Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 2.

Dariusz Wrzosek

8 października 2024

Od funkcji liniowej do funkcji logarytmicznej

Podstawowe własności szczególnych funkcji określonych na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ przyjmujących wartości w $\mathbb{R}$. Powiemy o:

- funkcji liniowej
- funkcji potęgowej
- funkcji wykładniczej
- funkcji logarytmicznej

Funkcje te, obok funkcji trygonometrycznych, pełnią bardzo istotną rolę we wszelkich zastosowaniach matematyki.

Wykres funkcji

Pojęcie funkcji zostało zdefiniowane jako przyporządkowanie elementom pewnego zbioru zwanego (**dziedziną funkcji**) elementów zbioru wartości funkcji. W przypadku funkcji $f : D \mapsto \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$, wygodnie jest zdefiniować pojęcie wykresu funkcji jako podzbioru płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, po to aby "widzieć" przebieg funkcji.

Definicja

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór

$$W_f = \{(x\,,y) : x \in D\,, \quad y = f(x)\}$$

zawarty w produkcie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Funkcja liniowa

$$y = f(x) = mx + b.$$

Zakładamy, że $m \neq 0$, w przeciwnym przypadku f jest funkcją stałą przyjmującą jedynie wartość b.

Parametr m nazywa się współczynnikiem kierunkowym prostej.

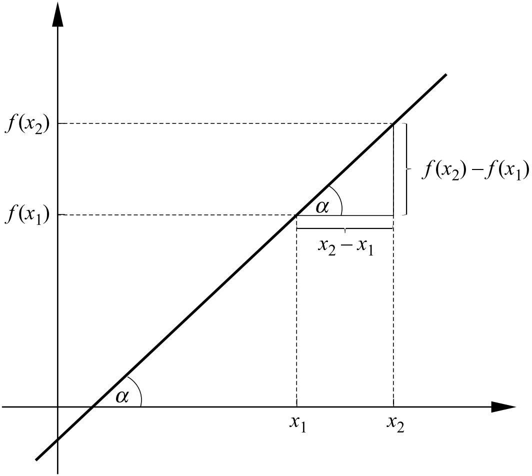
Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta.

Cechą charakterystyczną funkcji liniowej jest to, że przyrost wartości funkcji jest proporcjonalny do odpowiadającego mu przyrostu wartości argumentów tzn. dla dow. x_1, x_2

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

Przypomnijmy, że liczba m równa jest także wartości tangensa kąta, pod którym prosta przecina oś poziomą układu współrzędnych ($m = \operatorname{tg} \alpha$).

Wykres funkcji liniowej



Monotoniczność funkcji

Przebieg funkcji liniowej określa jej wykres, czyli prosta przecinająca oś x pod kątem, którego tangens jest współczynnikiem kierunkowym prostej.

Jeżeli $m > 0$, to f jest funkcją rosnącą, czyli spełniony jest warunek

Funkcja rosnąca

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1)) .$$

Jeśli $m < 0$, to f jest funkcją malejącą, czyli spełniony jest warunek

Funkcja malejąca

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) < f(x_1)).$$

Monotoniczność funkcji

Dla uzupełnienia terminologii:

Definicja

Funkcję nazywa się funkcją niemalejącą jeśli

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) \geqslant f(x_1))$$

Funkcję nazywa się funkcją nierosnącą jeśli

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) \leqslant f(x_1)).$$

Czasami funkcję rosnącą nazywa się ściśle rosnącą, a malejącą — ściśle malejącą.

Mimo że nie ma tu powszechnie przyjętej terminologii, nazewnictwo nie prowadzi do dwuznaczności.

Potęgowanie

Znajomość funkcji liniowej nie wystarcza jednak do opisu procesów wzrostu występujących w biologii.

W fizjologii mamy często do czynienia z funkcjami potęgowymi, a przy opisie wzrostu populacji pojawiają się funkcje wykładnicze.

Potęgą liczby rzeczywistej a o wykładniku $n \in \mathbb{N}$ nazywamy iloczyn

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n}.$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba rzeczywista b zwana pierwiastkiem stopnia n z a, taka że $b^n = a$. Zapisujemy to

$$b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Dla liczb naturalnych $m, n \in \mathbb{N}$ i liczby rzeczywistej dodatniej a

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

W ten sposób określa się potęgę liczby o wykładniku $q \in \mathbb{Q}^+$.
Dla $p \in \mathbb{Q}^-$ mamy $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}}$, gdzie teraz $q = -p \in \mathbb{Q}^+$.

