Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 5.

Dariusz Wrzosek

28 października 2024

Podstawy analizy matematycznej, ciąg dalszy

- różniczka
- pochodne wyższych rzędów
- podstawowe interpretacje pochodnej w fizyce
- badanie funkcji

Przypomnienie i terminologia

Pochodna to granica ilorazu różnicowego;

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Jest to źródło określenia ”różniczka” jako różnica zbiegająca do zera.
- Stąd historyczna nazwa tego działu matematyki — rachunek różniczkowy.
- Obliczanie pochodnych nazywa się różniczkowaniem.
- Funkcję, która ma pochodną nazywa się funkcją różniczkowalną.
- Pochodna funkcji w punkcie, $f'(x_0)$, określa współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkt $(x_0\,, f(x_0))$ należący do wykresu funkcji. Taka prosta nazywa się prostą styczną do wykresu funkcji i zadana jest wzorem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ważne własności pochodnej

Pochodna funkcji w punkcie określa liniową część przyrostu funkcji w tym punkcie tzn.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ *ma pochodną w* $x_0 \in D$*, to przyrost tej funkcji można przedstawić za pomocą pochodnej tzn.*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h, x_0),$$

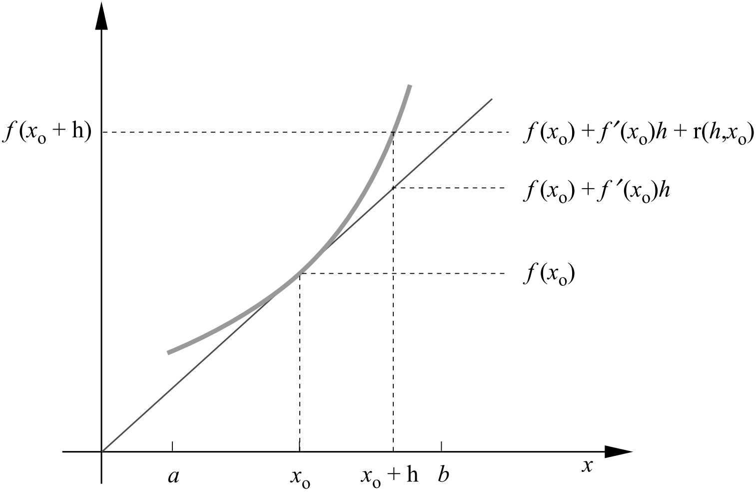
gdzie $r(h, x_0)$ *jest pewną funkcją zwaną resztą, taką że*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h, x_0)}{h} = 0\,.$$

Reszta dąży do 0 szybciej niż przyrost h, np. tak jak h^2 .

Funkcję liniową $\qquad h \to f'(x_0)h$

nazywa się częścią liniową przyrostu funkcji, co sugeruje, że reszta przedstawia część nieliniową przyrostu. Wiemy o niej tyle, że jest znacząco mniejsza od części liniowej.

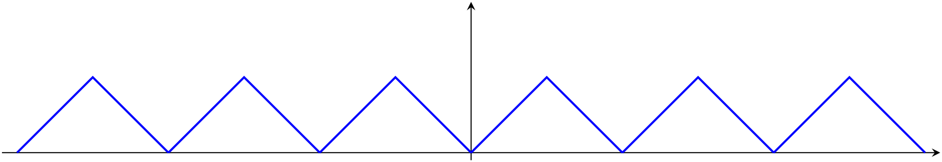


Z poprzedniego twierdzenia wynika natychmiast

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to f jest ciągła w tym punkcie.

Choć trudno to sobie wyobrazić, istnieją funkcje ciągłe nie mające pochodnej w żadnym punkcie swojej dziedziny. Przykład takiej funkcji podał K. Weierstrass -nie można jej zapisać wzorem, jest ona granicą ciągu funkcji o coraz bardziej zagęszczających się zębach, jak w pile do drewna. Biorąc dowolny fragment wykresu funkcji Weierstrassa i powiększając go dowolnie zawsze zobaczymy nieskończenie wiele zębów upakowanych jeden przy drugim bez żadnego fragmentu prostoliniowego.

