VARIÉTÉS PROJECTIVES COMPLEXES DONT L'ÉCLATÉE EN UN POINT EST DE FANO

LAURENT BONAVERO, FRÉDÉRIC CAMPANA ET JAROSŁAW A. WIŚNIEWSKI

Résumé : Nous classifions les variétés projectives complexes X pour lesquelles il existe un point a tel que l'éclatement de X en a soit une variété de Fano.

Abstract : We classify complex projective manifolds X for which there exists a point a such that the blow-up of X at a is Fano.

Introduction

La géométrie birationnelle des variétés de Fano, *i.e.* des variétés dont le fibré anti-canonique est ample, intervient de façon essentielle en théorie de Mori et le comportement des variétés de Fano par éclatements ou contractions lisses est une question naturelle (étudiée en particulier dans [Wis91]) à la suite d'une part du théorème de factorisation des applications birationnelles [Aal99] et d'autre part de l'étude torique récente menée par Sato [Sat00] (voir aussi [Cas01]). Nous démontrons dans cette Note le résultat suivant (voir aussi [Kol99] exercise V.3.7.10) :

Théorème 1. *Soit X une variété projective complexe lisse et connexe de dimension $n \geq 3$. Soient $a \in X$ et $\pi_a : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en a. Alors $\tilde{X}$ est une variété de Fano si et seulement si :*

(i) *soit X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et a est quelconque dans X,*
(ii) *soit X est isomorphe à la quadrique $\mathcal{Q}_n$ et a est quelconque dans X,*
(iii) *soit X est isomorphe à la variété V_d obtenue en éclatant $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété lisse Y de dimension $n-2$, de degré d avec $1 \leq d \leq n$ contenue dans un hyperplan H et $a \notin H$.*

Remarquons que si l'hypothèse du théorème 1 est satisfaite pour une variété X, alors X est nécéssairement une variété de Fano. Notons que le premier auteur a obtenu la version torique de ce résultat en classifiant plus généralement les variétés toriques de Fano de dimension $n \geq 3$ contenant un diviseur torique isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$ [Bon00]. En dimension trois, le théorème 1 peut se démontrer directement à l'aide de la classification des variétés de Fano de dimension trois [MM81].
Le théorème 1 a le corollaire immédiat suivant :

Date: Juin 2001, math.AG/0106047.
Mots clés : variétés de Fano, éclatements, théorie de Mori. Classification A.M.S. : 14J45, 14E30.
J.A. W. bénéficie du soutien financier du contrat 2P03A02216 du KBN Polonais.

Corollaire 1. *Soit X une variété projective complexe lisse et connexe de dimension $n \geq 3$. Soient a et b deux points distincts de X et $\pi_{a,b} : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X de centre $\{a, b\}$. Alors $\tilde{X}$ est une variété de Fano si et seulement si X est isomorphe à la quadrique $\mathcal{Q}_n$ et a et b ne sont pas sur une même droite.*

Démonstration. En effet, seule la variété V_2 du théorème 1 possède un diviseur isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$ avec fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ (donnée par la transformée stricte de l'hyperplan H) et la contraction sur un point de ce dernier est $\mathcal{Q}_n$. ■

1. Préliminaires

Si X est une variété projective, on note

$$\mathrm{N}_1(X) = \{\sum_i a_i C_i \mid a_i \in \mathbb{Q},\ C_i \text{ courbe irréductible de } X\}/\equiv$$

où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. Le cône de Mori, ou cône des courbes effectives, est le sous-cône de $\mathrm{N}_1(X)$ défini par

$$\mathrm{NE}(X) = \{Z \in \mathrm{N}_1(X) \mid Z \equiv \sum_i a_i C_i\,,\ a_i \geq 0\}.$$

Si X est non singulière de Fano, alors $\mathrm{NE}(X)$ est polyédral, engendré par des classes de courbes rationnelles. De plus, pour toute arête R de $\mathrm{NE}(X)$, il y a une contraction $\varphi_R : X \to Y$ de X sur une variété projective éventuellement singulière Y telle que les courbes irréductibles contractées par φ_R sont exactement celles dont la classe dans $\mathrm{N}_1(X)$ appartient à R.
Terminons ces préliminaires en montrant que les variétés V_d satisfont bien l'hypothèse du théorème 1, les paragraphes suivants seront consacrés à la réciproque.

