**Uniwersytet Warszawski**
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Jarosław Buczyński**
Nr albumu: 176466

# Podrozmaitości legendrowskie w zespolonej przestrzeni rzutowej

**Praca magisterska**
**na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem
**prof. dr. hab. Jarosława Wiśniewskiego**
Instytut Matematyki

Maj 2003

Pracę przedkładam do oceny

Data | Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data | Podpis kierującego pracą:

## Streszczenie

Definiuję rozmaitości legendrowskie. Opisuję krzywe legendrowskie. Pokazuję związek rozm. leg. z algebrami Lie. Dowodzę, że gładkie i generowane przez kwadryki rozmaitości legendrowskie są jednorodne. Jedyne zupełne przecięcia, które są rozmaitościami legendrowskimi to podprzestrzenie liniowe.



## Słowa kluczowe

rozmaitość legendrowska, forma symplektyczna, algebry Lie, grupa symplektyczna, rozmaitości generowane przez kwadryki

## Klasyfikacja tematyczna

pierwszorzędna:
 14M99 Algebraic Geometry - Special varieties
drugorzędna:
 14E30 Algebraic Geometry - Mori theory

# Spis treści

# 1. Wstęp

Celem tej pracy jest możliwie dokładne opisanie podrozmaitości legendrowskich w nieparzystowymiarowej przestrzeni rzutowej. Pierwotnie próbowałem pokazać, że takich rozmaitości jest w pewnym sensie mało, na przykład pokazując, że jedynie mogą to być rozmaitości generowane przez kwadryki. Okazało się to być nieprawdą, jak pokazuje przykład 2.10. Taki cel był umotywowany badaniem rozmaitości kontaktowych. Ich ścisły związek z podrozmaitościami legendrowskimi w $\mathbb{P}^{2n-1}$ pokazuje [Wiśn]. Tym niemniej rozmaitości legendrowskie są czasem używane przez geometrów algebraicznych, na przykład Mukai przeprowadza klasyfikację prostych algebr Lie przez pewne wyróżnione rozmaitości legendrowskie [Muka]. Ponadto być może z argumentacji Wiśniewskiego można wyłowić dodatkowe, upraszczające założenia o tych rozmaitościach.

Głównym rezultatem tutaj przedstawionym jest twierdzenie 3.9, które mówi, że ideał opisujący podrozmaitośc legendrowską jest podalgebrą Lie w pierścieniu funkcji regularnych na odpowiedniej przestrzeni wektorowej. Z tego wynika między innymi, że zdegenerowane rozmaitości legendrowskie są stożkami nad rozmaitościami legendrowskimi mniejszego wymiaru (twierdzenie 3.16). Ponadto twierdzenie 3.9 wraz z zastosowaniem teorii zespolonych grup i algebr Lie pomaga sklasyfikować gładkie, generowane przez kwadryki rozmaitości legendrowskie: są to rozmaitości jednorodne, na których działa pewna specjalna podgrupa w $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ (twierdzenie 4.7).

Drugi ważny rezultat to twierdzenie 6.3, które mówi, że wśród rozmaitości legendrowskich nie ma zupełnych przecięć poza podprzestrzeniami liniowymi.

# 2. Forma symplektyczna i rozmaitości legendrowskie

W tym rozdziale zdefiniuję podstawowy obiekt badań tej pracy: rozmaitości legendrowskie w $\mathbb{P}^{2n-1}$. Następnie opiszę najprostsze rozmaitości legendrowskie: punkty w $\mathbb{P}^1$ oraz krzywe gładkie generowane przez kwadryki w $\mathbb{P}^3$. Zakończę ten rozdział wyjaśnieniem równania, które musi spełniać wymierna krzywa legendrowska w $\mathbb{P}^3$.

## 2.1. Podstawowe definicje

We wszystkich poniższych definicjach $V$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

**Definicja 1** ***Formą symplektyczną na przestrzeni wektorowej*** *$V$ nazywamy przekształcenie $\omega : V \times V \to \mathbb{C}$, które jest:*
*a) dwuliniowe, czyli*

$$\forall_{a\in\mathbb{C}} \quad \forall_{u,v,w\in V} \quad \begin{aligned} \omega(au,v) &= \omega(u,av) = a\omega(u,v),\\ \omega(u+v,w) &= \omega(u,w) + \omega(v,w),\\ \omega(u,v+w) &= \omega(u,v) + \omega(u,w), \end{aligned}$$

*b) antysymetryczne, czyli* $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$ *oraz*
*c) niezdegenerowane, czyli* $\forall_{v\in V}\ \exists_{w\in V}\ \omega(v,w) \neq 0$.

Jeśli w $V$ mamy wybraną bazę, to każdej formie dwuliniowej odpowiada macierz. Odtąd będę utożsamiał formę symplektyczną z jej macierzą.

Jeśli na $V$ istnieje forma symplektyczna, to wymiar $V$ jest parzysty. Od tej pory przyjmę, że $\dim V = 2n$.

**Definicja 2** *Załóżmy, że na $V$ mamy określoną formę symplektyczną $\omega$. Podprzestrzeń liniową $W \subset V$ nazywamy* ***podprzestrzenią lagranżowską****, jeśli* $\omega|_W \equiv 0$ *oraz* $\dim W = \frac{1}{2}\dim V = n$. *Podprzestrzeń lagranżowską będę oznaczał* $W \subset_L V$

Dla danej rozmaitości algebraicznej $X$ przez $X_0$ będę oznaczać rozmaitość jej punktów gładkich. Jeśli $X \subset \mathbb{P}(V)$ jest rozmaitością rzutową, to $\hat{X} \subset V$ oznacza stożek afiniczny nad $X$, tzn. rozmaitość afiniczną opisaną w $V$ tym samym ideałem co X w $\mathbb{P}(V)$. $\hat{X}_0$ oznacza gładkie punkty stożka nad X.

**Definicja 3** *Podrozmaitość $X \subset \mathbb{P}(V)$ nazywamy* ***legendrowską*** *(oznaczamy $X \subset_l \mathbb{P}(V)$) , jeśli dla każdego gładkiego punktu stożka nad X przestrzeń styczna w tym punkcie jest lagranżowska. Czyli:*

$$X \subset_l \mathbb{P}(V) \overset{def}{\iff} \forall_{x\in\hat{X}_0} T_x\hat{X}_0 \subset_L T_xV = V$$

Wymiar rozmaitości legendrowskiej w $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{2n-1}$ jest równy $n-1$.

**Przykład 2.1** *Jeśli $n = 1$, to dowolny punkt w $\mathbb{P}^1$ jest rozmaitością legendrowską.*

**Uwaga 2.2** *Rozmaitość jest legendrowska wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej nieprzywiedlna składowa jest legendrowska.*

□

**Uwaga 2.3** *Nieprzywiedlna rozmaitość $X$ jest legendrowska wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego otwartego podzbioru $U \subset \hat{X}_0$ mamy $\forall_{x\in U} T_x\hat{X}_0 \subset_L V$.*

□

**Wniosek 2.4** *$X \subset \mathbb{P}^1$ jest podrozmaitością legendrowską wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \{p_1, \ldots p_k\}$ dla pewnych $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}^1$.*

□

Uwaga 2.2 pozwala rozpatrywać wyłącznie nieprzywiedlne rozmaitości legendrowskie. W związku z tym, jeśli nie zaznaczę inaczej, będę zakładał, że $X$ jest nieprzywiedlną rozmaitością legendrowską.

**Przykład 2.5** *Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową w $V$. Wtedy*

$$W \subset_L V \iff \mathbb{P}(W) \subset_l \mathbb{P}(V).$$

## 2.2. Krzywe legendrowskie

**Przykład 2.6** *(skręcona kubika) Rozpatrzmy standardowe zanurzenie Veronese stopnia 3:* $\mathbb{P}^1 \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^3$*, określone wzorem* $\varphi(\lambda : \mu) = (\lambda^3 : \lambda^2\mu : \lambda\mu^2 : \mu^3)$*. Jeśli forma symplektyczna* $\omega$ *jest określona macierzą*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*to krzywa* $X = \varphi(\mathbb{P}^1)$ *jest legendrowska.*

**Dowód.** Weźmy punkt $x \in \hat{X}_0$, czyli $x = (\lambda_0^3, \lambda_0^2\mu_0, \lambda_0\mu_0^2, \mu_0^3)$ dla pewnych $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0,0\}$. Przestrzeń styczna do $\hat{X}_0$ w $x$ jest rozpięta przez wektory

$$v_1 := \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) = (3\lambda_0^2, 2\lambda_0\mu_0, \mu_0^2, 0)$$

$$v_2 := \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) = (0, \lambda_0^2, 2\lambda_0\mu_0, 3\mu_0^2)$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\omega(v_1, v_2) \;=\; -3 \cdot (\mu_0^2) \cdot (\lambda_0^2) \;+\; 3 \cdot (2\lambda_0\mu_0) \cdot (2\lambda_0\mu_0) \;-\; (3\lambda_0^2) \cdot (3\mu_0^2) \;=\; 0.$$

*Dygresja: Prosty rachunek pokazuje, że jeśli jakaś inna forma symplektyczna* $\tilde{\omega}$ *spełnia* $\tilde{\omega}(v_1, v_2) = 0$ *dla wszystkich* $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$*, to jest ona równa* $\omega$ *(z dokładnością do stałej), czyli* $\tilde{\omega} = \alpha\omega$ *dla pewnego* $\alpha \in \mathbb{C}^*$*.*

Zatem z dwuliniowości oraz antysymetrii $\omega$ mamy $\omega|_{T_x\hat{X}_0} \equiv 0$, czyli rzeczywiście $X \subset \mathbb{P}^3$ jest podrozmaitością legendrowską.

