

Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 8.

Dariusz Wrzosek

18 listopada 2024

Plan:

- 1 przestrzeń kartezjańska
- 2 funkcje wielu zmiennych i pochodne cząstkowe
- 3 metoda najmniejszych kwadratów- wyznaczanie trendu liniowego
- 4 fraktale

Przestrzeń kartezjańska

Przestrzeń kartezjańska \mathbb{R}^n

Produkt złożony z n kopii zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} , czyli

$$\overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^n$$

nazywa się **przestrzenią kartezjańską** i oznacza \mathbb{R}^n .

Elementami tej przestrzeni są uporządkowane ciągi n liczb

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

które nazywamy punktami o n współrzędnych.

Na kolejnych współrzędnych mogą stać dowolne liczby rzeczywiste.

Geometrycznie:

- 1 $n = 1$ — zbiór liczb rzeczywistych utożsamiamy z linią prostą;
- 2 $n = 2$ — zbiór \mathbb{R}^2 utożsamiamy z płaszczyzną,
- 3 $n = 3$ — zbiór \mathbb{R}^3 utożsamiamy z przestrzenią trójwymiarową.

Liczbę n nazywamy wymiarem przestrzeni.

Jeśli na płaszczyźnie wybierzemy pewien punkt odniesienia — środek układu współrzędnych o współrzędnych $(0, 0)$, to aby określić położenie dowolnego innego punktu płaszczyzny potrzeba i wystarcza podać dwie współrzędne.

Zgodnie z obowiązującym modelem przestrzeni fizycznej, w której jesteśmy zanurzeni, aby określić współrzędną punktu potrzeba oczywiście trzech współrzędnych, a nawet czterech, jeśli jedną współrzędną identyfikujemy jako czas mierzony od pewnej ustalonej chwili.

Idea wprowadzenia układu współrzędnych dla reprezentowania punktów przestrzeni i rozwiązywania zagadnień geometrycznych pochodzi od Kartezjusza (Rene Descartesa (1596-1650)) i należy do kluczowych osiągnięć mających wpływ na rozwój matematyki i nauk przyrodniczych.

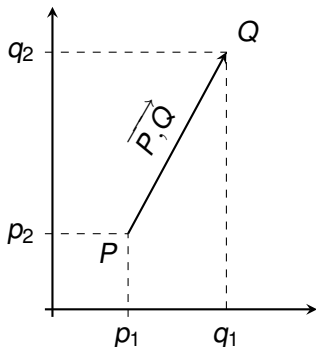
Wektory

Każda uporządkowana para punktów z \mathbb{R}^n , (P, Q) , określa **wektor** $\overrightarrow{P, Q}$ o początku w punkcie P (zaczepiony w P) i końcu w punkcie Q .

Z drugiej strony każdy punkt P można identyfikować z wektorem $\overrightarrow{\mathbf{0}, P}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza punkt $(0, 0, \dots, 0)$ zwany także środkiem układu współrzędnych.

Jeśli $P = (p_1, \dots, p_n)$ i $Q = (q_1, \dots, q_n)$, to wektor $\overrightarrow{P, Q}$ ma współrzędne

$$\overrightarrow{P, Q} = [q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n]^T = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix} .$$



Przyjmujemy konwencję, że wektor w układzie współrzędnych przedstawiany jest w postaci kolumny, w której kolejne współrzędne zapisane są jedna pod drugą.

Litera T u góry oznacza **transpozycję wektora**, czyli zamianę wektora o współrzędnych zapisanych w wierszu na wektor kolumnowy i odwrotnie.

Szczególnie ważny jest zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w $\mathbf{0}$, który oznaczmy przez \mathcal{V} .

W zbiorze tym można określić działania dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby, wykonując wszystkie operacje oddzielnie na współrzędnych.

Dla $a \in \mathbb{R}$ i $\vec{v} = [v_1, \dots, v_n]^T \in \mathcal{V}$ oraz $\vec{z} = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathcal{V}$ definiujemy

1 $a\vec{v} = [av_1, \dots, av_n]^T$

2 $\vec{v} + \vec{z} = \vec{w} = [v_1 + z_1, \dots, v_n + z_n]^T$

Jeśli te operacje są określone, to taką przestrzeń wektorów \mathcal{V} nazywamy **przestrzenią liniową (lub wektorową)**.

