Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 7.

Dariusz Wrzosek

12 listopada 2024

Przypomnienie: funkcja pierwotna

Niech $F : D \to \mathbb{R}$, gdzie D to odcinek otwarty lub cała prosta $\mathbb{R}$).

Jeżeli w każdym punkcie $x \in D$ istnieje pochodna funkcji F, to funkcji F możemy jednoznacznie przyporządkować funkcję pochodną $f = F' : D \to \mathbb{R}$.

Odwrotnie, danej funkcji f można przyporządkować funkcję F, taką że $F' = f$. Funkcja F jest określona jednoznacznie z dokładnością do stałej, gdyż wtedy dla dowolnej stałej c

$$(F(x) + c)' = f(x).$$

Definicja

*Funkcję $F : D \mapsto \mathbb{R}$, taką że $F' = f$ nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f.*

Podstawowe wzory

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- dla każdej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\displaystyle\int (af(x))\, dx = a \int f(x)dx$

Definicja

Całką oznaczoną funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *w granicach od* a *do* b *nazywamy liczbę*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

gdzie F *jest dowolną funkcją pierwotną funkcji* f.

Przykład

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 = \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Określmy funkcję górnej granicy całkowania

$$x \mapsto \int_a^x f(s)ds\,.$$

Wtedy

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = \frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) = f(x)\,.$$

Przy obliczaniu całek często wykorzystuje się następującą własność.

Niech F będzie funkcją pierwotną do $f : [x_1\,, x_2] \to \mathbb{R}$. Rozpatrzmy funkcję złożoną $g(x) = f(ax+b)$, gdzie a i b to pewne stałe.

Funkcją pierwotną do g jest funkcja $G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$, a zatem

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)dx = \frac{1}{a}(F(ax_2+b) - F(ax_1+b)).$$

Przykłady

$$\int_1^2 e^{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{12} - e^7\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+2x|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\ln 3}{2}$$

Podstawowe własności całki oznaczonej

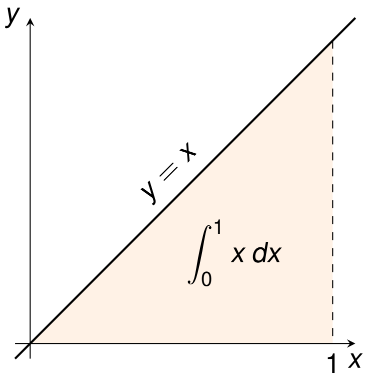
- dla $a \leqslant c \leqslant b$ mamy $\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds = \int_a^b f(s)ds$ bo
$$\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds = F(c) - F(a) + (F(b) - F(c)) =$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(s)ds.$$
- Jeśli α jest dowolną liczbą i g pewną funkcją ciągłą, to
$$\int_a^b (f(s) + \alpha g(s))ds = \int_a^b f(s)ds + \int_a^b \alpha g(s)ds =$$
$$= \int_a^b f(s)ds + \alpha \int_a^b g(s)ds.$$

Pierwsza własność sugeruje, że definicję całki oznaczonej można rozszerzyć na funkcje kawałkami ciągłe mówiąc, że całka z funkcji kawałkami ciągłej jest sumą całek obliczonych na przedziałach ciągłości funkcji.

Całka oznaczona jako pole obszaru pod wykresem funkcji

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

Wartość tej całki jest równa polu trójkąta prostokątnego wyznaczonego przez oś poziomą układu współrzędnych i wykres funkcji $f(x) = x$.

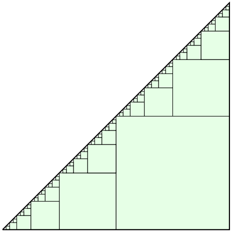


Co to jest pole figury?

W szkole uczymy się wzorów określających pola różnych figur regularnych: prostokątów, trójkątów, kół itd. Ale jak określić pole figury o nieregularnym kształcie? Skoro nie mamy wątpliwośći co to jest pole prostokąta to

przez pole figury można rozumieć liczbę równą sumie (na ogół nieskończonej) liczby wszystkich pól prostokątów zawartych całkowicie w tej figurze rozmieszczonych tak, że mogą one mieć wspólne jedynie fragmenty swoich krawędzi.

Oczywiście im dokładniej chcemy pokryć zbiór prostokątami, tym mniejszych prostokątów musimy użyć.



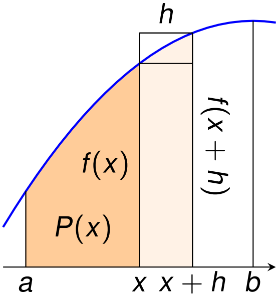
Pole trójkąta prostokątnego przybliżamy za pomocą sumy pól kwadratów zawartych w trójkącie. Im dokładniejsze przybliżenie, tym mniejsze muszą być kwadraty wypełniające w sumie trójkąt, ale żadna skończona liczba kwadratów nie wystarczy do całkowitego pokrycia trójkąta.