Lemme 1. *Soit W_d la variété obtenue en éclatant $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété lisse Y de dimension $n-2$, de degré d contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{P}^n$ et en un point a n'appartenant pas à H. Alors W_d est de Fano si et seulement si $1 \leq d \leq n$.*

Démonstration. Reprenons les notations du théorème 1 (iii) et notons $\mu : V_d \to \mathbb{P}^n$ l'éclatement définissant V_d. Si $H' \subset V_d$ est la transformée stricte de H, le cône $\mathrm{NE}(V_d)$ est le cône fermé de $\mathrm{N}_1(V_d)$ engendré par la classe d'une fibre non triviale f de μ et d'une droite l contenue dans H'. Comme $-K_{V_d} \cdot f = 1$ et $-K_{V_d} \cdot l = n + 1 - d$, on en déduit, d'après le critère de Kleiman [Kle66], que V_d est de Fano si et seulement si $1 \leq d \leq n$, condition que l'on suppose désormais satisfaite. De là, soient $E \subset V_d$ le diviseur exceptionnel de μ et $\tilde{E} \subset W_d$ celui de π_a. Si C est une courbe de W_d non contenue dans $\tilde{E}$, écrivons $[(\pi_a)_*(C)] = \delta[l] + \beta[f]$ dans $\mathrm{NE}(V_d)$ où δ et β sont des rationnels positifs. Alors $-K_{W_d} \cdot C = (n+1)\delta - (n-1)\tilde{E} \cdot C - E \cdot ((\pi_a)_*(C))$, et comme $\tilde{E} \cdot C \leq \delta$ et $E \cdot ((\pi_a)_*(C)) \leq \delta$ par le théorème de Bezout, on en déduit que $-K_{W_d} \cdot C \geq \delta$ et à nouveau par le critère de Kleiman que W_d est de Fano. ■

2. Résultats préparatoires

Dans ce travail, si V est un espace vectoriel, $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace projectif des *droites* de V.

Lemme 2. *Soient $\tilde{X}$ une variété de Fano de dimension n et $\tilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\tilde{X}$. Alors il existe une contraction extrémale $\varphi : \tilde{X} \to X'$ d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\tilde{F}]$ avec $\tilde{F} \cdot \tilde{D} > 0$ où $\tilde{F}$ est une courbe rationnelle engendrant R.*

Démonstration. Soit $\tilde{C}$ une courbe telle que $\tilde{C} \cdot \tilde{D} > 0$. Cette courbe est numériquement combinaison linéaire à coefficients rationnels strictements positifs de courbes extrémales. L'une d'entre elles, notée $\tilde{F}$ satisfait $\tilde{F} \cdot \tilde{D} > 0$. ■

La proposition suivante précise la structure de la contraction extrémale donnée par le lemme 2.

Proposition 1. *Soient $\tilde{X}$ une variété de Fano de dimension $n \geq 3$, $\tilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\tilde{X}$ et $\varphi : \tilde{X} \to X'$ une contraction extrémale d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\tilde{F}]$ avec $\tilde{F} \cdot \tilde{D} > 0$. Soit $\tilde{d}$ le degré du fibré normal $N_{\tilde{D}/\tilde{X}}$. Si $\tilde{d} < 0$, alors $\varphi : \tilde{X} \to X'$ est de l'un des deux types suivants :*

a) *une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ donnée par $\varphi : \tilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-\tilde{d})) \to X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ avec $0 < -\tilde{d} \leq n-1$ et $\tilde{D}$ est le diviseur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$;*
b) *une contraction lisse de centre $Y' \subset X'$ lisse de codimension deux (*i.e.* X' est une variété projective lisse et $\tilde{X}$ est obtenue en éclatant X' le long de Y'). Si de plus $\tilde{d} = -1$, alors $\varphi_{|\tilde{D}} : \tilde{D} \to D' := \varphi(\tilde{D})$ est un isomorphisme, $Y' \subset D'$ est un diviseur de degré $d' + 1$ où d' est le degré du fibré normal $N_{D'/X'}$ et X' est de Fano.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que les fibres non triviales de φ sont de dimension un. En effet, si f est une fibre non triviale de φ, et si $\dim f \geq 2$, alors $\dim(f \cap \tilde{D}) \geq 1$ et l'arête R contient donc une courbe contenue dans $\tilde{D}$, ceci est absurde puisque $R \cdot \tilde{D} > 0$ alors que $\tilde{d} < 0$. Il découle d'un résultat de Ando [And85] que $\varphi : \tilde{X} \to X'$ est de l'un des trois types suivants :

(i) une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$,
(ii) une fibration en coniques (ce qui signifie qu'il y a effectivement des fibres singulières),
(iii) une contraction lisse de centre $Y' \subset X'$ lisse de codimension deux.