Dalej rozszerza się potęgowanie na przypadek wykładników rzeczywistych korzystając z gęstości liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych, czyli z faktu, że dowolnie blisko każdej liczby rzeczywistej znajdziemy liczbę wymierną.

Gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych

Wystarczy „obciąć” rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej dostatecznie daleko, by otrzymać liczbę wymierną oddaloną od danej liczby wymiernej o nie więcej niż chcemy.

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a, b \in \mathbb{R}^+$ i dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą następujące własności potęgowania, które można wyprowadzić z definicji

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x b^x = (ab)^x .$$

W oparciu o własności potęgowania definiuje się funkcję potęgową, wykładniczą oraz logarytmiczną.

Karły i olbrzymy

Znajomość funkcji potęgowych jest niezbędna do tego, by zrozumieć konsekwencje zróżnicowania wielkości zwierząt.

Problem

Rozważmy różne zwierzęta stałocieplne różniące się wielkością, ale o zbliżonym planie budowy ciała.

Wiadomo, że im większa powierzchnia ciała zwierzęcia, tym większa wymiana energii cieplnej z otoczeniem w stanie spoczynku.

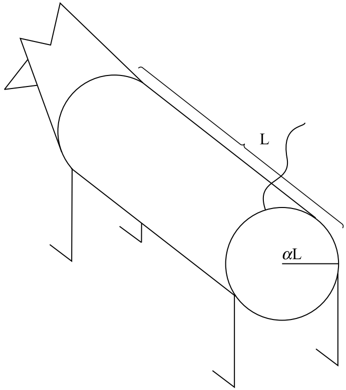
Pojawiają się pytania:

1. ile średnio energii w przeliczeniu na jednostkę masy ciała musi produkować zwierzę małe w stosunku do dużego, aby zrównoważyć stratę energii cieplnej w stanie spoczynku?
2. czy prawdą jest, że zwierzę 5 razy cięższe produkuje średnio 5 razy więcej energii?

Karły i olbrzymy

By odpowiedzieć na to pytanie znajdziemy zależność pomiędzy masą i powierzchnią ciała zwierzęcia.

Rozważmy różne gatunki zwierząt o schemacie budowy ciała jak na rysunku.



Ocenimy szacunkową masy i powierzchnię ciała: bierzemy pod uwagę jedynie tułów zwierzęcia (np. ssaka), który reprezentowany jest jako walec o wysokości L i promieniu podstawy αL.

L — rozmiar zwierzęcia mierzony od kości ogonowej do pierwszego kręgu szyjnego.

α — proporcje ciała, tu: stosunek promienia podstawy walca do jego wysokości.

Karły i olbrzymy

Objętość tułowia to w przybliżeniu objętość walca

$$V = L \cdot \pi(\alpha L)^2 = \alpha^2 \pi L^3.$$

Powierzchnia boczna wynosi

$$P = L \cdot 2\pi\alpha L = 2\pi\alpha L^2 \,.$$

Masa ciała M jest proporcjonalna do objętości, czyli

$$M = m\alpha^2 \pi L^3,$$

gdzie m to ciężar właściwy, czyli ciężar jednostki objętości (np. w [g/cm^3]) — zakładamy, że jest stały dla rozważanej grupy gatunków zwierząt.

Z ostatniego równania:

$$L = C\sqrt[3]{M}\,, \quad C = \frac{1}{\sqrt[3]{m\alpha^2\pi}}.$$

Karły i olbrzymy

Możemy wyrazić teraz powierzchnię boczną poprzez masę

$$P = C_0 M^{2/3}, \quad C_0 = 2\frac{\sqrt[3]{\pi\alpha}}{\sqrt{m^3}}.$$

Tę zależność nazywa się czasem regułą powierzchni.

Utratę ciepła określamy jako

$$E(M) = E_0 C_0 M^{\frac{2}{3}},$$

gdzie stała E_0 określa stratę ciepła na jednostkę powierzchni ciała.