Funkcje wielu zmiennych

Rozpatrzmy funkcję dwóch zmiennych określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, Możemy przyjąć, że np. D to prostokąt bez brzegu .

Funkcje dwóch zmiennych zapisujemy jako

$$f(x) = f(x_1, x_2) \quad \text{dla } x = (x_1, x_2) \in D.$$

Wyberzmy dowolny punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ze zbioru D .

Zamiast x_2 wstawmy wartość \tilde{x}_2 i potraktujmy funkcję f jako funkcję jedynie zmiennej x_1 . Taką funkcję obciętą do jednej współrzędnej oznaczmy dla wygody $f_1(x_1) = f(x_1, \tilde{x}_2)$.

Jeżeli funkcja f_1 ma pochodną w punkcie $x_1 = \tilde{x}_1$, to wartość tej pochodnej w punkcie \tilde{x}_1 nazywamy **pochodną cząstkową** funkcji f po x_1 w punkcie \tilde{x} i oznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}).$$

Analogicznie ustalając pierwszą zmienną $x_1 = \tilde{x}_1$, definiujemy funkcję jednej zmiennej $f_2 = f_2(x_2)$. Jeśli ta funkcja ma pochodną, to jej wartość nazywamy pochodną cząstkową po x_2 w punkcie \tilde{x} i oznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}).$$

Przykład 1

Weźmy funkcję $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$ określoną na \mathbb{R}^2 i wybierzmy punkt $\tilde{x} = (2, 3)$. Obliczamy $f_1(x_1) = f(x_1, 3) = x_1^2 + 3x_1$, a więc $f'_1(x_1) = 2x_1 + 3$ i $f'_1(2) = 7$, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(2, 3) = 7.$$

Aby otrzymać ogólny wzór określający pochodną cząstkową wykonuje się różniczkowanie funkcji po **wybranej zmiennej traktując pozostałą jako parametr** — nie wstawiając konkretnych współrzędnych.

Otrzymujemy wzór, za pomocą którego można obliczyć, pochodną cząstkową w dowolnym punkcie dziedziny.

W naszym przykładzie mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}) = 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}) = \tilde{x}_1.$$

W przypadku funkcji n zmiennych

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{dla } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

postępuje się analogicznie.

Aby obliczyć pochodną cząstkową po zmiennej x_i , czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x})$$

traktuje się wszystkie pozostałe zmienne (poza x_i) jako stałe parametry i liczy pochodną funkcji jednej zmiennej x_i .

Policzmy pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y, z) = z + e^{2x} \sin y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

w punkcie (x_0, y_0, z_0) . Uwaga: zamiast (x_1, x_2, x_3) piszemy (x, y, z) — typowo dla funkcji 3 zmiennych!

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2e^{2x_0} \sin y_0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = e^{2x_0} \cos y_0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 1.$$

Pochodna funkcji jednej zmiennej w punkcie \tilde{x} wyznacza prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$.

Dla funkcji dwóch zmiennych każda z pochodnych cząstkowych w punkcie $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zadaje prostą styczną przechodzącą przez punkt

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

Obie proste zadają płaszczyznę styczną do wykresu funkcji.

Odpowiednikiem pochodnej funkcji jednej zmiennej jest w przypadku funkcji wielu zmiennych gradient.

Gradient funkcji wielu zmiennych

Definicja

Pochodną **funkcji wielu zmiennych** $f : D \mapsto \mathbb{R}$ w punkcie $\tilde{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wektor $\nabla f(\tilde{x})$ (zwany **gradientem funkcji**), którego współrzędne równe są kolejnym pochodnym cząstkowym funkcji f czyli

$$\nabla f(\tilde{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right]$$

Bywa, że przyrodnicy nazywają gradientem także pochodną funkcji jednej zmiennej. Nie prowadzi to do sprzeczności, jeśli kontekst jest jasny.