Dans les cas (i) et (ii), $\varphi_{|\tilde{D}} : \tilde{D} \to X'$ est finie, et comme $\tilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, il s'ensuit que $X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ d'après [Laz83].

- Dans le cas (i), soit l une droite de X' et S_l la surface réglée $S_l = \varphi^{-1}(l)$ (S_l est une surface de Hirzebruch $\mathbf{F}_a$). Comme $\tilde{d} < 0$, $\tilde{D}$ est exceptionnel dans $\tilde{X}$ donc $\tilde{D} \cap S_l$ l'est dans S_l. Il s'ensuit que $\tilde{D}$ est une section de φ et de là $\tilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-\tilde{d}))$ avec $0 < -\tilde{d} \leq n-1$ car $\tilde{X}$ est de Fano.
- Dans le cas (ii), il y a une courbe C sur l'arête R telle que $-K_{\tilde{X}} \cdot C = 1$; soit $a = \tilde{D} \cdot C$. Alors l'intersection de $\tilde{D}$ avec la fibre générique de φ vaut $2a$ et $\varphi_{|\tilde{D}} : \tilde{D} \to X'$ est de degré (topologique) égal à $2a$. Montrons que $a = 1$. En effet, si $\mathcal{E}$ désigne le fibré vectoriel de rang 3 sur X' défini par $\mathcal{E} = \varphi_*(-K_{\tilde{X}})$, il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}^*) \arrow[d, "\mu"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

Comme $\rho(\tilde{X}/X') = 1$, l'application de restriction $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X})$ est un isomorphisme et il existe donc $M \in \mathrm{Pic}(X')$ tel que $\mathcal{O}(\tilde{D}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(a)_{|\tilde{X}} \otimes \varphi^* M$. De plus, comme $\tilde{X}$ est une fibration en coniques, il existe $N \in \mathrm{Pic}(X')$ tel que $\mathcal{O}(\tilde{X}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(2) \otimes \mu^* N$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}^*))$. Si l est une droite générique de X', restreignons le diagramme précédent au-dessus de l. Comme la courbe $C_l := \tilde{D} \cap \varphi^{-1}(l)$ est exceptionnelle dans $S_l := \varphi^{-1}(l)$, le fibré $L := \mathcal{O}(\tilde{D})_{|S_l}$ vérifie $L \cdot C_l < 0$. De plus, comme $\tilde{D} \cap S_l$ est effectif, il existe une courbe C' de S_l non contenue dans une fibre de μ telle que $L \cdot C' > 0$. Le corollaire 2 ci-dessous s'applique : il existe donc un sous-fibré strict $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}^*_{|l}$ tel que $C_l \subset \mathbb{P}(\mathcal{F}')$. Il s'ensuit donc que $a = 1$.

De là, et comme il n'y a pas de morphisme régulier fini de $\mathbb{P}^{n-1}$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ de degré topologique égal à deux si $n \geq 3$ (en effet, le degré topologique est une puissance du degré algébrique d'après le théorème de Bezout), on en déduit que le cas (ii) ne peut pas se produire.

- Dans le cas (iii), notons $\tilde{E}$ le diviseur exceptionnel de φ. Comme $R \cdot \tilde{D} > 0$, chaque fibre non triviale de φ rencontre $\tilde{D}$. Puisque $\varphi_{|\tilde{E}} : \tilde{E} \to Y'$ est une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ et que $\tilde{D} \cap \tilde{E}$ est exceptionnel dans $\tilde{E}$, il s'ensuit que $\tilde{D} \cap \tilde{E}$ est une section (*a priori* non nécessairement réduite) de $\varphi_{|\tilde{E}}$. *Admettons un instant* que si $\tilde{d} = -1$, alors cette section est réduite (autrement dit, $\tilde{D}$ et $\tilde{E}$ s'intersectent transversalement). De là, $\varphi_{|\tilde{D}} : \tilde{D} \to D' := \varphi(\tilde{D})$ est un isomorphisme. Donc $Y' \subset D' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ comme diviseur de degré $d' + 1$ si $d' \geq 0$ désigne le degré du fibré normal $N_{D'/X'}$. Il s'ensuit aussi que X' est de Fano.