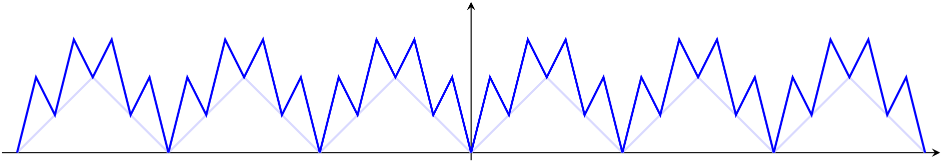


Z poprzedniego twierdzenia wynika natychmiast

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to f jest ciągła w tym punkcie.

Choć trudno to sobie wyobrazić, istnieją funkcje ciągłe nie mające pochodnej w żadnym punkcie swojej dziedziny. Przykład takiej funkcji podał K. Weierstrass -nie można jej zapisać wzorem, jest ona granicą ciągu funkcji o coraz bardziej zagęszczających się zębach, jak w pile do drewna. Biorąc dowolny fragment wykresu funkcji Weierstrassa i powiększając go dowolnie zawsze zobaczymy nieskończenie wiele zębów upakowanych jeden przy drugim bez żadnego fragmentu prostoliniowego.

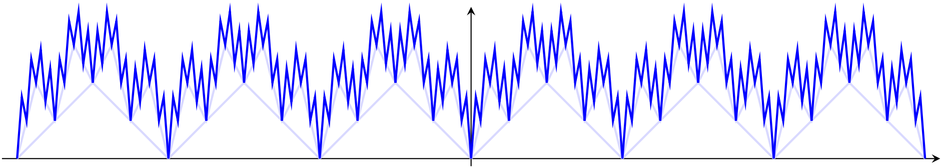


Z poprzedniego twierdzenia wynika natychmiast

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to f jest ciągła w tym punkcie.

Choć trudno to sobie wyobrazić, istnieją funkcje ciągłe nie mające pochodnej w żadnym punkcie swojej dziedziny. Przykład takiej funkcji podał K. Weierstrass -nie można jej zapisać wzorem, jest ona granicą ciągu funkcji o coraz bardziej zagęszczających się zębach, jak w pile do drewna. Biorąc dowolny fragment wykresu funkcji Weierstrassa i powiększając go dowolnie zawsze zobaczymy nieskończenie wiele zębów upakowanych jeden przy drugim bez żadnego fragmentu prostoliniowego.



Pochodne wyższych rzędów

Pochodną funkcji pochodnej nazywamy drugą pochodną i.t.d i oznaczamy $f''(x)$ lub $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, natomiast n-tą pochodną funkcji oznaczamy przez $f^{(n)}(x)$, ewentualnie $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

W fizyce druga pochodna ma szczególne znaczenie, gdyż druga pochodna funkcji określającej położenie poruszającego się ciała, to jego przyspieszenie, czyli szybkość zmian prędkości jako funkcji czasu.

Pochodne wyższych rzędów

Pochodną funkcji pochodnej nazywamy drugą pochodną i.t.d i oznaczamy $f''(x)$ lub $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, natomiast n-tą pochodną funkcji oznaczamy przez $f^{(n)}(x)$, ewentualnie $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

W fizyce druga pochodna ma szczególne znaczenie, gdyż druga pochodna funkcji określającej położenie poruszającego się ciała, to jego przyspieszenie, czyli szybkość zmian prędkości jako funkcji czasu.