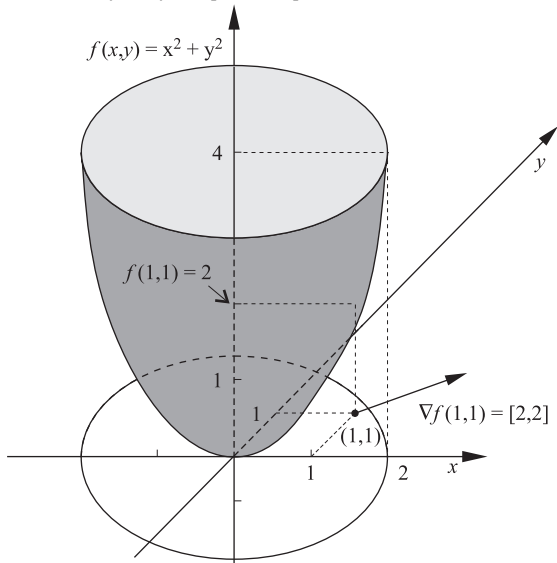
Stwierdzenie, że w jakimś procesie fizycznym jest duży gradient temperatury, jako funkcji położenia, znaczy, że wartość bezwzględna pochodnej $|f'(x)|$ przyjmuje stosunkowo duże wartości, a więc temperatura zmienia się szybko z miejsca na miejsce.

W przypadku funkcji wielu zmiennych mówiąc, że gradient temperatury jako funkcji położenia jest duży oznacza, że długość wektora gradientu funkcji jest duża. Wtedy także wiemy, znając zwrot wektora gradientu, w którym kierunku temperatura wzrasta najbardziej.

Można udowodnić, że

Gradient wyznacza kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji.

Wykres funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ określonej na kole K o środku w $(0, 0)$ i promieniu 2. Tutaj $\nabla f(x, y) = [2x, 2y]$.



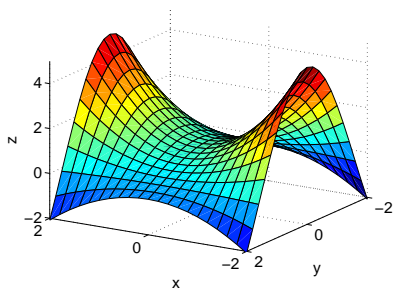
Warunek konieczny na istnienie ekstremum dla funkcji wielu zmiennych

Warunkiem koniecznym występowania ekstremum (czyli minimum lub maksimum) lokalnego funkcji różniczkowalnej wielu zmiennych w danym punkcie jest, analogicznie do funkcji jednej zmiennej, zerowanie się pochodnej, czyli wektora gradientu w tym punkcie.

Powyższy warunek jest warunkiem **koniecznym**. Nie jest dostateczny.

$$f(x, y) = (1 + x^2) \cos(y)$$

Obok wykres funkcji, której gradient się zeruje, w punkcie $(0, 0)$, a funkcja nie ma w tym punkcie ani minimum, ani maksimum.



Metoda najmniejszych kwadratów

Zmienna x reprezentuje wartości cechy C_1 .

Zmienna y — wartości cechy C_2 .

Wykonano n pomiarów wartości obu cech, w wyniku których otrzymaliśmy n punktów na płaszczyźnie

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Zakładamy, że zmienna y zależy od zmiennej x **liniowo**, albo inaczej szukamy wzoru opisującego trend liniowy ukryty w danych.

Chcemy więc znaleźć funkcję liniową $y = l(x)$, której wykres leży (w pewnym sensie) najbliżej punktów (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Prosta ta jest zadana przez liczby rzeczywiste m i b , takie że

$$y = l(x) = mx + b.$$

Zależność liniowa jest najprostsza i można ją zawsze traktować jako wstępne przybliżenie.

Jednak także wykres funkcji potęgowej w logarytmicznym układzie współrzędnych i funkcji wykładniczej w układzie pół-logarytmicznym są liniami prostymi, a więc po przeniesieniu danych empirycznych na wykres logarytmiczny lub odpowiednio półlogarytmiczny możemy stosować regresję liniową.

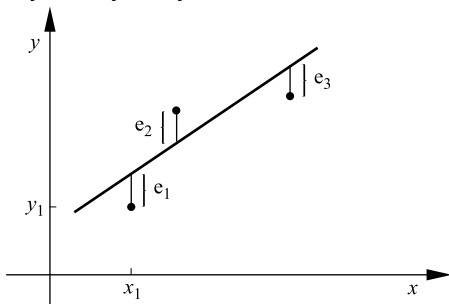
Pozostaje wyznaczyć wartości parametrów $m \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$.

Postulujemy teraz, że poszukiwana prosta przechodzi w pewnym sensie najbliżej wszystkich n punktów.