Wniosek

Strata ciepła $S(M)$ przypadająca na jednostkę masy ciała wynosi

$$S(M) = \frac{E(M)}{M} = \frac{E_0 C_0 M^{2/3}}{M} = E_0 C_0 M^{-1/3} = \frac{E_0 C_0}{\sqrt[3]{M}}$$

$S(M)$ wzrasta nieograniczenie, gdy M zbliża się do 0 i maleje do zera gdy M rośnie nieograniczenie.

Karły i olbrzymy

Wniosek

Zwierzęta o małej masie mają niekorzystny stosunek powierzchni do masy i dlatego tempo metabolizmu mierzonego jako ilość energii produkowana w jednostce czasu na jednostkę objętości ciała musi być znacznie większa niż u zwierząt dużych, po to aby zrównoważyć stratę ciepła.

Porównajmy stratę ciepła u zwierząt różniących się pięciokrotnie masą ciała

$$\frac{E(5M)}{E(M)} = \frac{E_0 C_0 (5M)^{2/3}}{E_0 C_0 M^{2/3}} = 5^{2/3} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \approx 2,92\,.$$

Przy przyjętych założeniach, zwierzę pięciokrotnie cięższe traci jedynie ok. trzykrotnie więcej ciepła.

Z tych powodów małe zwierzę musi jeść znacznie więcej niż duże w stosunku do własnej masy ciała.

Karły i olbrzymy

Dla przykładu:

- sikora modra ważąca 11g musi codziennie zjeść pokarm o masie 30% masy swojego ciała,
- drozd śpiewak ważący 89g — 10%,
- myszołów zaś ważący 900g — $4,5\%$.

Wynika stąd, że średnio biorąc, zwierzęta małe są bezustannie zajęte poszukiwaniem pokarmu i zarazem bardzo wrażliwe na głód.

Dla przykładu ryjówka nie może obejść się bez pokarmu dłużej niż 3 godz.

Można więc stwierdzić, że istot inteligentnych, rozwijających kulturę i osiągających rozmiary ryjówki, w warunkach ziemskich być nie może. Warunkiem rozwoju kultury jest bowiem pewna doza czasu wolnego do dyspozycji.

Jest to zarazem silny argument przeciwko istnieniu krasnoludków.

Funkcja potęgowa

Jeśli wykładnik $p > 0$ jest ustalony, a podstawa jest zmienną (argumentem funkcji), oznaczamy ją przez x, to taką funkcję nazywamy funkcją potęgową, czyli

$$x \mapsto x^p.$$

Jeśli $p > 0$ i $p \in \mathbb{R}$, to funkcja potęgowa jest zawsze dobrze określona dla $x > 0$.

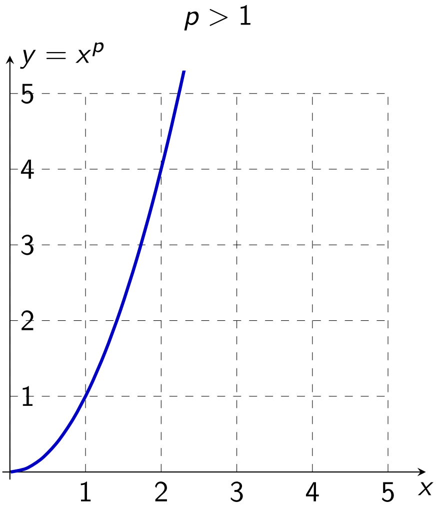
Funkcję, która przyporządkowuje liczbie $x > 0$ liczbę $f(x) = \sqrt[n]{x}$ można nazwać funkcją pierwiastkową, choć w istocie jest to funkcja potęgowa $f(x) = x^{1/n}$.

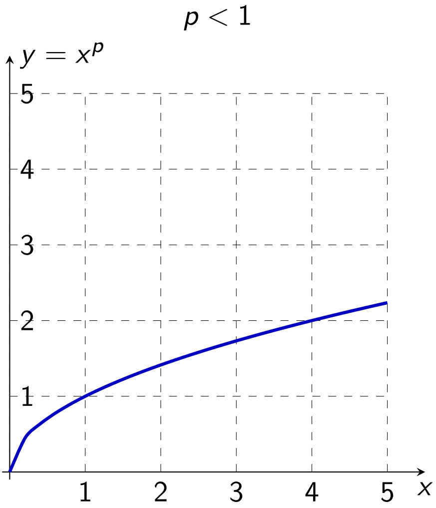
Zwróćmy uwagę, że funkcja pierwiastkowa $f(x) = \sqrt[n]{x}$ jest funkcją odwrotną do $g(x) = x^n$, gdyż

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x \text{ dla } x > 0,$$

czyli $g^{-1}(x) = f(x)$.