Pochodne wyższych rzędów

Pochodną funkcji pochodnej nazywamy drugą pochodną i.t.d i oznaczamy $f''(x)$ lub $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, natomiast n-tą pochodną funkcji oznaczamy przez $f^{(n)}(x)$, ewentualnie $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

W fizyce druga pochodna ma szczególne znaczenie, gdyż druga pochodna funkcji określającej położenie poruszającego się ciała, to jego przyspieszenie, czyli szybkość zmian prędkości jako funkcji czasu.

jednostki fizyczne

Prędkość wyraża się w jednostkach [długość/czas], $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, gdyż prędkość to granica ilorazu przyrostu współrzędnej mierzonego w metrach i przyrostu czasu mierzonego w sekundach.

Jednostką **przyspieszenia**, czyli pochodnej prędkości, jest $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$, skoro przyspieszenie to granica ilorazu przyrostu prędkości mierzonego w metrach na sekundę i przyrostu czasu mierzonego w sekundach.

Opis ruchu: położenie, prędkość, przyspieszenie

Rozważymy prosty przykład wykorzystujący pojęcia znane z fizyki.

Przyjmijmy, że pociąg poruszający się po prostym torze ze stałą prędkością $v = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ mija punkt kontrolny w chwili $t = 0$ i porusza się dalej z tą samą prędkością przez godzinę.

W ciągu następnej godziny pociąg zwalnia ze stałym opóźnieniem (ujemnym przyspieszeniem) równym $a = -100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$, aż do zatrzymania w odległości 150km od punktu kontrolnego.

Po godzinnym postoju rusza z powrotem przyspieszając przez godzinę z tym samym co do modułu przyspieszeniem, co przy hamowaniu, by osiągnąć stałą prędkość v.

Przedstawimy wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia pociągu jako funkcje czasu. Przyjmijmy, że $x(t)$ oznacza położenie pociągu na osi, tak że punkt 0 odpowiada punktowi kontrolnemu, a jednostką czasu jest godzina [h].

Opisany kurs pociągu można podzielić na pięć etapów:

1. ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością $v = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
2. ruch jednostajnie przyspieszony z przyśpieszeniem $a = -100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$
3. postój
4. ruch jednostajnie przyspieszony z przyśpieszeniem $a = -100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$
5. ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością $v = -100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Dane odpowiadają następującej funkcji położenia $x : [0,5] \to \mathbb{R}^+$ od czasu

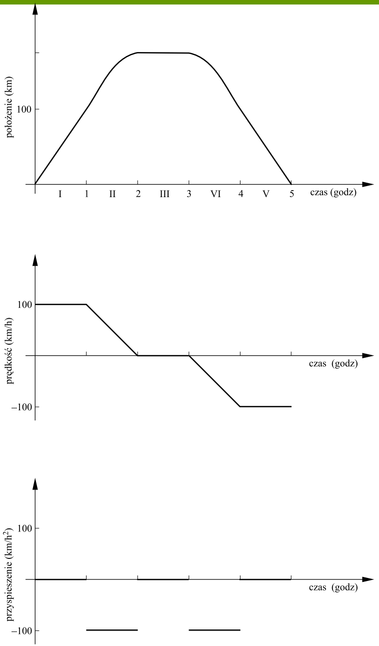
$$x(t) = \begin{cases} 100\,t & \text{gdy} \quad t \in [0\,,1]\,, \\ -50(t-2)^2 + 150 & \text{gdy} \quad t \in [1\,,2]\,, \\ 150 & \text{gdy} \quad t \in [2\,,3]\,, \\ -50(t-3)^2 + 150 & \text{gdy} \quad t \in [3\,,4]\,, \\ -100\,t + 500 & \text{gdy} \quad t \in [4\,,5], \end{cases}$$

W drugim etapie podróży mamy

$$\dot{x}(t) = -100(t-2) = -100t + 200 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right],$$

$$\ddot{x}(t) = a = -100 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}^2}\right] \quad \text{dla} \;\; t \in [1,2]\,.$$

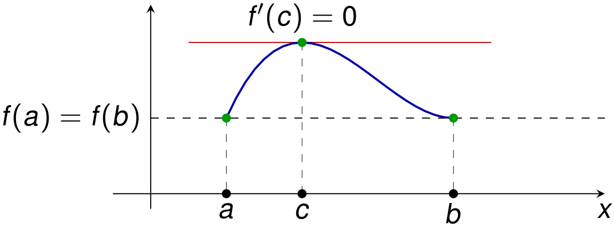
Położenie pociągu jest różniczkowalną funkcją czasu, prędkość jest funkcją ciągłą kawałkami różniczkowalną, a przyspieszenie jest funkcją nieciągłą (kawałkami ciągłą).