Pole figury ograniczonej wykresem funkcji i osią x-ów

Rozpatrujemy najpierw przypadek szczególny całki z funkcji monotonicznej. W najprostszy sposób ukazuje on związek pomiędzy polem pod wykresem funkcji i jej całką oznaczoną.

Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ciągła, niemalejąca i nieujemna.

Dla $x \in [a, b]$ — $P(x)$ pole figury ograniczonej od góry przez wykres funkcji od punktu $(a, f(a))$ do punktu $(x, f(x))$ i od dołu przez oś x-ów.



Wtedy dla $h > 0$, takiego że $x + h \in [a, b]$

$$hf(x) \leqslant P(x+h) - P(x) \leqslant hf(x+h)$$

i dzieląc stronami przez h dostajemy

$$f(x) \leqslant \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Przechodząc do granicy z $h \to 0$ i korzystając z definicji ciągłości i definicji pochodnej otrzymujemy $P'(x) = f(x)$ więc P jest funkcją pierwotną f, a zatem

$$\int_a^x f(s)ds = P(x) - P(a) = P(x),$$

gdyż $P(a) = 0$ z definicji P.

Pole figury ograniczonej wykresem funkcji i osią x wynosi
$P(b) = \int_a^b f(s)ds$.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla funkcji nieujemnej i nierosnącej lub nieujemnej i kawałkami monotonicznej.

Są jednak funkcje ciągłe na odcinku o dość skomplikowanym przebiegu (np. sinusoida warszawska, albo funkcja Weirstrassa), których całkowanie trzeba oprzeć na przejściu granicznym sumy pól prostokątów (tzw. sumy Riemanna) przybliżających pole figury pod wykresem funkcji. Można udowodnić, że

Stwierdzenie

Pole P figury pomiędzy wykresem dowolnej funkcji ciągłej i nieujemnej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i osią x-ów jest równe całce oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$.

Wartość średnia funkcji

Definicja

Wartością średnią funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nazywamy liczbę*

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\,.$$

Przykład z poprzedniego wykładu

Samochód porusza się po prostej startując w chwili $t = 0$ z punktu x_0 z prędkością $v(t)[\frac{m}{s}]$. W chwili $t = T$ położenie samochodu wynosi $x(T) = x_0 + \int_0^T v(t)dt[m]$, gdyż funkcja określająca położenie (współrzędną) samochodu jest funkcją pierwotną do funkcji określającej prędkość samochodu. Wartość średnia funkcji określającej prędkość samochodu to

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)dt\ [\frac{m}{s}]\,,$$

czyli

$$\bar{v} = \frac{x(T) - x_0}{T}\,.$$

Całki niewłaściwe

Rozważymy teraz całki z funkcji określonych na przedziałach nieograniczonych typu $[a\,, +\infty)$ lub $(-\infty, a]$, lub $(-\infty\,, +\infty)$.

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f i załóżmy, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Ponieważ

$$\int_a^x f(s)ds = F(x) - F(a), \quad \text{to}$$

Definicja

Całką niewłaściwą funkcji f na odcinku $[a, +\infty)$ nazywa się liczbę

$$\int_a^{+\infty} f(s)ds = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Całką niewłaściwą funkcji f na odcinku $(-\infty, a]$ nazywa się liczbę

$$\int_{-\infty}^{a} f(s)ds = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x)\,.$$

- Granica funkcji $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ może nie istnieć — odpowiednia całka niewłaściwa nie jest wtedy określona.

Przykład:

Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \cos x$ jest $F(x) = \sin x$. Nie istnieją

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \sin x,$$

zatem żadna z całek niewłaściwych nie jest określona.

- Jeśli $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \pm\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $\pm\infty$.

Przykład:

Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$ jest $F(x) = x^2$, oraz $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Dlatego mówimy, że $\displaystyle\int_a^\infty x\,dx$ jest rozbieżna do $+\infty$.

Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant a$, to funkcja pierwotna F jest funkcją niemalejącą (bo $F'(x) = f(x) \geqslant 0$), więc granica $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ jest albo liczbą dodatnią, albo całka jest rozbieżna do $+\infty$.

Przykład:

$$\int_1^{+\infty} e^{-s} ds = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) - (-e^{-1}) = e^{-1};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^a} ds = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(1-a)x^{a-1}}\right) - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}, a > 1;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} ds = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

W powyższych przykładach funkcje podcałkowe są dodatnie i maleją do 0.

Funkcja $\frac{1}{x}$ maleje do zera na tyle wolno wraz ze wzrostem x, że pole obszaru pomiędzy wykresem tej funkcji i osią x jest nieskończone, w odróżnieniu od dwóch pozostałych funkcji.

Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ definiuje się jako sumę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\,, \tag{$\star$}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest dowolną liczbą. Ta definicja nie zależy od wyboru a.

Rozpisując prawą stronę ($\star$) dostajemy, po uproszczeniu,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)\,.$$

Powyższa całka jest albo liczbą dodatnią, albo jest rozbieżna do $+\infty$.