z nim związane ściaga krzywe równoważne z $V(\sigma)$. Przypomnijmy znany ([Fu, §3.4, str 63])) wzór na rangę grupy Picarda rozmaitości torycznej o symplicjalnym wachlarzu: $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X(\Delta)) = \#\Delta(1) - \operatorname{rk} N$, tak więc $X \in t\mathbb{P}^2 \Rightarrow \operatorname{rk}\operatorname{Pic} X = 3 - 2 = 1$ i nasze ściągnięcie prowadzi w punkt.

7 Zastosowanie - ilorazy $\mathbb{P}^2$ przez grupę cykliczną

Zilustrujemy teraz przed chwilą udowodnione twierdzenie 6.4, znajdując explicite możliwe działania grupy cyklicznej na powierzchnię $\mathbb{P}^2$, które dają nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1.
Jednak najpierw przyjrzymy się dokładniej szczególnemu przypadkowi odwzorowania torycznego pochodzącego od włożenia krat (podobnie jak w lemacie 6.3).

Lemat 7.1 (Iloraz $\mathbb{C}^{n+1}$ przez $\mathbb{Z}_r$ torycznie) *Niech ε będzie pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia r, zaś $a_0, \ldots, a_n$ nieujemnymi liczbami całkowitymi. Załóżmy podnadto, że $NWD(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Niech działanie grupy cyklicznej $\mathbb{Z}_r = \langle\varepsilon\rangle$ na $\mathbb{C}^{n+1}$ będzie zadane wzorem:*

$$\varepsilon \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (\varepsilon^{a_0} \cdot x_0, \ldots, \varepsilon^{a_n} \cdot x_n)$$

Wtedy odwzorowanie ilorazowe $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{Z}_r$ odpowiada włożeniu krat:

$$\xi \ : \ \mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n \ \hookrightarrow \ \mathbb{Z} \cdot v + (\mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n)$$

gdzie $v = \frac{1}{r}(a_0 \cdot e_0 + \ldots + a_n \cdot e_n)$, zaś na poziomie stożków ξ jest identycznością.

Dowód. Niech $\hat{N} = \mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n$ i $N = \mathbb{Z} \cdot v + \mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n$. Mamy więc ciąg dokładny:

$$0 \to \hat{N} \xrightarrow{\xi} N \to \mathbb{Z}_r \to 0$$

Z lematu 6.3 odwzorowanie $\xi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{Z}_r$ jest ilorazowe i jądrem ξ na poziomie torusów jest $\mathbb{Z}_r$. Pozostaje sprawdzić, jak $\mathbb{Z}_r$ wkłada się w $T_{\hat{N}}$. Na torusach mamy ciąg:

$$0 \to \mathbb{Z}_r \to T_{\hat{N}} \xrightarrow{\xi} T_N \to 0$$

gdzie $\xi(e_i \otimes t) = e_i \otimes t$. Przypomnijmy, że izomorfizm $T_N \simeq N \otimes \mathbb{C}^*$ jest zadany przez $(v_0, \ldots, v_n) \otimes t = (t^{v_0}, \ldots, t^{v_n})$. Zobaczmy, że w jądrze jest grupa generowana przez $(\varepsilon^{a_0}, \ldots, \varepsilon^{a_n})$:

$$\xi(\sum_{i=0}^{n} a_i e_i \otimes \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \otimes \varepsilon = b \cdot v \otimes \varepsilon = v \otimes 1 = (1^{\frac{a_0}{r}}, \ldots, 1^{\frac{a_n}{r}}) = 0$$

(w module $N \otimes \mathbb{C}^*$ stosujemy notację addytywną). Ponieważ jądrem jest Z_r to jest ono generowane przez $(\varepsilon^{a_0}, \ldots, \varepsilon^{a_n})$ i mamy żądane działanie diagonalne.

$\square$

Uwaga. W powyższym dowodzie wektor v nie jest wyznaczony jednoznacznie: biorąc inny wektor v_1 wyznaczjący tę samą kratę co v, otrzymamy to samo działanie. Krótko mówiąc, jeśli:

$$v - v_1 \in \hat{N}$$

to kraty:

$$\mathbb{Z} \cdot v_1 + (\mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n) = \mathbb{Z} \cdot v + (\mathbb{Z} \cdot e_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n)$$

są identyczne, a więc v i v_1 wyznaczają to samo odwzorowanie.