□

Przez $S$ będę oznaczał pierścień funkcji regularnych na V:

$$S := \mathbb{C}[V]$$

**Twierdzenie 2.7** *Niech* $X \subset \mathbb{P}^3$ *będzie krzywą legendrowską (oczywiście nieprzywiedlną). Jeśli X jest gładkie oraz generowane przez wielomiany stopni co najwyżej 2, to* $X \simeq \mathbb{P}^1$ *oraz albo X jest linią (patrz przykład 2.5), albo X jest skręconą kubiką (patrz przykład 2.6).*

**Dowód.** W tym dowodzie skorzystam z dwóch twierdzeń, które udowodnię w dalszych rozdziałach.

Niech $I := I(X) = \{f \in S : f|_{\hat{X}} = 0\}$. Ponadto niech $\{f_1, \ldots, f_k\}$ będzie minimalnym zbiorem generatorów $I$.

1. Najpierw załóżmy, że $X$ jest krzywą zdegenerowaną, czyli zawartą w pewnej płaszczyźnie (lub inaczej: istnieje takie $i$, że $\deg(f_i) = 1$). Na podstawie twierdzenia 3.16 istnieje $X' \subset \mathbb{P}^1$ takie, że $X$ jest stożkiem nad $X'$. Skoro $X$ jest nieprzywiedlne, to $X' = \{p\}$, czyli $X$ jest linią.
   W tym przypadku nie skorzystałem ani z gładkości X, ani z ograniczenia stopnia pozostałych generatorów $I$.

2. Tym razem załóżmy, że $X$ jest rozmaitością gładką oraz że dla wszystkich $i$ $\deg f_i = 2$ (w takiej sytuacji mówi się, że $X$ jest generowana przez kwadryki). Ponieważ $codim_{\mathbb{P}^3} X = 2$, to $k \geq 2$ ($k$ jest liczbą generatorów $I$). Niech $Y$ będzie rozmaitością opisaną przez $f_1$ i $f_2$, tzn.

$$Y = \{[v] \in \mathbb{P}(V) : f_i(v) = 0 \text{ dla } i = 1, 2\}.$$

Stopień $Y$ (czyli indeks przecięcia $Y$ z generyczną płaszczyzną) jest równy 4. Ponadto $X \subset Y$, więc $d := \deg X \leq \deg Y = 4$. Oczywiście też $d \geq 1$.

Gdyby $d = 4$, to $X = Y$ byłoby zupełnym przecięciem dwóch kwadryk, a jak pokazuje twierdzenie 6.3, jest to niemożliwe. Stąd $d \leq 3$.
Z drugiej strony dla krzywych w $\mathbb{P}^3$ mamy wzór:

$$g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} \tag{2.8}$$

(gdzie $g$ jest genusem arytmetycznym krzywej), przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa jest zdegenerowana. (zob. [Hart, IV.3.11.1]). Podsumowując otrzymujemy:

$$0 \leq g < \frac{(d-1)(d-2)}{2} \leq 1 \tag{2.9}$$

zatem $g = 0$ oraz $d = 3$.
Skoro $X$ jest gładkie i $g = 0$, to $X \simeq \mathbb{P}^1$. Ponieważ odwzorowanie $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ jest zadane przez system liniowy $\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$, to z dokładnością do wyboru układu współrzędnych $\varphi$ jest odwzorowaniem Veronese. Czyli $X$ jest skręconą kubiką.

$\square$

Okazuje się, że w przypadku $d = 3$ w powyższym dowodzie założenie gładkości także nie jest potrzebne: $\Delta$-genus (zobacz [Fuji]) niezdegenerowanej krzywej stopnia 3 w $\mathbb{P}^3$ jest równy 0, a jak pokazuje [Fuji, thm 4.8] taka krzywa jest normalna, a zatem gładka.

**Przykład 2.10** *Dla względnie pierwszych liczb naturalnych $k$ i $l$ rozpatrzmy odwzorowanie $\varphi_{k,l} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ opisane wzorem:*

$$\varphi_{k,l}(\lambda : \mu) = (\lambda^{k+l} : \frac{k-l}{k+l} \mu^{k+l} : \lambda^l \mu^k : \lambda^k \mu^l).$$

*Oznaczmy przez $X_{k,l}$ krzywą $\varphi_{k,l}(\mathbb{P}^1)$. Wówczas jeśli forma symplektyczna jest zadana przez macierz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*to $X_{k,l}$ jest krzywą legendrowską. W szczególności dla $k = 2$ i $l = 1$ po odpowiedniej zamianie współrzędnych otrzymujemy skręconą kubikę (zobacz przykład 2.6), a dla $k = 1$ i $l = 0$ – prostą (zobacz przykład 2.5).*

Sprawdzenie, że $X_{k,l}$ jest krzywą legendrowską można przeprowadzić dokładnie tak samo, jak dla skręconej kubiki. Jednak zamiast powtarzać tamte obliczenia, zaprezentuję ogólniejsze rozumowanie, które doprowadziło do znalezienia tych krzywych legendrowskich.

Otóż rozpatrzmy krzywą wymierną $X \subset \mathbb{P}^3$, która jest domknięciem obrazu odwzorowania

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ t & \longmapsto & \big(1 : f_1(t) : f_2(t) : f_3(t)\big) \end{array}$$

dla pewnych wielomianów (niekoniecznie jednorodnych) $f_1, f_2, f_3$. Stożek $\hat{X}$ jest domknięciem zbioru $X' \subset \mathbb{C}^4$ punktów postaci $\big(\alpha, \alpha f_1(t), \alpha f_2(t), \alpha f_3(t)\big)$ dla pewnych $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$. Przestrzeń styczna w takim punkcie (o ile jest gładki) jest rozpięta przez dwa wektory:

$v_1 = \big(1, f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$ (kierunek krawędzi stożka) oraz

$v_2 = \big(0, \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t), \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t), \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}(t)\big)$ (kierunek styczny do podstawy stożka).

$X'$ jest otwartym podzbiorem $\hat{X}$, więc zgodnie z uwagą 2.3, $X$ jest legendrowskie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in \mathbb{C}$, $\omega(v_1, v_2) = 0$. Jeśli założymy, że $\omega$ ma postać taką jak w przykładzie 2.10, to:

$$\omega(v_1, v_2) = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t) + f_2(t)\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}(t) - f_3(t)\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t)$$

Czyli krzywa $X$ jest legendrowska wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany $f_1, f_2, f_3$ spełniają równanie różniczkowe:

$$\dot{f_1} = \dot{f_2} f_3 - \dot{f_3} f_2 \tag{2.11}$$

Widać, że rozwiązań tego równania jest dużo: dla dowolnych wielomianów $f_2$ i $f_3$ znajdziemy $f_1$ spełniające 2.11. W szczególności, jeśli podstawimy $f_2 := t^k$ oraz $f_3 := t^l$, to uzyskamy krzywą $X_{k,l}$ z przykładu 2.10.

To samo rozumowanie można przeprowadzić zastępując wielomiany $f_1, f_2, f_3$ przez funkcje wymierne. W ten sposób uzyskujemy:

**Twierdzenie 2.12** *Krzywa wymierna $X \subset \mathbb{P}^3$ parametryzowana przez*

$$\mathbb{P}^1 \ni \big(\lambda : \mu\big) \longrightarrow \big(\varphi_0(\lambda,\mu) : \varphi_1(\lambda,\mu) : \varphi_2(\lambda,\mu) : \varphi_3(\lambda,\mu)\big) \in \mathbb{P}^3$$

*jest legendrowska wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje wymierne $f_i(t) := \frac{\varphi_i(t,1)}{\varphi_0(t,1)}$ dla $i = 1, 2, 3$ spełniają równanie 2.11.*

$\square$

Analogicznie, rozpatrując dowolną krzywą legendrowską w $\mathbb{P}^3$ można wziąć jej analityczne współrzędne w otoczeniu dowolnego punktu. Ten sam argument pokaże, że te współrzędne również muszą spełniać równanie różniczkowe 2.11.

# 3. Algebry Lie

W tym rozdziale omówię związek algebr Lie z rozmaitościami legendrowskimi. Szczególnie silne zastosowania teorii algebr Lie pokażę dla rozmaitości generowanych przez kwadryki.