Twierdzenie Rolla

Twierdzenie (Rolla)

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na odcinku $[a,b]$ i ma pochodną w (a,b) oraz $f(a)=f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$, taki że $f'(c)=0$.



Dowody tego twierdzenia i kolejnego znaleźć można np. w książce pt. „Matematyka dla Biologów”, patrz slajdy nr 1.

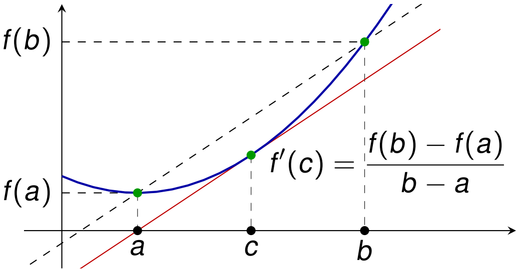
Twierdzenie Lagrange'a

Z twierdzenia Rolla wynika następujące twierdzenie Lagrange'a (Joseph Lagrange (1736-1813)), które ma ważne konsekwencje.

Twierdzenie (Lagrange'a o wartości średniej)

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$ i ma pochodną w (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$, taki że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Wniosek

Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest stała w.t.w. gdy* $f'(x) = 0$ *dla wszystkich* $x \in (a, b)$

Wniosek

Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *ma pochodną w każdym punkcie* (a, b)*. Wtedy jeśli dla wszystkich* $x \in (a, b)$*:*

1. $f'(x) > 0$*, to f jest (ściśle) rosnąca*
2. $f'(x) \geqslant 0$*, to f jest niemalejąca*
3. $f'(x) < 0$*, to f jest (ściśle) malejąca*
4. $f'(x) \leqslant 0$*, to f jest nierosnąca*

Wystarczy zauważyć na podstawie twierdzenia Lagrange'a, że dla dowolnych punktów x_1 , x_2, takich że $a < x_1 < x_2 < b$ istnieje x_c: $x_1 < x_c < x_2$ oraz

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_c)(x_2 - x_1)\,.$$

Zatem o znaku lewej strony decyduje znak $f'(x_c)$.

Uwaga

Funkcja może przyjmować względnie małe wartości, a jej pochodna względnie bardzo duże. Rozpatrzmy funkcję:

$$f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(100x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wtedy $f'(x) = 50\cos(100x)$.

Największa wartość, którą może przyjąć $|f(x)|$ wynosi $0,5$.

Największa wartość, którą może przyjąć $|f'(x)|$ wynosi 50.

Zakres zmienności wartości funkcji jest w granicach od $-0{,}5$ do $0{,}5$ a zakres zmienności jej pochodnej jest stukrotnie większy.

Z twierdzenia Lagrange'a wynika ważny wniosek o tym, że wielkość pochodnej w pewnym sensie „kontroluje" wielkość przyrostu argumentów funkcji.

Zadanie

Samochód przemieszcza się ruchem prostoliniowym zwalniając i przyspieszając, bez zatrzymywania. Załóżmy, że znamy zapis prędkości w każdej chwili jazdy samochodu i chcemy oszacować jak daleko samochód mógł się przemieścić w czasie T.