Lemat 7.2 (Kiedy $t\mathbb{P}^2$ jest nakryta $\mathbb{P}^2$ w kowymiarze 1) *Powierzchnia $t\mathbb{P}^2$ jest nakryta przez $\mathbb{P}^2$ w kowymiarze 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z przestrzenią orbit $\mathbb{Z}_r$, króre działa na $\mathbb{P}^2$ w następujący sposób:*

$$\varepsilon \cdot (z_0 : z_1 : z_2) = (z_0 : \varepsilon^{a+1} \cdot z_1 : \varepsilon^a \cdot z_2)$$

gdzie ε jest pewnym pierwiaskiem pierwotnym z 1 stopnia r, oraz

$$NWD(a, r) = NWD(a + 1, r) = 1$$

Dowód. Niech $X(\Delta) \in t\mathbb{P}^2$ oraz v_0, v_1, v_2 wektory generujące $\Delta(1)$ w kracie $\mathbb{Z}\cdot f_1 \oplus \mathbb{Z}\cdot f_2$. Stosując w razie potrzeby automorfizm kraty można założyć, że $v_0 = (1, 0)$. Ponieważ nakrywająca $X(\Delta)$ ważona przestrzeń rzutowa jest $\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1)$, to suma wektorów v_0, v_1, v_2 musi dać zero: $(1, 0) + (a, r) + (c, d) = (0, 0)$. Dostajemy wtedy: $1 + a + c = 0$ oraz $r + d = 0$. Wachlarz Δ jest zatem rozpięty przez wektory $(1, 0), (a, r), (-1 - a, -r)$. Te wektory rozpinają kratę indeksu r w wyjściowej kracie, więc na torusach mamy dzielenie przez grupę cykliczną $\mathbb{Z}_r$. Pozostaje wyliczyć jak ono wygląda we współrzędnych jednorodnych $\mathbb{P}^2$.
Znajdziemy działanie $\mathbb{Z}_r$ na $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ opuszczające się na $\mathbb{P}^2$. Popatrzmy na następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3\backslash\{0\} & \xrightarrow{/\mathbb{Z}_r} & \mathbb{C}^3\backslash\{0\}/\mathbb{Z}_r \\ \big\downarrow /\mathbb{C}^* & & \big\downarrow \mathbb{C}^* \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{/\mathbb{Z}_r} & X(\Delta) \end{array}$$

który odpowiada następującemu diagramowi krat:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}w + (\mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2) \\ \big\downarrow /(1,1,1) & & \big\downarrow /(1,1,1) \\ (\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2)/\mathbb{Z}(v_0 + v_1 + v_2) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}f_2 + (\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2))/\mathbb{Z}(v_0 + v_1 + v_2) \end{array}$$

gdzie $w = \frac{1}{r}(a_0, a_1, a_2)$. Z wcześniejszych wyliczeń wynika, że

$$f_2 = \frac{1}{r}((a+1) \cdot v_0 + a \cdot v_2)$$

a zatem można przyjąć $a_0 = 0$ i wtedy $a_1 = a + 1$, $a_2 = a$. Z lematu 7.1 działanie $\mathbb{Z}_r$ na $\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ zapisuje się we współrzędnych żądanym wzorem.

$\square$

Uwaga. Oczywiście zapis tego działania we współrzędnych nie jest jednoznaczny: można domnażać przez liczbę i wybierać inny pierwiastek pierwotny. Niejednoznaczność ta odpowiada niejednoznaczności w dowodzie 7.1. Zilustrujmy to na przykładzie. Niech $\xi = \sqrt[7]{1}$. Rozpatrzymy działanie

$$\xi \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : \xi^3 x_1 : \xi^5 x_2)$$

Podstawiając $\varepsilon = \xi^2$ otrzymujemy $\xi^3 = \varepsilon^5$ oraz $\xi^5 = \varepsilon^6$ czyli działanie:

$$\varepsilon \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : \varepsilon^5 x_1 : \varepsilon^6 x_2)$$

co na wektorach odpowiada następującej niejednoznaczności:

$$\frac{2}{7}(0, 5, 6) - \frac{1}{7}(0, 3, 5) = (0, 1, 1)$$

Jednak zawsze wolne, poza skończoną liczbą punktów działanie $\mathbb{Z}_r$, można sprowadzić do postaci jak w lemacie 7.2 w następujący sposób. Niech działanie wygląda ono tak:

$$\xi \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (\xi^b x_0 : \xi^c x_1 : x_2) = (x_0 : \xi^{c-b} x_1 : \xi^{-b} x_2)$$

gdzie $NWD(b, r) = NWD(c, r) = NWD(b-c, r) = 1$, więc jest równoważne działaniu:

$$\varepsilon \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : \varepsilon^{a+1} x_1 : \varepsilon^a x_2)$$

gdzie $\varepsilon = \xi^c$, zaś $ac = -b \mod r$.

Lemat 7.3 ***(inne spojrzenie na lemat 7.2.)*** *Jeśli grupa cykliczna $\mathbb{Z}_r$ działa algebraicznie na $\mathbb{P}^2$ w sposób wolny poza skończoną liczbą punktów to w pewnej bazie to działanie ma postać:*

$$\varepsilon \cdot (z_0 : z_1 : z_2) = (z_0 : \varepsilon^a \cdot z_1 : \varepsilon^{1+a} \cdot z_2)$$

gdzie ε jest pewnym pierwiastkiem z 1 stopnia r.