**Definicja 4** *Przestrzeń liniową $\mathfrak{w}$ wraz z działaniem $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \to \mathfrak{w}$ nazywamy **algebrą Lie**, jeśli:*

1. *odwzorowanie $[\cdot,\cdot]$ (zwane **nawiasem Lie**) jest antysymetryczne;*

2. *nawias Lie spełnia **tożsamość Jacobiego**:*

$$\big[w_1,[w_2,w_3]\big] + \big[w_2,[w_3,w_1]\big] + \big[w_3,[w_1,w_2]\big] = 0 \tag{3.1}$$

Podstawowe (a także nieco mniej podstawowe) informacje o algebrach Lie można znaleźć na przykład w [FuHa, lectures 8-25].

Podam tutaj kilka klasycznych przykładów algebr Lie, z których będę korzystał w tej pracy:

**Przykład 3.2** *Jeśli $V$ jest przestrzenią wektorową ($\dim(V) = m$), to definiuję algebrę $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}_m$ jako przestrzeń endomorfizmów $V$, z nawiasem Lie określonym wzorem*

$$[A,B] = A \circ B - B \circ A$$

.

**Przykład 3.3** *W $\mathfrak{gl}(V)$ podalgebrę endomorfizmów o śladzie 0 nazywam $\mathfrak{sl}(V)$ lub $\mathfrak{sl}_m$.*

**Przykład 3.4** *Jeśli dodatkowo na $V$ ($\dim(V) = 2n$) mam określoną formę symplektyczną $\omega : V \times V \to \mathbb{C}$, to algebrą symplektyczną $\mathfrak{sp}(V) = \mathfrak{sp}_{2n}$ będę nazywał przestrzeń endomorfizmów liniowych $A : V \to V$ takich, że*

$$\forall_{v,w\in V} \qquad \omega(Av,w) + \omega(v,Aw) = 0.$$

*Nawias Lie określamy tak, jak w poprzednich przykładach:*

$$[A,B] = A \circ B - B \circ A.$$

*Inaczej mówiąc, wybierzmy standardową dla $\omega$ bazę $e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_{2n}$ (czyli taką bazę, że $\omega(e_i,e_{i+n}) = 1$ dla $i = 1,\ldots n$ oraz $\omega(e_i,e_j) = 0$ dla $|i-j| \neq n$) i oznaczmy*

$$J := \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix}$$

*gdzie $\mathrm{Id}_n$ jest macierzą identycznościową $n \times n$. Wtedy $\omega(v,w) = v^T Jw$ oraz $\mathfrak{sp}_{2n} = \{A \in M_{2n\times 2n} : \quad A^T J + JA = 0\}$.*
*Jest jeszcze jeden sposób zinterpretowania algebry $\mathfrak{sp}_{2n}$: jest to zbiór takich macierzy, że $JA$ (lub równoważnie $AJ$) jest macierzą symetryczną.*

**Przykład 3.5** *Zamiast struktury symplektycznej mogę rozpatrzeć iloczyn skalarny, czyli dwuliniową niezdegenerowaną formę symetryczną* $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$. *Algebrę Lie macierzy* $A$ *spełniających* $\alpha(A\cdot, \cdot) + \alpha(\cdot, A\cdot) = 0$ *nazywamy* $\mathfrak{so}(V)$. *Nawias Lie w* $\mathfrak{so}$ *określamy tak samo jak w* $\mathfrak{gl}$ *i w* $\mathfrak{sp}$.

Sprawdzenie, że powyższe przykłady rzeczywiście opisują algebry Lie (czyli że nawias jest dobrze określony i spełnia tożsamość Jacobiego) można znaleźć w [FuHa, lecture 8].

Wróćmy do naszej sytuacji. Niech $\omega$ będzie formą symplektyczną na $V$. Okazuje się, że na pierścieniu wielomianów $S = \mathbb{C}[V] = \bigoplus_i Sym^i(V^*)$ można wprowadzić strukturę algebry Lie w naturalny sposób związaną z $\omega$. Oczywiście $S$ jest (nieskończeniewymiarową) przestrzenią wektorową. Brakuje więc nawiasu Lie: zdefiniujemy go dzięki strukturze symplektycznej na $V$.

Na początek zauważmy, że $\omega$ indukuje izomorfizm przestrzeni $V$ i $V^*$:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & V & \xrightarrow{\simeq} & V^* \\ & v & \longmapsto & \omega(v,\ \cdot\ ) \end{array} \tag{3.6}$$

Przez $\omega' : V^* \times V^* \to \mathbb{C}$ oznaczę przeciągnięcie formy $\omega$ przy pomocy $\phi$:

$$\omega' := (\phi^{-1})^*\omega = \omega\big(\phi^{-1}(\cdot), \phi^{-1}(\cdot)\big)$$

Natomiast $\omega'$ rozszerza się do dwuliniowego odwzorowania antysymetrycznego:

$$[\cdot,\cdot] : S \times S \to S$$

$$[f, g]\,(x) = \omega'(\mathrm{d}f_x, \mathrm{d}g_x)$$

Rzeczywiście jest to rozszerzenie $\omega'$, gdyż jeśli $\alpha, \beta \in V^* = Sym^1V^* \subset S$, to $[\alpha, \beta] = \omega'(\alpha, \beta) \in \mathbb{C} = Sym^0V^* \subset S$.

**Twierdzenie 3.7** *(przypisywane Poissonowi)* $S$ *wraz z powyżej określonym odwzorowaniem* $[\cdot,\cdot]$ *jest algebrą Lie.*

**Dowód.** Dwuliniowość $[\cdot,\cdot]$ wynika natychmiast z liniowości różniczkowania oraz z dwuliniowości $\omega$. Antysymetria wynika z antysymetrii $\omega$. Pozostaje sprawdzić tożsamość Jacobiego.

Weźmy dowolne $f, g, h \in S$. Mamy wtedy:

$$[f\cdot g,\ h](x) = \omega'\big(\mathrm{d}(f_x\cdot g_x),\ \mathrm{d}h_x\big) = \omega'\big(f(x)\cdot \mathrm{d}g_x + g(x)\cdot \mathrm{d}f_x,\ \mathrm{d}h_x\big) =$$
$$f(x)\cdot\omega'(\mathrm{d}g_x,\ \mathrm{d}h_x) + g(x)\cdot\omega'(\mathrm{d}f_x,\ \mathrm{d}h_x) = f(x)\cdot[g,\ h](x) + g(x)\cdot[f,\ h](x)$$

czyli mamy wersję formuły Leibnitza dla nawiasu w $S$

$$\begin{aligned} [f\cdot g,\ h] &= f\cdot[g,\ h] + g\cdot[f,\ h] \\ [f,\ g\cdot h] &= g\cdot[f,\ h] + h\cdot[f,\ g]\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Oczywiście drugie równanie wynika z antysymetrii lub można udowodnić je tak samo.

Teraz określmy trójliniowe odwzorowanie $\alpha : S\times S\times S \to S$ zadane wzorem:

$$\alpha(f,\ g,\ h) := \Big[f,\ [g,\ h]\Big] + \Big[g,\ [h,\ f]\Big] + \Big[h,\ [f,\ g]\Big].$$

Pozostaje pokazać, że $\alpha \equiv 0$. Aby to zrobić, korzystając z (3.8) sprawdzę jak $\alpha$ zachowuje się przy mnożeniu:

$$\begin{aligned}
&\alpha(f_1\cdot f_2,\ g,\ h) = \Big[f_1\cdot f_2,\ [g,\ h]\Big] + \Big[g,\ [h,\ f_1\cdot f_2]\Big] + \Big[h,\ [f_1\cdot f_2,\ g]\Big] = \\
&= f_1\cdot\Big[f_2,\ [g,\ h]\Big] + f_2\cdot\Big[f_1,\ [g,\ h]\Big] + \\
&\quad + \Big[g,\ f_1\cdot[h,\ f_2] + f_2\cdot[h,\ f_1]\Big] + \Big[h,\ f_1\cdot[f_2,\ g] + f_2\cdot[f_1,\ g]\Big] = \\
&= f_1\cdot\Big[f_2,\ [g,\ h]\Big] + f_2\cdot\Big[f_1,\ [g,\ h]\Big] + \\
&\quad + \Big[g,\ f_1\cdot[h,\ f_2]\Big] + \Big[g,\ f_2\cdot[h,\ f_1]\Big] + \Big[h,\ f_1\cdot[f_2,\ g]\Big] + \Big[h,\ f_2\cdot[f_1,\ g]\Big] = \\
&= f_1\cdot\Big[f_2,\ [g,\ h]\Big] + f_2\cdot\Big[f_1,\ [g,\ h]\Big] + \\
&\quad + f_1\cdot\Big[g,\ [h,\ f_2]\Big] + [h,\ f_2]\cdot[g,\ f_1] + f_2\cdot\Big[g,\ [h,\ f_1]\Big] + [h,\ f_1]\cdot[g,\ f_2] + \\
&\quad + f_1\cdot\Big[h,\ [f_2,\ g]\Big] + [f_2,\ g]\cdot[h,\ f_1] + f_2\cdot\Big[h,\ [f_1,\ g]\Big] + [f_1,\ g]\cdot[h,\ f_2] = \\
&= f_1\cdot\Big[f_2,\ [g,\ h]\Big] + f_2\cdot\Big[f_1,\ [g,\ h]\Big] + f_1\cdot\Big[g,\ [h,\ f_2]\Big] + f_2\cdot\Big[g,\ [h,\ f_1]\Big] + \\
&\quad + f_1\cdot\Big[h,\ [f_2,\ g]\Big] + f_2\cdot\Big[h,\ [f_1,\ g]\Big] = \\
&= f_1\cdot\bigg(\Big[f_2,\ [g,\ h]\Big] + \Big[g,\ [h,\ f_2]\Big] + \Big[h,\ [f_2,\ g]\Big]\bigg) + \\
&\quad + f_2\cdot\bigg(\Big[f_1,\ [g,\ h]\Big] + \Big[g,\ [h,\ f_1]\Big] + \Big[h,\ [f_1,\ g]\Big]\bigg) = \\
&= f_1\cdot\alpha(f_2,\ g,\ h) + f_2\cdot\alpha(f_1,\ g,\ h).
\end{aligned}$$