Funkcja potęgowa





Funkcja wykładnicza

Jeśli podstawa $a > 0$ jest ustalona, a zmienia się wykładnik, oznaczany przez x, to taką funkcję nazywamy funkcją wykładniczą

$$x \mapsto a^x.$$

Jeżeli $a > 1$, to im większy argument funkcji wykładniczej, tym większa jej wartość — w tym przypadku funkcja wykładnicza jest funkcją rosnącą.

Jeśli $a \in (0\,,1)$, to funkcja wykładnicza jest funkcją malejącą. Dlatego, że dowolną liczbę $a \in (0\,,1)$ można przedstawić jako odwrotność liczby $A = 1/a > 1$.

Wtedy zaś $a^x = \frac{1}{A^x}$ i skoro mianownik w tym ilorazie jest funkcją rosnącą, to funkcja $x \mapsto a^x$ jest funkcją malejącą.

Funkcja wykładnicza jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Funkcja wykładnicza w biologii

Jeśli nie występują czynniki ograniczające wzrost populacji to jej liczebność w czasie wyraża się poprzez **funkcję wykładniczą**.

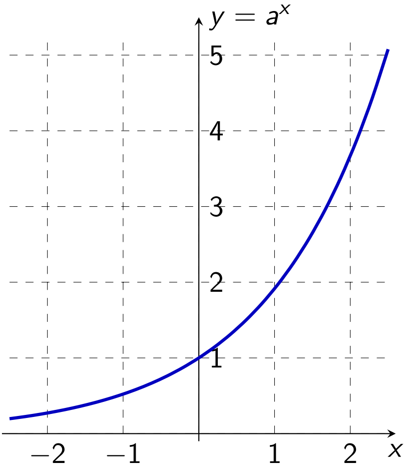
Widać to najłatwiej na przykładzie populacji komórek, powstałych w wyniku podziałów komórkowych jednej komórki.

Stan takiej populacji $N(t)$ w kolejnych momentach $t = 0\,, 1\,, 2\ldots$ podziałów komórkowych wynosi

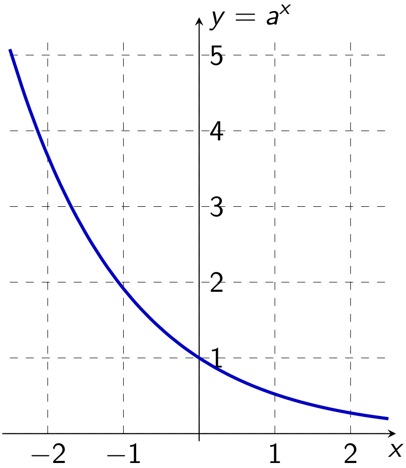
$$N(0) = 1\,, N(1) = 2\,, N(2) = 2^2\,, N(3) = 2^3\ \ldots\,, N(t) = 2^t\,.$$

Funkcja wykładnicza

$a > 1$, (tutaj $a = 1{,}9$)



$a < 1$ (tutaj $a = 0{,}52$)



Co to jest logarytm?

Logarytm

liczba y jest logarytmem z $x > 0$ przy podstawie a ($a > 0, a \neq 1$), co oznaczamy $y = \log_a x$ w.t.w. gdy $x = a^y$.

Inaczej: logarytm o podstawie a z x to potęga, do której trzeba podnieść a aby otrzymać x.

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Przykłady

$$2^3 = 8 \iff \log_2 8 = 3$$

$$10^4 = 10000 \iff \log_{10} 10000 = 4$$

Co to jest logarytm ?