Aby znaleźć to oszacowanie trzeba wymnożyć T przez największą wartość prędkości, którą osiągnął samochód w tym czasie. To postępowanie uzasadnia następujący

Wniosek (z Twierdzenia Lagrange'a)

Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *będzie funkcją różniczkowalną na* (a, b) *i ciągłą na* $[a, b]$. *Załóżmy, że dla wszystkich* $x \in [a, b]$, $|f'(x)|$ *nie przekracza pewnej liczby* M. *Wtedy*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|a - b|.$$

Zasada optimum w naukach przyrodniczych i społecznych.

Wiele zagadnień fizyki, biologii i ekonomii sprowadza się do poszukiwania optimum, które jest realizowane przez minimum lub maksimum pewnej funkcji- służy do tego właśnie pochodna.

- **Fizyka-** promień światła przechodząc przez różne ośrodki od jednego punktu do drugiego wybiera taką trajektorię, aby zminimalizować czas przejścia między nimi.
- **Ekonomia-** maksymalizuje się zysk jako funkcję różnych inwestycji oraz (z drugiej strony) minimalizuje się stratę.
- **Biologia-** strategie życiowe zwierząt i roślin wyjaśnia się odwołując się do maksymalizacji dostosowania (fitness), którego miarą może być minimalizowanie wydatku energetycznego na podtrzymanie funkcji życiowych, aby jak najwięcej energii przeznaczyć na rozród i ewentualną opiekę nad potomstwem.

Ekstrema lokalne

Minimum i maksimum funkcji określa się mianem ekstremum funkcji.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)

Załóżmy, że $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją różniczkowalną. Jeśli* f *ma*

- *minimum lokalne w punkcie* $x_0 \in (a, b)$*, czyli istnieje odcinek* $(x_{-1}, x_1) \subset (a , b)$*, taki że* $x_0 \in (x_{-1}, x_1)$ *oraz* $f(x) \geqslant f(x_0)$*, dla wszystkich* $x \in (x_{-1} , x_1)$

lub

- *maksimum lokalne w punkcie* $x_0 \in (a, b)$*, czyli istnieje odcinek* $(x_{-1}, x_1) \subset (a , b)$*, taki że* $x_0 \in (x_{-1}, x_1)$ *oraz* $f(x) \leqslant f(x_0)$*, dla wszystkich* $x \in (x_{-1} , x_1)$*,*

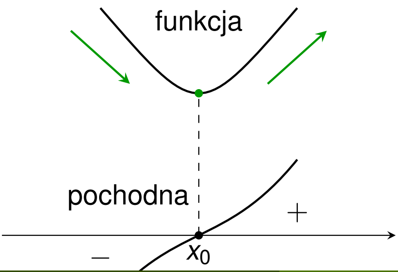
to $f'(x_0) = 0$*.*

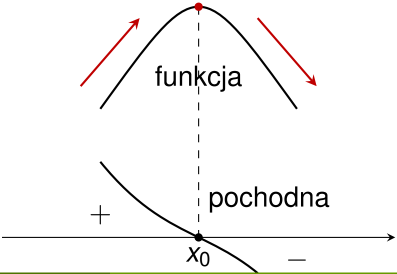
Jest to warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Twierdzenie (warunek wystarczający na istn. minimum bądź maksimum funkcji

Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną i dla pewnego $x_0 \in (a, b)$ zachodzi $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje przedział $(x_{-1}, x_1) \subset (a, b)$, taki że

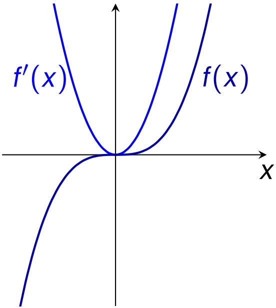
1. $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_{-1}, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_1)$, to funkcja f ma minimum lokalne w x_0.
2. $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_{-1}, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_1)$, to funkcja f ma maksimum lokalne w x_0.





Przykład sytuacji gdy spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej (czyli zerowanie się pochodnej) i nie jest spełniony warunek wystarczający.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^3$ dla $x \in \mathbb{R}$. Pochodna $f'(x) = 3x^2$ zeruje się jedynie w punkcie $x = 0$. W tym punkcie spełniony jest zatem warunek konieczny istnienia ekstremum. Jednak $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq 0$, a więc nie jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum.