By to sprecyzować policzmy „odchylenia”

$$e_i = y_i - l(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

i zażądajmy, aby poszukiwana prosta miała tę własność, że dla niej suma wszystkich odchyłeń jest najmniejsza.



Odchylenia mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne, mogłoby się zatem zdarzyć, że znoszą się one dając w sumie zero, mimo że punkty nie leżą na żadnej prostej.

By tego uniknąć bierze się sumę kwadratów odchyłeń czyli

$$E = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n |y_i - l(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2.$$

Stąd nazwa –metoda najmniejszych kwadratów.

Zadanie sprowadza się do znalezienia takiej pary $(m, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dla której funkcja odchylenia

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

przyjmuje wartość najmniejszą.

Zwróćmy uwagę, że funkcja E jest ograniczona od dołu przez 0. Można udowodnić, że funkcja odchylenia jest wypukła, a więc ma jedno minimum. Możemy je wyznaczyć po obliczeniu pochodnych cząstkowych.

Pochodne cząstkowe funkcji odchylenia $E(m, b)$

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Pochodna względem b — zmienną m traktujemy jak parametr.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} E(m, b) &= \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [y_i - (mx_i + b)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 2[y_i - (mx_i + b)](-1) = - \sum_{i=1}^n 2y_i + 2m \sum_{i=1}^n x_i + 2bn \end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe funkcji odchylenia $E(m, b)$

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Pochodna względem b — zmienną m traktujemy jak parametr.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} E(m, b) &= \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [y_i - (mx_i + b)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 2[y_i - (mx_i + b)](-1) = - \sum_{i=1}^n 2y_i + 2m \sum_{i=1}^n x_i + 2bn \end{aligned}$$

Pochodna względem m — zmienną b traktujemy jak parametr.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} E(m, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial m} [y_i - (mx_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n 2[y_i - (mx_i + b)](-x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n 2x_i y_i + 2m \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Z danych empirycznych obliczamy

$$s_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_{x^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad s_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad s_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

i rozwiązujemy układ równań:

$$-s_y + s_x m + n b = 0, \quad -s_{xy} + s_{x^2} m + s_x b = 0.$$

Przy takiej notacji możemy wynik zapisać następująco:

$$m = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{n s_{x^2} - s_x^2}, \quad (*)$$

$$b = \frac{s_y - m s_x}{n}. \quad (**)$$

Na podstawie tych wzorów pakiety statystyczne wyliczają poszukiwane współczynniki trendu liniowego.

Przykład-zależność pomiędzy wiekiem i wzrostem u dzieci

Dokonano 7 pomiarów wysokości i ustalono wiek badanych dzieci ($n = 7$). Kolejno w parach (x_i, y_i) oznacza, że i -te dziecko ma wiek x_i i wysokość y_i .

$$(1, 76), (3, 91), (5, 109), (7, 120), (9, 131), (11, 144), (13, 154)$$

Obliczamy

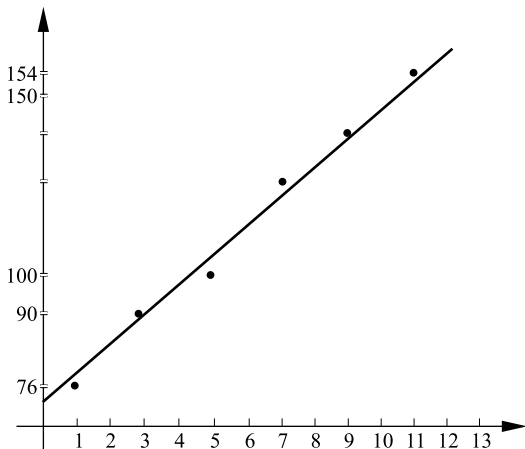
$$s_x = 49, \quad s_{x^2} = 450, \quad s_y = 825, \quad s_{xy} = 6794.$$

Podstawiając do wzorów (??) i (??) otrzymujemy

$$m = \frac{7 \times 6794 - 49 \times 825}{7 \times 450 - 49^2} = 9,523,$$

$$b = 825/7 - 9,523 \times 49/7 = 51,19.$$

Zależność pomiędzy wiekiem i wzrostem u dzieci



Warto zwrócić uwagę, że biorąc inną populację lub mniejszą próbkę dostaniemy oczywiście nieco inne wyniki.