Podsumowywując:

$$\alpha(f_1\cdot f_2,\ g,\ h) = f_1\cdot\alpha(f_2,\ g,\ h) + f_2\cdot\alpha(f_1,\ g,\ h).$$

Tak samo można pokazać, że

$$\alpha(f,\ g_1\cdot g_2,\ h) = g_1\cdot\alpha(f,\ g_2,\ h) + g_2\cdot\alpha(f,\ g_1,\ h)$$

$$\alpha(f,\ g,\ h_1\cdot h_2) = h_1\cdot\alpha(f,\ g,\ h_2) + h_2\cdot\alpha(f,\ g,\ h_1)$$

Ten długi rachunek posłuży mi wyłącznie, aby zauważyć, że jeśli $\alpha(f_1,g,h) = \alpha(f_2,g,h) = 0$, to $\alpha(f_1 f_2,g,h) = 0$ (i analogicznie na pozostałych współrzędnych). W związku z tym wystarczy pokazać, że $\alpha = 0$ tylko dla generatorów multyplikatywnych pierścienia $S$, czyli dla wielomianów liniowych. Ale jeśli $f, g, h$ są liniowe, to $[f,[g,h]] = 0$ (gdyż dwukrotne różniczkowanie wielomianu liniowego daje 0), więc też $\alpha(f,g,h) = 0$.

□

Fakt, iż pierścień funkcji regularnych na przestrzeni wektorowej $V$ ma strukturę algebry Lie wydaje się ciekawy sam w sobie, ale na razie nie widać, jaki to ma związek z rozmaitościami legendrowskimi. Związek ten pokazuje poniższe, kluczowe dla tej pracy twierdzenie.

**Twierdzenie 3.9** *Niech $X \subset_l \mathbb{P}(V)$ będzie rozmaitością legendrowską (niekoniecznie nieprzywiedlną). Wtedy ideał $I = I(X) \lhd S$ opisujący $X$ jest podalgebrą Lie (tzn. $f, g \in I \ \Rightarrow\ [f,g] \in I$). Odwrotnie, jeśli $X \subset \mathbb{P}(V)$ jest podrozmaitością, której każda nieprzywiedlna składowa jest wymiaru $n-1$ oraz $I = I(X)$ jest podalgebrą Lie w $S$, to $X$ jest podrozmaitością legendrowską.*

**Dowód.** Rozpatrzmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T\hat{X}_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\psi"] & TV|_{\hat{X}_0} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi", "\simeq"'] & N_{\hat{X}_0/V} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^*_{\hat{X}_0/V} \arrow[r, "j"] & T^*V|_{\hat{X}_0} \arrow[r, "q"] & T^*\hat{X}_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Wiersze powyższego diagramu są dokładne, a $\phi$ jest izomorfizmem zadanym przez $\phi(v) = \omega(v, \cdot)$ (zobacz (3.6)).

Ustalmy punkt $x \in \hat{X}_0$. Załóżmy najpierw, że $X$ jest rozmaitością legendrowską. Chcę pokazać, że złożenie $q \circ \phi \circ i$ jest zerowe. Weźmy bowiem dowolny wektor $v \in T_x\hat{X}_0$ i niech $\alpha \in T^*_x\hat{X}_0$ będzie obrazem $v$ przy tym złożeniu:

$$\alpha := q \circ \phi \circ i(v).$$

Teraz dla dowolnego $w \in T_x\hat{X}_0$ mam:

$$\alpha(w) = \omega(v, w) = 0 \text{ (z lagranżowskości } T_x\hat{X}_0)$$

Czyli rzeczywiście $q \circ (\phi \circ i) = 0$, więc z definicji jądra $q$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : T\hat{X}_0 \longrightarrow N^*_{\hat{X}_0/V}$, taki, że $j \circ \psi = \phi \circ i$. Ponieważ $\phi \circ i$ jest monomorfizmem, to również $\psi$ musi być monomorfizmem. Ale skoro ranga $T\hat{X}_0$ jest równa $n$ oraz ranga $N^*_{\hat{X}_0/V}$ też jest równa $2n - n = n$, to $\psi$ jest izomorfizmem, więc $j = \phi \circ i \circ (\psi^{-1})$ oraz

$$\omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} = j^*\omega' = (\psi^{-1})^* i^* \phi^* \omega' = (\psi^{-1})^* i^* \omega = (\psi^{-1})^* \omega|_{T\hat{X}_0} \equiv 0. \tag{3.11}$$

W ten sam sposób pokazuję, że jeśli $\dim \hat{X} = n$ oraz $\omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} \equiv 0$, to z diagramu:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N^*_{\hat{X}_0/V} \arrow[r, "j"] \arrow[d, dotted] & T^*V|_{\hat{X}_0} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\phi^{-1}", "\simeq"'] & T^*\hat{X}_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & T\hat{X}_0 \arrow[r, "i"] & TV|_{\hat{X}_0} \arrow[r, "p"] & N_{\hat{X}_0/V} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wynika, że $\omega|_{T_{\hat{X}_0}} \equiv 0$. Czyli pokazałem, że jeśli $\dim \hat{X} = n$, to:

$$\omega|_{T_{\hat{X}_0}} \equiv 0 \iff \omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} \equiv 0$$

Pozostaje sprawdzić, że $\omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I$ jest podalgebrą Lie w $S$.

Weźmy dowolny punkt $x \in \hat{X}_0$, oraz dowolne $f, g \in I$. Wtedy $\mathrm{d}f_x|_{T\hat{X}_0} \equiv 0$ (gdyż $f = 0$ na całym $\hat{X}_0$), więc $\mathrm{d}f_x \in N^*_{\hat{X}_0/V}$. Analogicznie $\mathrm{d}g_x \in N^*_{\hat{X}_0/V}$. Jeśli teraz $\omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} \equiv 0$, to

$$[f, g](x) = \omega'(\mathrm{d}f_x, \mathrm{d}g_x) = 0,$$

czyli $[f, g]|_{\hat{X}_0} = 0$, więc $[f, g]|_{\hat{X}} = 0$ (gdyż domknięcie $\hat{X}_0$ jest równe $\hat{X}$), czyli $[f, g] \in I$.

Jeśli dla odmiany $I$ jest podalgebrą Lie, to

$$\omega'(\mathrm{d}f_x, \mathrm{d}g_x) = [f, g](x) = 0.$$

Ponieważ odwzorowanie:

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & N^*_{x,\hat{X}_0/V} \\ f & \longmapsto & \mathrm{d}f_x \end{array}$$

jest epimorfizmem przestrzeni liniowej dla dowolnego $x \in \hat{X}_0$, to $\omega'|_{N^*_{\hat{X}_0/V}} \equiv 0$.

□

Dalsza część tego rozdziału oraz rozdziały 4 i 5 będą poświęcone wnioskom i zastosowaniom tego twierdzenia.

**Uwaga 3.12** *Z reguły 3.8 wynika, że sprawdzać czy ideał jest podalgebrą wystarczy na generatorach. Dokładniej, załóżmy, że $f, g, h \in I$, $s \in S$. Wtedy $[sf, g] \in I$ oraz oczywiście $[f, g + h] \in I$. Więc jeśli tylko wiemy, że $I = (f_1, f_2, \ldots f_k)$ oraz że dla dowolnych $i$, $j$ mamy $[f_i, f_j] \in I$, to $I$ jest podalgebrą Lie.*

□

Na pierścieniu $S$ mamy określoną kanoniczną gradację $S = \bigoplus_i Sym^i V^*$. Jeśli założę, że $f \in Sym^i V^*$ i $g \in Sym^j V^*$ (czyli f oraz g są wielomianami jednorodnymi stopnia odpowiednio $i$ oraz $j$), to

$$[f, g] \in Sym^{i+j-2} V^*, \tag{3.13}$$

gdyż różniczkowanie zmniejsza stopień wielomianu o 1.