Zatem funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej, bo jeśli

$$y \mapsto x = f(y) = a^y$$

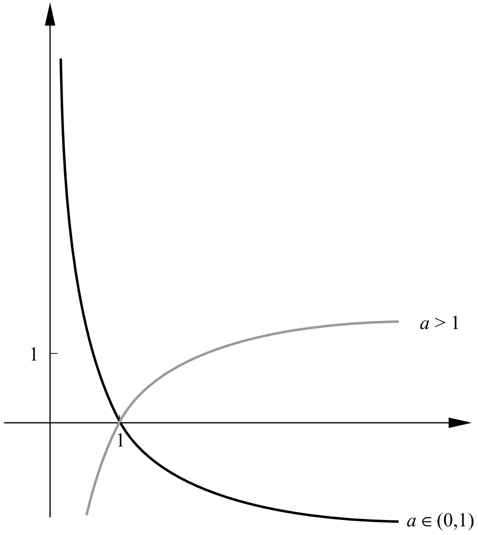
to funkcja logarytmiczna jest określona jako:

$$x \mapsto y = f^{-1}(x) := \log_a x.$$

Czyli

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x.$$

Ponieważ funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej, to wykres funkcji $y = f(x) = \log_a x$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = a^x$ względem prostej o równaniu $y = x$.



Wykres funkcji $\log_a x$ dla $a > 1$ i $\log_{\frac{1}{a}} x$.

W przypadku $a > 1$ funkcja $y = f(x) = \log_a x$ jest funkcją rosnącą do $+\infty$ wraz ze wzrostem argumentu x oraz do $-\infty$ przy x dążącym do 0.

Jeśli $a \in (0\,,1)$, to funkcja $y = f(x) = \log_a x$ jest funkcją malejącą do $-\infty$ przy $x \to +\infty$ oraz dąży do $+\infty$ gdy x zbiega do 0.

Własności logarytmu

Własności funkcji logarytm wynikają wprost z własności funkcji wykładniczej:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \log_a a = 1,$$

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a\left(x^y\right) &= y \log_a x \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_b x &= (\log_b a)\,(\log_a x) \\
\log_{\frac{1}{a}} x &= -\log_a x
\end{aligned}$$

Przedostatnia równość nazywa się wzorem na zamianę podstaw logarytmów, z którego wynika ostanie równanie.

Dla przykładu wykażemy pierwszą równość:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Podziałajmy na obie strony równości funkcją wykładniczą o podstawie a.

Dostajemy wtedy korzystając z własności potęgowania: $a^{z+w} = a^z a^w$

$$a^{\log_a(x\,y)} = a^{(\log_a x + \log_a y)} = a^{\log_a x} a^{\log_a y},$$

Z definicji logarytmu powyższe równanie jest równoważne

$$x\,y = a^{\log_a(x\,y)} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = x\,y.$$

Podobnie można wykazać pozostałe własności.

Dla przykładu wykażemy pierwszą równość:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Podziałajmy na obie strony równości funkcją wykładniczą o podstawie a.

Dostajemy wtedy korzystając z własności potęgowania: $a^{z+w} = a^z a^w$

$$a^{\log_a(x\,y)} = a^{(\log_a x + \log_a y)} = a^{\log_a x} a^{\log_a y},$$

Z definicji logarytmu powyższe równanie jest równoważne

$$x\,y = a^{\log_a(x\,y)} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = x\,y.$$

Podobnie można wykazać pozostałe własności.

Logarytm dziesiętny

Ze względu na to, że liczby zapisuje się przede wszystkim w systemie dziesiętnym, logarytmy przy podstawie dziesiętnej mają szczególne znaczenie. Oznaczając logarytm przy podstawie dziesiętnej pisze się tylko $\log x$, a nie $\log_{10} x$.

Przyjrzyjmy się własnościom logarytmu dziesiętnego

$$\log 1 = 0, \qquad \log 10 = 1,$$
$$\log 100 = \log 10^2 = 2, \quad \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

Logarytm dziesiętny danej liczby określa jej rząd wielkości, np. liczba $520 = 5,2 \times 10^2$ jest liczbą rzędu setek i jej logarytm jest liczbą z przedziału $(2\,,3)$, gdyż $10^2 < 520 < 10^3$ i $\log x$ jest funkcją rosnącą.

Logarytm naturalny

Używa się także logarytmów przy podstawie naturalnej, tzn. podstawą jest wtedy pewna liczba zwana stałą Eulera (na cześć jednego z najwybitniejszych matematyków, Leonarda Eulera, 1707 - 1783).

Liczbę tę oznacza się zawsze przez e. Jest to liczba niewymierna, w przybliżeniu $\mathrm{e} = 2,718\ldots$.

Liczba ta ma szereg ciekawych własności i tak jak liczby $1, 0$, i π pojawia się w różnych działach matematyki.