  Il nous reste à vérifier que si $\tilde{d} = -1$, alors $\tilde{D} \cap \tilde{E}$ est une section réduite de $\varphi_{|\tilde{E}}$. Pour cela, soit $\pi : \tilde{X} \to X$ la contraction de $\tilde{D}$ sur un point $a \in X$, où X est lisse (car $\tilde{d} = -1$). Le diviseur $E := \pi(\tilde{E})$ est de Cohen-Macaulay (car diviseur dans une variété lisse) et a comme unique singularité le point x. Comme $\dim(E) \geq 2$, il s'ensuit que E est normal (voir par exemple [Har77], pages 185-186). D'autre part, soit E' le cône obtenu en contractant la section exceptionnelle $\tilde{D} \cap \tilde{E} \subset \tilde{E}$ sur un point. Il y donc une application régulière bijective $E' \to E$ qui est donc un isomorphisme puisque E est normal. Ainsi, E est un cône et par suite, $\tilde{D}$ et $\tilde{E}$ s'intersectent transversalement.

■

Lemme 3. *Soient $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ des entiers et considérons le fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ suivant :*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i).$$

Soient $\pi_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to \mathbb{P}^1$ et $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(d) \otimes \pi_{\mathcal{F}}^* M \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{F}))$ où $d > 0$ et $M \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Soit $C \subset \mathbb{P}(\mathcal{F})$ une courbe telle que $L \cdot C < 0$. Alors

$$C \subset \mathbb{P}(\bigoplus_{i=k}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))$$

où k est le plus petit entier i dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $da_i > \deg M$.

Remarquons que $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(d) \otimes \pi_{\mathcal{F}}^* M$ est nef si et seulement si $da_n \leq \deg(M)$. L'hypothèse du lemme $L \cdot C < 0$ implique donc que l'entier k est bien défini. Si de plus, il existe une courbe C' non contenue dans une fibre de $\pi_{\mathcal{F}}$ telle que $L \cdot C' > 0$, alors $k \geq 2$ et on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ et $\pi_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to \mathbb{P}^1$. Soit $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(d) \otimes \pi_{\mathcal{F}}^* M \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{F}))$ où $d > 0$ et $M \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Si L n'est pas nef et s'il existe une courbe C' non contenue dans une fibre de $\pi_{\mathcal{F}}$ telle que $L \cdot C' > 0$, alors il existe un sous-fibré strict $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tel que toute courbe C vérifiant $L \cdot C < 0$ est contenue dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}')$.*

La démonstration du lemme 3 est laissée au lecteur.

L'idée de la démonstration du théorème 1 est simple : la proposition 1 produit une variété de Fano X'. Dans le cas b), on peut appliquer le lemme 2 à X' et D' et étudier la contraction extrémale obtenue $\psi : X' \to X''$. Le fait que X' provienne de $\tilde{X}$ va nous permettre de décrire complètement la situation. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient $\tilde{X}$ une variété de Fano de dimension $n \geq 3$, $\tilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\tilde{X}$ avec $N_{\tilde{D}/\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$. Soient $\varphi : \tilde{X} \to X'$ une contraction extrémale birationnelle d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\tilde{F}]$ avec $\tilde{F} \cdot \tilde{D} > 0$ et $\psi : X' \to X''$ une contraction extrémale d'arête $R' = \mathbb{Q}^+[F']$ avec $F' \cdot \varphi(D) > 0$. Alors $\psi : X' \to X''$ est de l'un des deux types suivants :*

a) *une application constante et $X' \simeq \mathbb{P}^n$;*
b) *une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ donnée par $\psi : X' \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d')) \to X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ avec $0 \leq d' \leq n-1$ et $D' = \varphi(D)$ est le diviseur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$.*

Démonstration. Puisque φ est birationnelle, nous sommes dans la situation b) de la proposition 1 dont nous gardons les notations : φ est une contraction lisse de centre $Y' \subset \varphi(D) = D' \subset X'$ lisse de codimension deux.