**Wniosek 3.14** *(a) $Sym^2 V^*$ jest skończeniewymiarową podalgebrą Lie w $S$.*

*(b) $Sym^2 V^*$ jest izomorficzna (jako algebra Lie) z $\mathfrak{sp}(V)$ (zobacz przykład 3.4).*

*(c) Jeśli $X$ jest rozmaitością legendrowską w $\mathbb{P}(V)$ oraz $I = I(X)$, to $I_2 := I \cap Sym^2 V^*$ jest podalgebrą Lie w $Sym^2 V^*$.*

**Dowód.** Podpunkt (a) wynika z formuły (3.13) dla $i = j = 2$. Mając (a), podpunkt (c) jest oczywisty, z definicji podalgebry Lie oraz z twierdzenia 3.9. Pozostaje pokazać (b).

Aby to zrobić, wybierzmy w $V$ bazę $e_1, \dots, e_n,\ e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ standardową względem $\omega$, to znaczy taką, że $\omega(x, y) = x^T J y$, gdzie

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Wyborowi bazy odpowiada utożsamienie przestrzeni wektorowej $Sym^2V^*$ z przestrzenią macierzy symetrycznych $2n \times 2n$. Mianowicie, kwadryce $f \in Sym^2V^*$ odpowiada taka macierz $A$, że:

$$f(x) \ = \ x^T A x.$$

Policzmy teraz, jakiej macierzy odpowiada nawias Lie dwóch funkcji. Niech $f(x) = x^T A x$, $g(x) = x^T B x$. Łatwo można sprawdzić, że dla $\alpha, \beta \in V^*$ mamy $\omega'(\alpha, \beta) = \alpha J \beta^T$. Wtedy mamy:

$$\mathrm{d}f_x = 2x^T A \text{ oraz } \mathrm{d}g_x = 2x^T B.$$

Podstawiając definicję nawiasu Lie:

$$[f, g](x) \ = \ \omega'(\mathrm{d}f_x, \mathrm{d}g_x) \ = \ (2x^T A) J (2Bx) \ = \ x^T (4AJB) x \ =$$
$$= \ x^T \Big( 2\big(AJB \ + \ (AJB)^T\big)\Big) x \ = \ x^T \big(2(AJB \ - \ BJA)\big) x$$

Zatem w przestrzeni macierzy symetrycznych, mamy nawias Lie zadany wzorem:

$$[A, B] \ = \ 2(AJB \ - \ BJA) \tag{3.15}$$

Określmy izomorfizm między $Sym^2V^*$ a $\mathfrak{sp}(V)$ jako mnożenie przez $2J$:

$$\begin{array}{rrcl} \rho: & Sym^2V^* & \longrightarrow & \mathfrak{sp}(V) \\ & f \simeq A & \longmapsto & 2JA \end{array}$$

Prosty rachunek sprawdza, że $\rho$ jest rzeczywiście izomorfizmem liniowym (zobacz też przykład 3.4). Ponadto z równości (3.15) wynika, że $\rho$ zachowuje nawias Lie, więc jest izomorfizmem algebr Lie.

$\square$

Wniosek 3.14 ma niebagatelne konsekwencje dla rozmaitości legendrowskich generowanych przez kwadryki. O takich rozmaitościach napiszę w rozdziale 4. Tymczasem pokażę jeszcze jak wyglądają zdegenerowane rozmaitości legendrowskie.

**Twierdzenie 3.16** *Jeśli $X \subset \mathbb{P}(V)$ jest zdegenerowaną rozmaitością (czyli zawartą w pewnej hiperpłaszczyźnie) legendrowską, to istnieje podprzestrzeń liniowa $W' \subset V$ kowymiaru 2, taka, że $\omega|_{W'}$ jest formą symplektyczną na $W'$ oraz rozmaitość legendrowska $X' \subset \mathbb{P}(W')$ taka, że $X$ jest stożkiem nad $X'$ (tzn. istnieje wierzchołek $w \in \mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(W')$, taki, że $X = \bigcup_{x' \in X'} \mathrm{lin}(w, x')$).*

**Dowód.** Niech $X \subset \mathbb{P}(W)$, gdzie $W \subset V$ jest podprzestrzenią liniową, a $\dim W = 2n-1$. Wybierzmy na V współrzędne $x_1, \ldots x_{2n}$ tak, aby:

- $W = \{x_n = 0\}$;
- $\omega'$ jest zadana przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$

Niech $I = I(X) = (f_0, f_1, \ldots, f_k)$, gdzie:
$f_i$ są jednorodne,
$\deg f_0 \leq \deg f_1 \leq \ldots \leq \deg f_k$,
$f_0 = x_n$ oraz
dla $i > 0$ funkcja $f_i$ nie zależy od $x_n$.
Pokażę przez indukcję, że można wybrać $f_i$ tak, aby nie zależały też od $x_{2n}$.

Załóżmy, że dla $0 \leq l < k$ wybraliśmy już $g_0, g_1, \ldots, g_l$ tak, aby

- $(g_0, g_1 \ldots, g_l, f_{l+1}, \ldots, f_k) = I$;
- $g_0 = f_0 = x_n$;
- $\forall_{0 \leq i \leq l} \quad \deg g_i = \deg f_i$;
- $g_i$ nie zależy ani od $x_n$, ani od $x_{2n}$ (dla $1 \leq i \leq l$).

Rozpatrzmy funkcję $f := [f_0, f_{l+1}]$. Z definicji

$$f = \omega'(\mathrm{d}f_0, \mathrm{d}f_{l+1}) = \omega'(\mathrm{d}x_n, \mathrm{d}f_{l+1}) = \frac{\partial f_{l+1}}{\partial x_{2n}}.$$

Z twierdzenia 3.9 wiem, że $f \in I$. Ale $\deg f \leq \deg f_{l+1} - 1$ (dokładniej: albo $\deg f = \deg f_{l+1} - 1$, albo $f = 0$), więc $f \in (g_0, \ldots, g_l)$. Stąd

$$\frac{\partial f_{l+1}}{\partial x_{2n}} = \alpha_0 g_0 + \ldots + \alpha_l g_l \text{ dla pewnych } \alpha_i \in S.$$

Niech $\beta_i$ będą funkcjami jednorodnymi minimalnego stopnia (niezależącymi od $x_n$) takimi, że $\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{2n}} = \alpha_i$. Podstawmy

$$g_{l+1} := f_{l+1} - \beta_0 g_0 - \beta_1 g_1 - \ldots - \beta_l g_l.$$

Ponieważ dla $0 \leq i \leq l$ funkcje $g_i$ nie zależą od $x_{2n}$, to $\frac{\partial g_{l+1}}{\partial x_{2n}} = 0$, czyli $g_{l+1}$ też nie zależy od $x_{2n}$. Oczywiście $g_{l+1}$ także nie zależy od $x_n$ oraz

$$(g_0, g_1 \ldots, g_l, g_{l+1}) = (g_0, g_1 \ldots, g_l, f_{l+1})$$

W ten sposób przez indukcję poprawiłem generatory $I$ tak, aby nie zależały od $x_{2n}$. Niech teraz

- $W' := \{x_n = x_{2n} = 0\}$,
- $X' := X \cap W'$ oraz

- $w := (0 : 0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}(V)$.

Pozostawiam jako łatwe sprawdzenie, że $W', X', w$ spełniają tezę twierdzenia.

□

**Wniosek 3.17** *(z dowodu) $X'$ z powyższego twierdzenia jest opisane w $W'$ przez ideał $I' = (g_1, \ldots, g_k)$. W szczególności, $X$ jest zupełnym przecięciem wtedy i tylko wtedy, gdy $X'$ jest zupełnym przecięciem.*

Twierdzenie 3.16 sprowadza nam klasyfikację zdegenerowanych rozmaitości legendrowskich do klasyfikacji rozmaitości legendrowskich niższego wymiaru. W związku z tym od tej pory śmiało możemy zakładać, że badane przez nas rozmaitości są niezdegenerowane, czyli $I_1 = V^* \cap I = \{0\}$.

# 4. Rozmaitości legendrowskie generowane przez kwadryki

Twierdzenie 3.16 pokazuje, że w naszym problemie klasyfikacji możemy zakładać, że $I_1 = 0$. W związku z tym naturalnym kandydatem na najprostszy teraz obiekt badań jest rozmaitość, której $I = (I_2)$, czyli generowana przez kwadryki. Ograniczenie się do tego przypadku jest wciąż bardzo ciekawe, a podstawowym ułatwieniem dla badań jest możliwość rozpatrywania podalgebr Lie skończenie wymiarowej algebry $Sym^2V^*$ (zobacz wniosek 3.14).