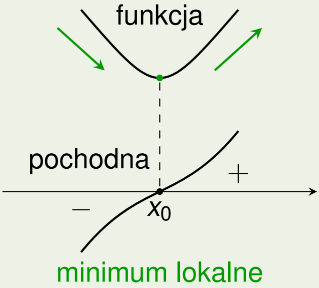


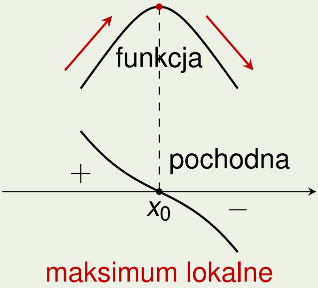
Pochodne funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$ w punkcie $x = 0$ zerują się i dlatego ich wykresy „wypłaszczają się” w otoczeniu punktu 0 (prosta styczna do wykresu w tym punkcie jest pozioma).

Pochodna $f'(x) = 3x^2$ jest dodatnia dla $x \neq 0$ a pochodna $g'(x) = 2x$ jest dodatnia dla $x > 0$ i ujemna dla $x < 0$. Dlatego funkcja g ma minimum w punkcie 0 a funkcja f nie ma minimum.

Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji (podsumowanie).

Minimum lub maksimum funkcji f w $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.





Badanie funkcji :

- znajdujemy wartości funkcji lub jej granice na krańcach dziedziny,
- sprawdzamy czy są punkty, w których funkcja się zeruje,
- znajdujemy pochodną funkcji,
- znajdujemy punkty, w których pochodna zeruje się (w nich mogą być ekstrema lokalne),
- znajdujemy przedziały na których pochodna jest dodatnia (funkcja rośnie) lub ujemna (funkcja maleje),
- znajdujemy minima lub maksima lokalne funkcji,
- określamy wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją) poprzez porównanie wartości w ekstremach lokalnych i na końcach dziedziny funkcji.

Zadanie

Dla jakiej liczby dodatniej x funkcja $f(x) = x + \frac{1}{x}$ osiąga wartość najmniejszą ?

Rozwiązanie

Zbadamy przebieg funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D = \{x : x \in \mathbb{R}\,, x > 0\}$. Obliczymy najpierw granice funkcji.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Ponieważ funkcja jest ciągła, z powyższego wynika, że posiada minimum.

Obliczamy pochodną funkcji, aby znaleźć przedziały, na których funkcja rośnie lub maleje, a także punkty, w których pochodna zeruje się.

$$f'(x) = \left(x + x^{-1}\right)' = 1 + (x^{-1})' = 1 + (-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Mamy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x \in D = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

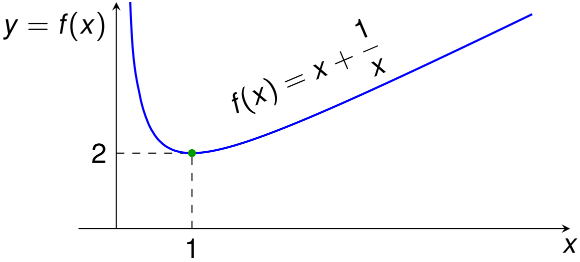
Zatem

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \text{ lub } \quad x = -1\,.$$

Skoro $x \in D$, to pozostaje tylko punkt $x = 1$. Zauważmy, że

$$x \in (0\,,1) \to f'(x) < 0\,,$$
$$x \in (1\,,+\infty) \to f'(x) > 0\,.$$

Zatem funkcja f osiąga minimalną wartość w punkcie $x = 1$ i $f(1) = 2$.



Zasada optimum w biologii

Zasada optimum w biologii związana jest z teorią ewolucji i koncepcją maksymalizacji dostosowania (ang. fitness), która jest jednym z głównych pojęć stosowanych do wyjaśniania strategii życiowych roślin i zwierząt.