- Montrons tout d'abord que soit ψ est constante (et donc $\rho(X') = 1$), soit les fibres non triviales de ψ sont de dimension un. En effet, comme pour la proposition 1, si ψ possède une fibre de dimension au moins deux, alors l'arête R' contient une courbe rationnelle, notée C, contenue dans D'. Par conséquent, $d' > 0$ et C est une courbe très libre, donc ses déformations avec point fixé dans D' couvrent un ouvert de X', et par suite ψ est constante et $\rho(X') = 1$. Dans ce cas, il découle du lemme 4 ci-après que $X' \simeq \mathbb{P}^n$.
- Plaçons nous maintenant dans le cas où les fibres non triviales de ψ sont de dimension un. Comme précédemment, par [And85], ψ est de l'un des trois types suivants :

(i) une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$,
(ii) une fibration en coniques,
(iii) une contraction lisse de centre $Y'' \subset X''$ lisse de codimension deux.

Nous allons montrer que seul le cas (i) est possible et l'observation suivante est cruciale : *soit $C' \subset X'$ une courbe non contenue dans Y' (le centre de φ). Si $-K_{X'} \cdot C' = 1$, alors C' ne rencontre pas Y' et si $-K_{X'} \cdot C' = 2$, alors C' rencontre transversalement Y' en exactement un point.* En effet, par l'absurde, si $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ est la transformée stricte de C', alors $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = -K_{X'} \cdot C' - \tilde{E} \cdot \tilde{C} \leq 0$, ce qui contredit $\tilde{X}$ Fano.

Excluons le cas (ii) : comme l'union des fibres singulières est un diviseur de X', son intersection avec D' rencontre Y' puisque Y' est de codimension deux dans X'. Ainsi Y' rencontre l'une des fibres scindées $F' = F_1' + F_2'$ de ψ, avec $-K_{X'} \cdot F_i' = 1$, ce qui n'est pas possible d'après l'observation précédente.

Excluons de même le cas (iii) : les fibres F' non triviales de ψ vérifient $-K_{X'} \cdot F' = 1$ et rencontrent toutes D', donc certaines rencontrent Y'.

- Etudions maintenant le cas (i) : d'après [Laz83], $X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ puisque $\psi_{|D'} : D' \to X''$ est finie. Montrons que $\psi_{|D'} : D' \to X''$ est un isomorphisme, ou de façon équivalente que si F' désigne une fibre de ψ, alors $F' \cdot D' = 1$ (de là, D' est une section de ψ, et la conclusion b) s'ensuit !). Comme toutes les fibres F' de ψ vérifient $-K_{X'} \cdot F' = 2$, l'observation ci-dessus montre que les fibres de ψ rencontrant Y' le font transversalement en exactement un point. Il s'ensuit que $\psi_{|Y'} : Y' \to Y'' := \psi(Y')$ est un isomorphisme. Notons $E' := \psi^{-1}(Y'')$, alors $\psi_{|E'} : E' \to Y''$ est une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ dont Y' est une section. Si par l'absurde $F' \cdot D' > 1$, alors $F' \cap D'$ est un diviseur de D', ayant Y' comme composante mais possédant au moins une autre composante notée Z. Comme $D' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, $Z \cap Y' \neq \emptyset$ et il existe donc une fibre de ψ rencontrant Y' en plus d'un point, contradiction !

■

Lemme 4. *Soit X' une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$ contenant un diviseur $D' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$. Si $\rho(X') = 1$, alors $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et D' est un hyperplan.*

Démonstration. Puisque $\rho(X') = 1$, le diviseur D' est ample et X' est de Fano. Comme les variétés de Fano sont classifiées en dimension au plus trois où le lemme se vérifie directement, on peut supposer que $n \geq 4$. Le théorème de Lefschetz assure alors que l'application de restriction $\mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{Pic}(D') = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathcal{O}_{X'}(1)$ le générateur ample de $\mathrm{Pic}(X')$ dont la restriction à D' est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$. Soit ν l'indice de $-K_{X'}$. Par la formule d'adjonction, $-K_{X'|D'} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\nu) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(n+m)$ où m est le degré de $N_{D'/X'}$. Comme $m > 0$, il s'ensuit que $\nu \geq n+1$, d'où, d'après [KO73], $\nu = n+1$, $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et D' est un hyperplan. ■

3. Démonstration du théorème

Soit X une variété complexe de dimension $n \geq 3$ et supposons qu'il existe $a \in X$ tel que l'éclatée de X en a, notée $\tilde{X}$, soit de Fano. Notons $\tilde{D}$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\pi_a : \tilde{X} \to X$ et appliquons la proposition 1.