**Definicja 5** ***Grupą symplektyczną*** *na $V$ (oznaczaną przez $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$) nazywamy grupę tych automorfizmów liniowych $V$, które zachowują formę symplektyczną $\omega$. To znaczy $\psi \in \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(\psi(v), \psi(w)) = \omega(v, w)$ lub inaczej $\psi^T J \psi = J$, gdzie $J$ jest macierzą formy $\omega$.*

Skończony wymiar $Sym^2V^* \simeq \mathfrak{sp}(V)$ pozwala na przejście do grup Lie (zobacz [FuHa, section 8.3]). Mianowicie, mam odwzorowanie

$$\exp : \mathfrak{sp}(V) \longrightarrow \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V),$$

między innymi o tej własności, że dla dowolnej podalgebry $\mathfrak{g}$ w $\mathfrak{sp}(V)$ obraz $\exp(\mathfrak{g})$ jest podgrupą w $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$.

Porównajmy dwie repreprezentacje grupy $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$. Pierwsza z nich to prawe działanie na $\mathfrak{sp}(V)$:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Ad}: & \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) & \longrightarrow & \mathbf{Gl}(\mathfrak{sp}(V)) \\ & \psi & \longmapsto & \psi^{-1} \circ \cdot \circ \psi, \text{ czyli} \\ & A \star \psi & = & \psi^{-1} \circ A \circ \psi, \end{array}$$

gdzie $\circ$ jest zwykłym składaniem przekształceń liniowych, a $\star$ jest działaniem grupowym Ad. To działanie nazywamy działaniem dołączonym.

Druga reprezentacja, to reprezentacja naturalna, czyli lewe działanie $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ na przestrzeni wektorowej $V$: obrazem działania elementu grupy $\psi$ na wektorze $v$ jest po prostu $\psi(v)$. Oznaczmy tę reprezentację przez $\tau : \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) \hookrightarrow \mathbf{Gl}(V)$.

Reprezentacja $\tau$ indukuje prawe działanie $\bullet$ grupy $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ na pierścieniu wielomianów $S$: $(f \bullet \psi)(x) = f(\psi(x))$, czyli po prostu $f \bullet \psi = f \circ \psi$ ($\circ$ oznacza składanie przekształceń). To działanie zachowuje gradacje, więc obcina się do (prawego) działania $\tau^i$ na $Sym^i V^*$.

**Twierdzenie 4.1** *Reprezentacje* $\mathrm{Ad} : \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathbf{Gl}(\mathfrak{sp}(V))$ *oraz*

$$\tau^2 : \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) \longrightarrow \mathbf{Gl}(Sym^2(V)) \overset{\rho}{\simeq} \mathbf{Gl}(\mathfrak{sp}(V))$$

*(gdzie $\rho$ jest określone jak w dowodzie wniosku 3.14) są sobie równe.*

**Dowód.** Wybierzmy w $V$ bazę standartową względem $\omega$. Weźmy $\psi \in \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$. Zobaczmy jakiemu automorfizmowi $\mathfrak{sp}(V)$ odpowiada $\tau^2(\psi)$.

Weźmy dowolny $f \in Sym^2(V^*)$ oraz załóżmy, że $f(x) = x^T A x$, dla pewnej macierzy symetrycznej $A$. Wtedy $(f \bullet \psi)(x) = f(\psi(x)) = x^T \psi^T A \psi x$, czyli $f \bullet \psi$ odpowiada macierzy symetrycznej $\psi^T A \psi$. Więc przy izomorfizmie $\rho : Sym^2 V^* \to \mathfrak{sp}(V)$ (zobacz dowód wniosku 3.14) $f \bullet \psi$ przechodzi na $2J\psi^T A\psi$. Ale ponieważ $\psi^T J \psi = J$ oraz $J^2 = -\mathrm{Id}_{2n}$, to

$$J\psi^T = -J^{-1}\psi^T = -\psi^{-1}J^{-1} = \psi^{-1}J,$$

więc

$$\rho \circ \tau^2(\psi)(f) = \rho(f \bullet \psi) = 2J\psi^T A\psi = \psi^{-1} 2JA\psi = \psi^{-1}\rho(f)\psi.$$

Czyli $\rho \circ \tau^2 = \mathrm{Ad}$.

□

**Wniosek 4.2** *Niech $\mathfrak{g} < Sym^2 V^*$ będzie podalgebrą Lie i niech $G < \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ będzie odpowiadającą jej podgrupą Lie. Wtedy działanie $\tau^2$ obcięte do $G$ zachowuje $\mathfrak{g}$.*

**Dowód.** Teza wynika natychmiast z twierdzenia 4.1 oraz z tego, że obcięcie działania dołączonego do domkniętej podgrupy jest działaniem dołączonym na odpowiadającej jej podalgebrze Lie (zobacz [FuHa, section 8.1]).

□

**Wniosek 4.3** *Jeśli $X$ jest rozmaitością legendrowską generowaną przez kwadryki, $I = I(X)$ jest ideałem opisującym $X$, a $I_2 = I \cap Sym^2 V^*$, to grupa $G < \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$ odpowiadająca algebrze Lie $I_2$ działa na $V$ (przez reprezentację naturalną $\tau|_G$) i zachowuje $\hat{X}$ (a także działa na $\mathbb{P}(V)$ i zachowuje $X$).*

**Dowód.** Z wniosku 4.2 wynika, że $\tau^2|_G$ zachowuje $I_2$. Ale $I_2$ generuje $I$, więc $\forall_{\psi \in G}\ \forall_{f \in I}\quad f \bullet \psi \in I$ (gdyż $(fg) \bullet \psi = (f \bullet \psi)(g \bullet \psi)$ oraz $(f+g) \bullet \psi = (f \bullet \psi) + (g \bullet \psi)$), czyli działanie $G$ na $S$ indukowane przez $\tau$ zachowuje $I$.

Więc $\tau$ zachowuje $\hat{X}$. Oczywiście $G$ działa przez automorfizmy liniowe, więc to działanie przenosi się na działanie na $\mathbb{P}(V)$ zachowujące $X$.

$\square$

Zbadajmy teraz dokładniej to działanie $G$ na $X$. Okaże się, że otwartą orbitą tego działania jest dokładnie zbiór $X_0$. W szczególności, jeśli $X$ jest gładkie (czyli $X = X_0$), to $X$ jest przestrzenią jednorodną (zobacz na przykład [Otta, def.1.3 i dalej] lub [Hart, III.10.7]). Aby to pokazać zbadajmy najpierw różniczkę odwzorowania $\tau^i : \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathbf{Gl}(Sym^i V^*)$.

**Twierdzenie 4.4** *Dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ różniczką odwzorowania grup Lie:*

$$\begin{array}{rccl} \tau^i : & \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V) & \longrightarrow & \mathbf{Gl}(Sym^i V^*) \\ & \psi & \longmapsto & (f \mapsto f \bullet \psi) \end{array}$$

*jest odwzorowanie algebr Lie*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{D}\tau^i : & Sym^2 V^* & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(Sym^i V^*) \\ & f & \longmapsto & [\cdot, f] \end{array}$$

**Dowód.** Rodzina odwzorowań $\mathrm{D}\tau^i$ spełnia nastepujące warunki:

- $\mathrm{D}\tau^2 = \mathrm{D}\,\mathrm{Ad} = \mathfrak{ad}$ (z twierdzenia 4.1)
- (reguła Leibnitza) $\mathrm{D}\tau^{i+j}(fg) = \mathrm{D}\tau^i(f) \cdot g + f \cdot \mathrm{D}\tau^j(g)$ dla $f \in Sym^i V^*$, $g \in Sym^j V^*$

Zatem twierdzenie będzie pokazane, jeśli pokażemy, że $\mathrm{D}\tau^1 = \mathfrak{ad}$. Zauważmy, że dla dowolnego $\alpha \in V^*$ mamy:

$$2\alpha\ \mathrm{D}\tau^1(\alpha) = \mathrm{D}\tau^2(\alpha^2) = [\cdot, \alpha^2] = 2\alpha[\cdot, \alpha].$$

Stąd $\mathrm{D}\tau^1(\alpha) = [\cdot, \alpha]$. Teraz korzystając z reguły Leibnitza dla różniczkowania oraz dla nawiasu Lie otrzymujemy tezę.