Poniższy przykład jest znacznym uproszczeniem z punktu widzenia fizjologii i ekologii, jego zaletą natomiast jest prostota.

Zadanie

Ryba płynie pod prąd rzeki na tarło ze stałą prędkością v względem wody. Prędkość wody względem brzegu rzeki wynosi v_1. Znaleźć optymalną prędkość v_{opt}, przy której ryba wydatkuje na ruch minimalną energię (czyli wykonuje minimalną pracę).

Przyjmujemy, że zachowanie ryby jest zoptymalizowane — dobór naturalny wykluczył osobniki, których strategie życiowe nie minimalizują wydatków energetycznych przypadających na jednostkę czasu.

Ryba wykonuje w jednostce czasu pracę związaną przede wszystkim z pokonaniem oporu wody — tym większą, im większa jest prędkość względem rzeki v. Zgodne z prawami fizyki, siły oporu działające na ciało poruszające się w wodzie rosną wraz ze wzrostem prędkości tego ciała.

Możemy dla uproszczenia przyjąć, że funkcja $w(v)$ określająca pracę wykonaną w jednostce czasu w zależności od prędkości jest funkcją potęgową, $w(v) = bv^k$, gdzie $b > 0$ oraz $k \geqslant 2$ są pewnymi stałymi wyznaczanymi eksperymentalnie.

Przyjmując, że ryba pokonuje drogę s w czasie t, całkowita praca wykonana w czasie t wynosi

$$W = w(v)t.$$

Ryba pokonuje drogę s względem brzegu rzeki w czasie t. Stąd $s = (v - v_1)t$, a zatem całkowitą pracę można wyrazić jako

$$W(v) = w(v)\frac{s}{v - v_1} = \frac{sbv^k}{v - v_1}.$$

Funkcja W określona jest na zbiorze $D = \{v \in \mathbb{R} : v > v_1\}$.

Szukamy zatem takiej prędkości v, dla której funkcja $W : D \to \mathbb{R}$ osiąga wartość najmniejszą.

Obliczamy pochodną stosując wzór na pochodną ilorazu

$$W'(v) = sb\frac{\left(v^k\right)'(v - v_1) - v^k\left(v - v_1\right)'}{(v - v_1)^2} =$$
$$= sb\frac{kv^{k-1}(v - v_1) - v^k}{(v - v_1)^2} = sb\frac{v^{k-1}(k(v - v_1) - v)}{(v - v_1)^2}.$$

Mamy

$$W'(v) = 0 \iff v = \frac{k}{k-1}v_1 = v_k$$

oraz $W'(v) > 0$ dla $v > v_k$ i $W'(v) < 0$ dla $v_1 < v < v_k$.

Zatem funkcja W przyjmuje minimum w punkcie v_k i $v_{\text{opt}} = v_k$ jest optymalną prędkością.

$$v_k = v_{\text{opt}} = \frac{k}{k-1} v_1 .$$

Prędkość optymalna v_k nie zależy od drogi s.

Praca $W(v)$ wydatkowana na pokonanie drogi dąży do $+\infty$, zarówno gdy v dąży do v_1 jak i gdy $v \to +\infty$:

$$\lim_{v \to v_1^+} \frac{bv^k}{v - v_1} = +\infty , \qquad \lim_{v \to +\infty} \frac{bv^k}{v - v_1} = +\infty .$$

Jeśli chcemy dobrać prędkość ruchu tak, aby pokonań pewną drogę wydatkując jak najmniej energii to poruszając sie zbyt wolno wydłuża się czas podróży. Z drugiej strony zbyt szybka podróż oznacza wieki wydatek energetyczny związany z pokonaniem oporu ruchu. Pomiędzy tymi skrajnościami znajdujemy prędkość optymalną, przy której wydatek energetyczny (koszt) jest najmniejszy .