- Dans le cas a), $\varphi\ : \tilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) \to X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ et $\tilde{D}$ est le diviseur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$. Il s'ensuit que X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$.
- Dans le cas b), appliquons la proposition 2 et distinguons à nouveau deux cas :
  - •• Dans le cas a), $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et $\varphi\ : \tilde{X} \to X' \simeq \mathbb{P}^n$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long d'une quadrique $\mathcal{Q}_{n-2}$ contenue dans un hyperplan. Il s'ensuit que X est la quadrique $\mathcal{Q}_n$ de dimension n.
  - •• Dans le cas b), il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi_a"'] \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\psi'"] & X' \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(d')) \arrow[d, "\psi"'] \\
\mathbb{P}^n & & X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

    où μ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété Y de codimension deux dans $\mathbb{P}^n$, contenue dans un hyperplan H avec $\mu(a) \notin H$ et Y de degré $d' + 1$ dans H.

    Explicitons en détail le diagramme précédent : φ est l'éclatement de centre $Y' \subset D' = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \subset X'$ où Y' est un diviseur de D' de degré $d' + 1$. Soit $E' = \psi^{-1}(\psi(Y'))$ l'union des fibres de ψ rencontrant Y'. Alors la transformée stricte $\tilde{E}'$ de E' par φ est exceptionnelle (voir par exemple [Mar82]) et correspond à l'éclatement φ' de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ de centre $Z \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ où Z est un diviseur de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$ de degré $d' + 1$. Cette partie du diagramme est une transformation élémentaire de Maruyama [Mar82]. L'application ν est la contraction sur un point du diviseur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ et μ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ de centre $Y := \nu(\varphi'(\tilde{D} \cap \tilde{E}'))$, qui est un diviseur de degré $d' + 1$ de $H := \nu(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})) = \nu(\varphi'(\tilde{D}))$. Enfin, $a = \mu^{-1}(\nu(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))))$. Autrement dit, $X \simeq V_{d'+1}$ avec les notations du théorème.

■

Références

[Aal99] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki and J. Włodarczyk. Torification and Factorization of Birational Maps. *Preprint math.AG/9904135.*

[And85] T. Ando. On extremal rays of the higher-dimensional varieties. *Invent. Math. 81 (1985), no. 2, 347-357.*

[Bon00] L. Bonavero. Toric varieties whose blow-up at a point is Fano. *Preprint math.AG/0012229.*

[Cas01] C. Casagrande. On the birational geometry of toric Fano 4-folds. *A paraitre aux C.R.A.S., Preprint math.AG/0104210.*

[Har77] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. *Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, (1977).*

[Kle66] S.L. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. Math., II. Ser. 84, (1966), 293-344.*

[KO73] S. Kobayashi and T. Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 31-47.*

[Kol99] J. Kollár. Rational curves on algebraic varieties *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete. 3 Folge, 032, 2nd edition. Springer (1999).*

[Laz83] R. Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. *Complete intersections (Acireale, 1983), 29-61, Lecture Notes in Math., 1092, Springer, Berlin, (1984).*

[Mar82] M. Maruyama. Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles. *Algebraic geometry, Proc. int. Conf., La Rabida/Spain 1981, Lect. Notes Math. 961 (1982), 241-266.*

[MM81] S. Mori and S. Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Manuscripta Math. 36 (1981), no. 2, 147-162.*

[Sat00] H. Sato. Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties. *Tohoku Math. J. (2) 52 (2000), no. 3, 383-413.*

[Wis91] J.A. Wiśniewski. On contractions of extremal rays of Fano manifolds. *J. Reine Angew. Math. 417 (1991), 141-157.*

L.B. : *Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE.*
e-mail : bonavero@ujf-grenoble.fr

F.C. : *Institut Élie Cartan (Mathématiques), Université H. Poincaré Nancy 1, UMR 7502, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, FRANCE.*
e-mail : campana@iecn.u-nancy.fr

J.A.W. : *Instytut Matematyki UW Banacha 2, PL-02-097 Warszawa, POLOGNE.*
e-mail : jarekw@mimuw.edu.pl