Logarytm naturalny oznaczamy $\log_{\mathrm{e}} x := \ln x$. Ze wzoru na zamianę podstaw logarytmów dostajemy

$$\ln x = \ln 10 \log x \approx 2,303 \log x.$$

Skala kwasowości pH

Logarytm dziesiętny danej liczby określa jej rząd wielkości w systemie dziesiętnym $\Rightarrow$ logarytmy służą do skalowania różnych wielkości fizycznych mogących przyjmować bardzo duże i bardzo małe wartości.

Przykładem jest skala kwasowości pH, która określa stopień kwasowości lub zasadowości roztworu na podstawie stężenia jonów hydroniowych H_3O^+

$$\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+],$$

$[H_3O^+]$ — stężenie jonów hydroniowych wyrażonych w molach na decymetr sześcienny.

Skala kwasowości pH

Stężenie jonów H_3O^+ w wodzie destylowanej w temperaturze 20°C wynosi dokładnie 10^{-7} mol/l. Zatem pH wody destylowanej wynosi 7 i zarazem pH $=$ 7 stanowi dokładnie środek skali pH odpowiadający roztworowi neutralnemu.

Poniżej $\mathrm{pH} = 7$ mamy roztwory kwasowe, a powyżej zasadowe.

Jednomolowy roztwór kwasu solnego ma pH równe 0.

Jednomolowy roztwór wodorotlenku sodu ma pH równe 14.

Skala Richtera

Skala Richtera określa siłę trzęsienia ziemi na podstawie logarytmu amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skala logarytmiczna jest skalą nieliniową:

trzęsienie Ziemi o sile w skali Richtera 5 oznacza skutki w postaci powszechnie odczuwalnych drgań Ziemi bez uszkodzeń budynków — takich trzęsień Ziemi zdarza się ponad 1000 rocznie.

Trzęsienie o sile 10 w skali Richtera, czyli dwukrotnie większej, oznacza kataklizm.

Takie trzęsienia Ziemi zdarzają się raz na 5–10 lat.

W tym przypadku amplituda drgań sejsmicznych jest $10^5 = 100\,000$ razy większa!

Współrzędne log – log

Logarytmy w biologii są stosowane bardzo często do graficznego przedstawienia wyników eksperymentów jeśli spodziewamy się, że zależność między wartościami wybranych cech jest funkcją potęgową lub wykładniczą.

Zależność potęgową spotykamy najczęściej w fizjologii, a wykładniczą w biologii populacyjnej.

Zamiast zwykłych współrzędnych liniowych (kartezjańskich) zmienia się je po to, aby w nowych współrzędnych zależność między cechami była funkcją liniową (**czyli najprostszą !**), której poszukiwane parametry znacznie łatwiej znaleźć na podstawie danych empirycznych (np. metodą najmniejszych kwadratów).

Załóżmy najpierw, że wartości cechy C_1 oznaczane przez x są związane za pomocą funkcji potęgowej z wartościami y cechy C_2.

Współrzędne log – log

Przyjmijmy zatem, że

$$y = bx^a,$$

a liczby $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ to pewne współczynniki.

Po zlogarytmowaniu obu stron równania dostajemy

$$\log y = \log\left(bx^a\right) = a\ \log x + \log b.$$

Oznaczając $Y = \log y$, $X = \log x$ oraz $B = \log b$ otrzymujemy zależność

$$Y = aX + B,$$

czyli zależność liniową w nowych współrzędnych, tzw. współrzędnych podwójnie logarytmicznych (w skrócie log – log).

Nazwa bierze się stąd, że zarówno na osi pionowej jak i na poziomej odznacza się wartości logarytmów odpowiednio y i x.

Współrzędne pół-log

Mamy

$$y = ba^x,$$

Po zlogarytmowaniu obu stron równania dostajemy

$$\log y = \log\left(ba^x\right) = x \ \log a + \log b.$$

Oznaczając $A = \log a$, $B = \log b$ oraz $Y = \log y$ otrzymujemy zależność

$$Y = Ax + B,$$

czyli zależność liniową w nowych współrzędnych, tzw. współrzędnych pół-logarytmicznych (w skrócie pół-log).

Nazwa bierze się stąd, że jedynie na osi pionowej odznacza się wartości logarytmów y, a oś x-ów pozostaje bez zmian.

Zadania–Zbiór zadań Bodnara, rozdz. 5.