Dowód. Wszystkie algebraiczne automorfizmy $\mathbb{P}^n$ tworzą grupę $PGL(n+1)$ ([H, ćw 7.2]). W naszej sytuacji $\mathbb{Z}_r$ realizuje się jako podgrupa $PGL(3) = SL(3)/\mathbb{Z}_3$. Macierz generatora $\mathbb{Z}_r$, widzianego jako element $SL(3)$ diagonalizuje się w pewnej bazie z klatkami jednowymiarowymi, bo jest skończonego rzędu.
Jeśli teraz wybierzemy te współrzędne, które diagonalizują nasze działanie, to wobec lematu 7.2 okaże się, że to działanie jest właśnie takie jak w tezie.

$\square$

Wniosek 7.4 *Jeśli powierzchnia normalna S spełnia założenia twierdzenia 2.3 z pracy [WW] oraz $\pi_1^1(S)$ jest grupą cykliczną to S jest izomorficzna z powierzchnią typu $t\mathbb{P}^2$ z lematu 7.2.*

A Dodatek - o stratyfikacjach

Przytoczymy tu pojęcia i twierdzenia potrzebne do dowodu twierdzenia 3.2, które w silniejszej wersji mówi, że $\pi_1(X \backslash V) = \pi_1(X)$ dla gładkiego X i V algebraicznego, kowymiaru co najmniej 2, niekoniecznie gładkiego.

Definicja A.1 *Niech V będzie domkniętą podrozmaitością gładkiej rozmaitości X. Dla V istnieje stratyfikacja Whitney'a jeśli V można przedstawić jako sumę $V = \bigcup_{i \in I} S_i$, gdzie I jest zbiorem skierowanym oraz spełnione są następujące warunki:*

- S_i jest lokalnie domknięta i gładką podrozmaitością X

- jeśli $\alpha < \beta$ to para S_α, S_β spełnia warunki Whitney'a A i B: weźmy dowolny ciąg punktów $x_i \in S_\beta$ zbieżnych do punktu $y \in S_\alpha$ oraz dowolny ciąg punktów $y_i \in S_\alpha$ zbieżnego do tego samego punktu $y \in S_\alpha$ oznaczmy sieczne przez $l_i = x_i y_i$. Załóżmy, że l_i zbiegają do prostej l, zaś przestrzenie styczne $T_{x_i} S_\beta$ do przestrzeni τ, wtedy warunki Whitney'a to:

(A) $T_y S_\alpha \subset \tau$

(B) $l \subset \tau$

Twierdzenie A.2 (Stratyfikacja, [G-MP, roz.1]) *Jeśli X jest gładką rozmaitością algebraiczną, $V \subset X$ jej podrozmaitością, to istnieje stratyfikacja Whitney'a dla V.*

Twierdzenie A.3 (O transwersalności, [G-MP, roz 1.]) *Niech Y i X będą gładkimi rozmaitościami, zaś $W \subset Y$ i $V \subset X$ ich domkniętymi pozbiorami posiadającymi stratyfikację Whitney'a. Wtedy zbiór odwzorowań $f : Y \to X$, które w obcięciu do W są transwersalne do V jest otwarty i gęsty w $\mathbb{C}^\infty$-topologii Whitney'a na przestrzeni gładkich odzorowań z Y do X.*

Bibliografia

[Dim] Aleksander Dimca "Singularities and coverings of weighted complete intersections", Journal reine u. angwe. Math. 366 (1986) pp.184-193

[Dolg] Igor Dolgachev "Weighted Projective varieties", Lecture Notes in Mathematics, 956, 1981

[DNF] Dubrowin, Nowikow, Fomienko "Sowriemiennaja geometrija. Metody i priloženija", Moskwa 1986

[Fl] A.R.Iano-Fletcher "Working with weighted complete intersections"

[Ii] Shigeru Iitaka "Algebraic Geometry - an introduction to birational geometry of algebraic varieties", Springer-Verlag 1982

[Fu] Wiliam Fulton, "Introduction to toric varieties", Princeton, New Jersey 1993

[G-MP] Mark Goresky, Robert MacPherson, "Stratified Morse Theory", Springer-Verlag 1980

[H] Robin Hartshorn, "Algebraic geometry", Moskwa 1981

[M] David Mumford, "The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity", Publication Matematique, IHES (9), 1961

[Oda] Tadao Oda "Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties", Springer-Verlag 1985

[Reid] Miles Reid, "Decomposition of toric morfizms", Arithmetic and Geometry, Progres in Math., vol 36, Birhauser 1983,pp. 395-418

[Spa] Edwin Spanier, "Algebraic topology", Moskwa 1971

[Sz] Igor R. Szafarewicz, "Osnowy algiebraicieskoj geometrji", Moskwa 1972

[WW] Jan Wierzba and Jarosław A. Wiśniewski, "Small Contractions of Symplectic 4-folds", 2001