$\square$

**Uwaga 4.5** *Z twierdzenia 4.4 wynika ogólniejsza wersja wniosku 4.3: mianowicie można pominąć założenie, że $X$ jest generowane przez kwadryki.*

$\square$

**Twierdzenie 4.6** *Załóżmy, że $X$ jest nieprzywiedlną rozmaitością legendrowską generowaną przez kwadryki, a $G$ jest grupą z wniosku 4.3 działającą na $X$. Niech też $X' \subsetneq X$ jest domkniętą podrozmaitością niezmienniczą ze względu na $G$. Wtedy $X' \cap X_0 = \emptyset$.*

**Dowód.** Niech $I' = I(X') \lhd S$. Skoro G zachowuje $X'$, to zachowuje też $I'$, zatem z twierdzenia 4.4:

$$[I', I] \subset I'.$$

Przypuśćmy, że istnieje punkt $x \in \hat{X}_0 \cap \hat{X}'$. Ustalmy dowolne $g \in I'$. Wtedy dla każdego $f \in I$ mamy

$$0 \ = \ [f', f](x) \ = \ \omega'(\mathrm{d}f'_x, \mathrm{d}f_x)$$

czyli $\omega'|_{\mathrm{lin}(N^*_{x,\hat{X}_0/V},\mathrm{d}f'_x)} \equiv 0$. Ale $\omega'$ jest niezdegenerowana, a $\dim N^*_{x,\hat{X}_0/V} = \frac{1}{2}\dim V = n$, więc $\mathrm{d}f'_x \in N^*_{x,\hat{X}_0/V}$. Tak jest dla wszystkich $f' \in I'$, stąd przestrzeń konormalna do $\hat{X}'$ w punkcie $x$ ma wymiar $n$. Ale zbiór $\hat{X}_0 \cap \hat{X}'$ jest otwarty w $\hat{X}'$. Więc $\dim \hat{X}' = 2n - n = n = \dim \hat{X}$. Z domkniętości $X'$ oraz nieprzywiedlności $X$ mamy $X' = X$, chociaż założyliśmy, że $X'$ jest właściwą podrozmaitością w $X$. Uzyskaliśmy więc sprzeczność z założeniem, że $\hat{X}_0 \cap \hat{X}' \neq \emptyset$, zatem również $X_0 \cap X' = \emptyset$

□

**Twierdzenie 4.7** *Jeśli $X \subset_l \mathbb{P}^{2n-1}$ jest nieprzywiedlne, generowane przez kwadryki oraz gładkie, to $X$ jest przestrzenią jednorodną.*

**Dowód.** Grupa $G$ z wniosku 4.3 działa na $X$. Niech $\mathcal{O}$ bedzie dowolną orbitą. Domknięcie tej orbity $\bar{\mathcal{O}}$ jest niezmiennicze ze względu na działanie $G$, więc z twierdzenia 4.6 oraz z gładkości (czyli $X = X_0$), mam $\bar{\mathcal{O}} = X$. Również $\bar{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{O}$ jest niezmiennicze, zatem korzystając ponownie z twierdzenia 4.6 $\bar{\mathcal{O}} \backslash \mathcal{O} = \emptyset$, czyli $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, więc $G$ działa w sposób wolny na $X$, czyli $X$ jest przestrzenią jednorodną.

□

# 5. Garść przykładów

W rozdziale 2 podałem parę konkretnych przykładów krzywych legendrowskich (zobacz przykłady 2.5, 2.6, 2.10). Podałem również metodę generowania przykładów wymiernych krzywych legendrowskich (zobacz formułę 2.11 i następujące po niej komentarze, a także twierdzenie 2.12). Łatwo można zastosować podobne rozumowanie, aby wygenerować przykłady (wymiernych) rozmaitości legendrowskich wyższych wymiarów. Okazuje się jednak, że większość tych rozmaitości nie jest generowana przez kwadryki. Co więcej, nie tak łatwo jest podać takie przykłady. W tym rozdziale opiszę kilka z nich. Wszystkie one zostały zaczerpnięte z listy z [LaMa, section 3.2].

## 5.1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}_{n-2} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$

Na początku rozpatrzę jedyną znaną nieskończoną rodzinę przykładów nieprzywiedlnych, niezdegenerowanych rozmaitości legendrowskich, generowanych przez kwadryki. Mianowicie dla dowolnego $n \geq 3$ rozpatrzmy kwadrykę $\mathbb{Q}_{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ opisaną równaniem $y^T y = 0$. Następnie rozpatrzmy zanurzenie Segre $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ zadane wzorem

$$\varphi((\lambda : \mu), (y_0 : \ldots : y_{n-1})) = (\lambda y_0 : \ldots : \lambda y_{n-1} : \mu y_0 : \ldots : \mu y_{n-1})$$

Okazuje się, że $X := \varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}_{n-2})$ jest podrozmaitością legendrowską w $\mathbb{P}^{2n-1}$.

Sprawdzę to korzystając z twierdzenia 3.9. W tym celu muszę wiedzieć, jak wygląda ideał opisujący $X$ w $\mathbb{P}^{2n-1}$. Zdefiniujmy funkcje regularne na $V = \mathbb{C}^{2n}$:

- $f_{ij} := x_i x_{n+j} - x_j x_{n+i}$ dla $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$
- $g_+ := \frac{1}{2}(x_n^2 + x_{n+1}^2 \ldots + x_{2n-1}^2)$
- $g_- := -\frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2 \ldots + x_{n-1}^2)$
- $h := x_0 x_n + x_1 x_{n+1} + \ldots + x_{n-1} x_{2n-1}$

Funkcje $f_{ij}$ opisują cały $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$, natomiast $I = (\{f_{ij}\}_{i,j=0,\ldots n-1}, g_+, g_-, h)$ opisuje $X$. Oczywiście $\dim X = 1 + (n-1-1) = n-1$. Pozostaje sprawdzić, że $I$ jest podalgebrą Lie. Po pierwsze, zauważmy, że $f_{ij} = -f_{ji}$. Po drugie, zobaczmy, jak wyglądają różniczki funkcji $f_{ij}$ oraz $g_+$, $g_-$, $h$:

- $\mathrm{d}f_{ij} = x_{n+j}\mathrm{d}x_i - x_{n+i}\mathrm{d}x_j - x_j\mathrm{d}x_{n+i} + x_i\mathrm{d}x_{n+j}$
- $\mathrm{d}g_+ = (0, 0, \ldots, 0,\ x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})$
- $\mathrm{d}g_- = -(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1},\ 0, 0, \ldots, 0)$
- $\mathrm{d}h = (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1},\ x_0, x_1 \ldots, x_{n-1})$

Po trzecie zobaczmy, jak wyglądają nawiasy Lie tych generatorów (forma $\omega'$ ma standardową postać):

(i) $[f_{ij}, f_{jk}] = -x_{n+i}x_k + x_i x_{n+k} = f_{ik}$ dla $i \neq j \neq k$

(ii) $[f_{ij}, f_{kl}] = 0$ jeśli $i, j, k, l$ są różnymi liczbami $\in \{0, 1, \ldots n-1\}$

(iii) $[f_{ij}, g_+] = x_{n+j}x_{n+i} - x_{n+i}x_{n+j} = 0$

(iv) $[f_{ij}, g_-] = -x_j x_i + x_i x_j = 0$

(v) $[f_{ij}, h] = x_{n+j}x_i - x_{n+i}x_j + x_j x_{n+i} - x_i x_{n+j} = 0$

(vi) $[g_+, g_-] = x_n x_0 + x_{n+1}x_1 + \ldots + x_{2n-1}x_{n-1} = h$

(vii) $[h, g_-] = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = -2g_-$

(viii) $[h, g_+] = x_n^2 + x_{n+1}^2 + \ldots + x_{2n-1}^2 = 2g_+$

Zatem rzeczywiście $I$ jest podalgebrą Lie, więc $X$ jest rozmaitością legendrowską.

Można jeszcze sprawdzić, jaką algebrą jest $I_2$. Jako przestrzeń liniowa $I_2$ jest rozpięta przez $\Big\{\{f_{ij}\}_{i,j=0,\ldots n-1},\ g_+, g_-, h\Big\}$, przy czym $f_{ij} = -f_{ji}$. Równania (i)-(viii) pokazują, że $I_2$ jest sumą prostą podalgebry rozpiętej przez $\{f_{ij}\}$ oraz podalgebry rozpiętej przez $\{g_+, g_-, h\}$. Ta druga podalgebra jest izomorficzna w oczywisty sposób z $\mathfrak{sl}_2$. Natomiast $\mathrm{lin}\{f_{ij}\}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{so}_n$. Przypomnijmy sobie, że $\mathfrak{so}_n$ można interpretować jako algebrę macierzy $n \times n$ antysymetrycznych (zobacz też przykład 3.5). Jeśli $f_{ij}$ utożsamię z macierzą, która ma jedynkę na miejscu $(i, j)$ oraz minus jedynkę na miejscu $(j, i)$, a poza tym same zera, to własnie takie utożsamienie zada izomorfizm między $\mathrm{lin}\{f_{ij}\}$ a $\mathfrak{so}_n$. Zatem zrealizowaliśmy $X$ jako rozmaitość jednorodną dla podgrupy $\mathbf{SO}_{\mathbb{C}}(n) \times \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(2)$ w $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(V)$

## 5.2. Skręcona kubika

Wróćmy jeszcze raz do jednego z pierwszych przykładów (2.6). Tutaj też zobaczmy jaką algebrą Lie jest $I_2$. W tym przypadku $I$ jest generowane przez funkcje $f_+, f_-, h' \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ określone następująco:

$$f_+ := x_2^2 - x_1x_3$$

$$f_- := x_0x_2 - x_1^2$$

$$h' := x_0x_3 - x_1x_2$$

Różniczki tych funkcji to:

$$\mathrm{d}f_+ = (0, -x_3, 2x_2, -x_1)$$

$$\mathrm{d}f_- = (x_2, -2x_1, x_0, 0)$$

$$\mathrm{d}h' = (x_3, -x_2, -x_1, x_0)$$

A nawiasy Lie wyglądają następująco (pamiętajmy, że w tym przypadku macierz formy $\omega'$ ma postać $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ):

$$[f_+, f_-] = x_3x_0 - 4x_2x_1 + 3x_1x_2 = x_0x_3 - x_1x_2 = h'$$

$$[h', f_+] = -3x_3x_1 + 2x_2^2 + x_1x_3 = 2(x_2^2 - x_1x_3) = 2f_+$$

$$[h', f_-] = x_2x_0 + 2x_1^2 - 3x_0x_2 = -2(x_2x_0 - x_1^2) = -2f_-$$

Zatem w tym przypadku $I_2$ jest izomorficzna z $\mathfrak{sl}_2$.