Jest to konsekwencja nie tylko błędów pomiarowych, ale głównie zróżnicowania osobniczego.

Przebieg prostej przechodzącej „najbliżej” punktów określonych przez dane empiryczne nie wynika bezpośrednio z jakiegoś prawa przyrody.

Jest to jedynie sposób przedstawienia danych empirycznych i punkt wyjściowy do dalszych badań mających na celu wyjaśnienie, dlaczego zależność jest właśnie taka a nie inna.

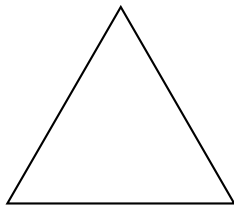
Jest jasne również, że zależność liniowa dotyczy osobników w fazie wzrostu (tu dzieci do wieku dojrzewania).

Po zbadaniu starszych osobników okazałoby się, że zależność dalej już nie jest liniowa i „wysyca się”, tak że w rezultacie funkcja nie przekracza wielkości określającej maksymalną wysokość dorosłych osobników.

Fraktale- krzywa Kocha

Przegląd zagadnień analizy matematycznej zakończymy dygresją o dziwnych zbiorach zwanych fraktalami wykazującymi zdumiewające podobieństwo do form spotykanych w przyrodzie. Słynnym przykładem fraktala jest krzywa ciągła i ograniczona o nieskończonej długości zwana od Helge von Kocha(1870-1924) **krzywą Kocha** lub płatkiem śniegu Kocha.

Krzywą Kocha otrzymuje się przechodząc do granicy, wykonując nieskończenie wiele kroków następującej procedury. Figurą wyjściową jest trójkąt równoboczny o boku d .

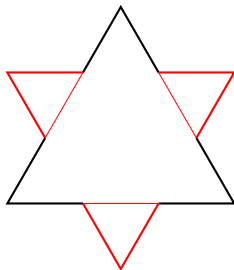


Fraktale- krzywa Kocha

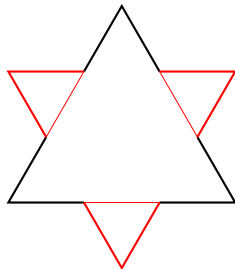
Przegląd zagadnień analizy matematycznej zakończymy dygresją o dziwnych zbiorach zwanych fraktalami wykazującymi zdumiewające podobieństwo do form spotykanych w przyrodzie. Słynnym przykładem fraktala jest krzywa ciągła i ograniczona o nieskończonej długości zwana od Helge von Kocha(1870-1924) **krzywą Kocha** lub płatkim śniegu Kocha.

Krzywą Kocha otrzymuje się przechodząc do granicy, wykonując nieskończenie wiele kroków następującej procedury. Figurą wyjściową jest trójkąt równoboczny o boku d .

W pierwszym kroku dzielimy każdy z boków na trzy części z których usuwamy środkową i w to miejsce wklejamy trójkąt równoboczny o boku $\frac{d}{3}$ z usuniętym jednym bokiem, tak aby powstał zamknięty wielokąt.



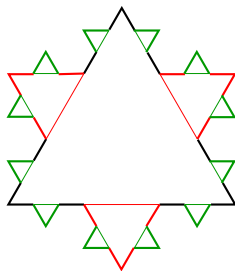
Krzywa Kocha



Krzywa Kocha

W drugim kroku każdy z boków tego wielokąta dzielimy na trzy części, usuwamy środkową i w jej miejsce wklejamy trójkąt równoboczny o boku $\frac{d}{3}$, czyli trzykrotnie krótszym niż poprzedni.

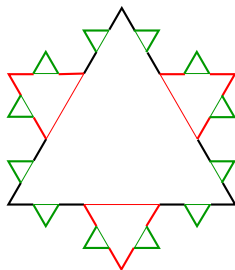
Otrzymujemy wielokąt o $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ bokach.



Krzywa Kocha

W drugim kroku każdy z boków tego wielokąta dzielimy na trzy części, usuwamy środkową i w jej miejsce wklejamy trójkąt równoboczny o boku $\frac{d}{3}$, czyli trzykrotnie krótszym niż poprzedni.

Otrzymujemy wielokąt o $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ bokach.



Powtarzamy tę samą procedurę otrzymując w trzecim kroku wielokąt o $3 \cdot 4^3$ bokach o długości $\frac{d}{3^3}$ każdy.