# 6. Zupełne przecięcia

Często podając przykłady rozmaitości algebraicznych o zadanych własnościach zaczyna się od wymienienia kilku gładkich zupełnych przecięć. Okazuje się, że gładkie rozmaitości legendrowskie nie mogą być zupełnymi przecięciami (poza podprzestrzeniami liniowymi), co zamierzam pokazać w tym rozdziale.

W tym rozdziale przyjmę odrobinę inną definicję $\hat{X}_0$ niż do tej pory. Mianowicie będzie to zbiór punktów gładkich stożka nad $X$ bez zera. Nie jest to duża zmiana, gdyż i tak zazwyczaj 0 nie jest punktem gładkim stożka. Chodzi o to, aby zapewnić istnienie naturalnego odwzorowania $\pi : \hat{X}_0 \longrightarrow X_0$, które jest $\mathbb{C}^*$ wiązką główną, będącą wyjęciem cięcia zerowego z przestrzeni totalnej wiązki $\mathcal{O}_{X_0}(-1)$.

Rozpatrzmy jeszcze raz diagram 3.10. Dowodząc twierdzenia 3.9 pokazałem, że legendrowskość rozmaitości $X$ jest równoważna z izomorficznością górnego i dolnego wiersza diagramu. Na $\hat{X}_0$ oraz na wszystkich wiązkach występujących w tym diagramie działa w naturalny sposób grupa $\mathbb{C}^*$. W szczególności na przestrzeni $V$ działanie ma wagę $+1$, natomiast na $V^*$ ma wagę $-1$, to znaczy:

$$t \cdot v = tv \text{ dla } v \in V \text{ oraz}$$

$$t \cdot \alpha = t^{-1}\alpha \text{ dla } \alpha \in V^*$$

Jeśli więc zastąpimy wiązki w tym diagramie przez odpowiadające im snopy lokalnie wolne i zastosujemy popchnięcie wzdłuż $\pi$, to otrzymamy diagram snopów:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*(T\hat{X}_0) \arrow[r] & \pi_*(V \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\pi_*(\phi)"] & \pi_*(N_{\hat{X}_0/V}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*(N^*_{\hat{X}_0/V}) \arrow[r] & \pi_*(V^* \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}_0}) \arrow[r] & \pi_*(T^*\hat{X}_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Na snopach tych wciąż mamy działanie $\mathbb{C}^*$ i każdy z tych snopów rozkłada się na sumę prostą podsnopów związanych z gradacjami działania $\mathbb{C}^*$, czyli

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_i$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest jednym ze snopów powyższego diagramu, a $\mathcal{F}_i$ jest podsnopem $\mathcal{F}$ na którym $\mathbb{C}^*$ działa z wagą $i$, czyli jeśli $U \subset X_0$ jest otwartym podzbiorem to

$$t \cdot s = t^i s \text{ dla } s \in \mathcal{F}_i(U).$$

Izomorfizm

$$\pi_*(\phi) : \pi_*(V \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}_0}) \longrightarrow \pi_*(V^* \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}_0})$$

przesuwa gradację związaną z działaniem $\mathbb{C}^*$ o $-2$. Jeśli teraz ograniczymy się w górnym wierszu do gradacji $+1$ oraz w dolnym wierszu do gradacji $-1$, to uzyskamy:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{L}^*(-1) \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_{X_0} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & N_{X_0/\mathbb{P}(V)}(-1) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^*_{X_0/\mathbb{P}(V)}(1) \arrow[r] & V^* \otimes \mathcal{O}_{X_0} \arrow[r] & \mathcal{L}(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest rozszerzeniem Atiyah

$$0 \to T^*X_0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_{X_0} \to 0$$

odpowiadającemu $c_1(\mathcal{O}(1))$ (zobacz [KPSW, sect. 2.1], [Atiy]). Wiersze diagramu 6.1 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy izomorficzne są wiersze diagramu 3.10, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość $X$ jest legendrowska. Stąd można wyciągnąć następujący wniosek:

**Wniosek 6.2** *Jeśli $X$ jest gładką rozmaitością legendrowską, to wiązka wektorowa $\mathcal{L}$ na $X$, która jest nietrywialnym rozszerzeniem odpowiadającym $c_1(\mathcal{O}(1))$*

$$0 \to \Omega_X \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

*jest izomorficzna z $N_{X/\mathbb{P}(V)} \otimes \mathcal{O}_X(-2)$*

□

Teraz już możemy skupić się na zupełnych przecięciach: wiązka normalna do gładkiego, nieprzywiedlnego zupełnego przecięcia hiperpowierzchni stopni $d_1, \ldots, d_n$ jest przecież izomorficzna z $\mathcal{O}_X(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(d_n)$.

**Twierdzenie 6.3** *Załóżmy, że gładka nieprzywiedlna legendrowska podrozmaitość $X \subset_l \mathbb{P}(V)$ jest zupełnym przecięciem (czyli $I = I(X)$ jest generowane przez $n$ elementów, gdzie $n = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}(V)}(X) = \frac{1}{2}\dim(V)$). Wtedy $X$ jest podprzestrzenią liniową.*

**Dowód.** Załóżmy, że $X$ jest zupełnym przecięciem hiperpowierzchni stopni $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Z twierdzenia 3.16, wniosku 3.17 oraz z zasady indukcji matematycznej wynika, że wystarczy pokazać, że istnieje $d_i = 1$. Mamy:

$$N_{X/\mathbb{P}(V)} \simeq \mathcal{O}_X(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(d_n)$$

oraz z wniosku 6.2:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_X \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r, "p"] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & 0 \\
& & N_{X/\mathbb{P}(V)}(-2) \arrow[u, "\simeq"', "\varphi"] & \mathcal{O}_X(d_i - 2) \arrow[l, "j_i"'] \arrow[u, dotted, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ponieważ $p\varphi \neq 0$, to istnieje $i$ takie, że $\xi := p\varphi j_i \neq 0$, gdzie $j_i$ jest włożeniem $i$-tego składnika sumy prostej $\mathcal{O}_X(d_1 - 2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(d_n - 2)$. Więc $d_i - 2 \leq 0$. Gdyby $d_i = 2$ to $\xi$ musiałoby być izomorfizmem. Ale w takim razie $\varphi j_i \xi^{-1}$ rozszczepiałoby ciąg dokładny $0 \to \Omega_X \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X \to 0$, więc $\mathcal{L}$ byłoby trywialnym rozszerzeniem, co stoi w sprzeczności z wnioskiem 6.2. Stąd $d_i = 1$, czyli $X$ jest zdegenerowana. Więc z twierdzenia 3.16 i wniosku 3.17, przez indukcję po wymiarze $V$ pokazuję, że $X$ jest podprzestrzenią liniową.

□

**Uwaga 6.4** *Można osłabić nieco założenia twierdzenia 6.3: Mianowicie zamiast gładkości wystarczy zakładać, że $X$ jest gładkie w kowymiarze 1, czyli, że kowymiar zbioru punktów osobliwych jest co najmniej 2.*

# Spis literatury


[Atiy] Michael Atiyah, *Complex analitic connections in fibre bundles*, Trans.Am.Math.Soc.,85; 181-207, 1957.

[Fuji] Takao Fujita, *On the structure of polarized varieties with* $\Delta$*-genera zero*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, **22**(1975) 103-115.

[FuHa] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer-Verlag New York 1991.

[Hart] Robin Hartshorn, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., No. 52, Springer-Verlag, 1977.

[KPSW] Stefan Kebekus, Thomas Peternell, Andrew J. Sommese, Jarosław Wiśniewski, *Projective Contact Manifolds.* Invent. Math. 142 (2000), no. 1, 1–15.

[LaMa] Joseph M. Landsberg, Laurent Manivel, *Classification of complex simple Lie algebra via projective geometry.* Selecta Math. (N.S.) 8 (2002), no. 1, 137–159.

[Muka] Shigeru Mukai, *Simple Lie algebra and Legendre variety*, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜mukai/

[Otta] Giorgio Ottaviani, *Rational Homogeneous Varieties*, notatki do Szkoły Letniej w Cortonie w dniach 13–26 sierpnia 1995.

[Wiśn] Jarosław Wiśniewski, *Lines and conics on Fano contact manifolds*, http://www.mimuw.edu.pl/˜jarekw/