Ogólnie w kroku n . otrzymamy wielokąt o $3 \cdot 4^n$ bokach długości $\frac{d}{3^n}$ każdy. Długość L_n wszystkich boków wielokąta w n . kroku konstrukcji wynosi

$$L_n = 3 \cdot d \left(\frac{4}{3} \right)^n .$$

Definicja

Krzywą Von Kocha nazywa się krzywą ciągłą, którą definiuje się jako zbiór otrzymany w granicy po przejściu wszystkich nieskończenie wielu kroków.

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \cdot d \left(\frac{4}{3} \right)^n \right) = +\infty,$$

jej długość jest nieskończona, mimo że jest to krzywa ograniczona.

Krzywa Von Kocha jest przykładem obiektu matematycznego, który nie ma bezpośredniej reprezentacji w rzeczywistości empirycznej, gdyż ta procedura musiałaby się zatrzymać na tym kroku, w którym dojdziemy do subatomowej skali długości.

Ważne jest to, że ten obiekt idealny możemy przybliżać z dowolną dokładnością wielokątami o skończonej liczbie boków.

Fraktale

Ciekawą cechą krzywej Von Kocha jest **samopodobieństwo**. Wyobraźmy sobie mikroskop powiększający w skali 1:10 nakierowany centralnie na punkt na krzywej Kocha.

Zwiększamy skalę dziesięciokrotnie, następnie stokrotnie itd.

Za każdym razem widzimy to samo — dowolnie mały fragment wygląda tak jak fragment powiększony.

Figury o tej własności nazywa się **fraktalami**.

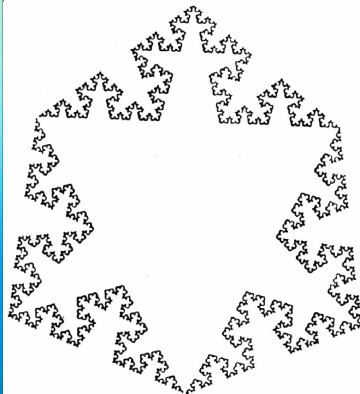
Pojęcie to wprowadził Benoit Mandelbrot (1924-2010) w latach siedemdziesiątych XX wieku.

W literaturze spotkać można różne definicje zbiorów fraktalnych różniące się zakresami. Ich zrozumienie wymaga znajomości zaawansowanych pojęć matematycznych i dlatego poprzestaniemy na przedstawieniu ogólnych idei.

Fraktale

Fraktale fascynują naukowców z różnych dziedzin między innymi dlatego, że wiele z nich przypomina obiekty o skomplikowanej morfologii znane ze świata przyrody ożywionej i nieożywionej.

Wielokąty przybliżające krzywą Von Kocha przypominają płatki śniegu.



Samopodobną strukturę ma niewątpliwie kwiatostan kalafiora i brokuła.



Paproć — fraktal i roślina



Klifowa, pełna małych zatoczek o różnej skali wielkości, linia brzegowa Walii ma również pewne cechy fraktala, nastroczając rzeczywistych problemów z dokładnym obliczeniem długości linii brzegowej Wielkiej Brytanii.

Do tej pory nie ma ogólnej teorii, która wyjaśniałaby skąd bierze się zadziwiające podobieństwo między fraktalami matematycznymi i fraktalopodobną strukturą wielu obiektów przyrodniczych. Na pewno zrozumienie tego związku wymaga lepszego zrozumienia mechanizmów wzrostu, które w wielu przypadkach polegają na dobudowywaniu podobnych struktur do już istniejących, ale w zmniejszonej skali.

Matematyczna teoria fraktali dała narzędzia umożliwiające klasyfikację różnych struktur o skomplikowanej, nieregularnej budowie. Teorię fraktali wykorzystano do diagnostyki guzów nowotworowych, gdyż dostrzeżono struktury fraktalne na ścianach komórek nowotworowych:

<http://www.icsjournal.org/articles/2016/12/16/fractal-geometry-of-tumors-how-certain-scientists-use-fractal-models-to-understand-tumors-and-develop-treatments>

<http://physicsworld.com/cws/article/news/2015/mar/11/fractal-patterns-seen-on-emerging-cancerous-cells>

Warto odwiedzić choć jedną z licznych bogato ilustrowanych stron internetowych poświęconych fraktalom.