ZADANIA DLA UCZESTNIKÓW SEMINARIUM
Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ A.D. 2004

1 Oznaczenia

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ (czasami $\mathbb{H}$ - kwaterniony),
- $M_n(\mathbb{K})$ – przestrzeń liniowa macierzy wymiaru $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{K}$ = przestrzeń liniowych przekształceń $\mathbb{K}^n$ (utożsamiamy macierz z przekształceniem),
- $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy odwracalnych = grupa odwracalnych przekształceń liniowych $\mathbb{K}^n$,
- $SL_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$ – podgrupa skądająca sie z macierzy o wyznaczniku 1,
- $B_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy górnotrójkątnych,
- $N_n(\mathbb{K}) \subset B_n(\mathbb{K})$ – podgrupa składająca się z macierzy mających jedynki na przekątnej,
- $T_n(\mathbb{K}) \subset B_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy diagonalnych
- $O_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$ – grupa przekształceń zachowujących formę kwadratową $\sum_{i=1}^n x_i^2$,
- $SO_n(\mathbb{K}) \subset O_n(\mathbb{K})$ – podgrupa skądająca sie z macierzy o wyznaczniku 1,
- $SO_{k,l} \subset SL_n(\mathbb{R})$ dla $k + l = n$ – grupa macierzy zachowująca formę kwadratową $\sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$,
- $SO_n = SO_{n,0} = SO_n(\mathbb{R})$
- $Spin_n$ jest dwukrotnym nietrywialnym nakryciem SO_n. Dla $n > 2$ jest to nakrycie uniwersalne.
- $U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ – grupa przekształceń zachowujących standardowy iloczyn Hermitowski,
- $SU_n(\mathbb{K}) \subset U_n(\mathbb{K})$ – podgrupa skądająca sie z macierzy o wyznaczniku 1,
- $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subset GL_{2n}(\mathbb{K})$ – grupa przekształceń zachowujących formę antysymetryczną zadaną przez macierz blokową $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Zadania o grupach liniowych

2.1 Znaleźć wymiary topologiczne grup opisanych w §1.

2.2 Które z grup w §1 są zwarte?

2.3 Znaleźć maksymalne podgrupy zwarte grup z §1.

2.4 Udowodnić: $Sp_{2n}(\mathbb{K}) \subset SL_{2n}(\mathbb{K})$.

2.5 Pokazać, że jeśli $A \in Sp_{2n}(\mathbb{K})$ to $A^T \in Sp_{2n}(\mathbb{K})$.

2.6 Udowodnić: $U(n) \simeq O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

2.7 Uogólnić powyższą formułe, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$, a $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{H}$.

2.8 Udowodnić, że $SO_{k,l}$ dla $k, l > 0$ ma dwie składowe.

2.9 Znaleźć dyfeomorfizm $SO_3(\mathbb{R})$ z $\mathbb{RP}^3$.

2.10 Niech $S^3 \subset \mathbb{H}$ będzie sferą kwaternionów o normie jednostkowej. Jest to grupa ze względu na mnożenie. Wykazać, że $S^3 \simeq SU_2$.

2.11 Znaleźć surjekcję $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$.

2.12 Znaleźć surjekcję $SU_2 \times SU_2 \to SO_4(\mathbb{R})$.

2.13 Znaleźć surjekcję $SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+_{1,3}$.

2.14 Znaleźć surjekcję $SL_2(\mathbb{R}) \to SO^+_{1,2}$.

2.15 Znaleźć surjekcję $SO_4(\mathbb{R}) \to SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$.

2.16 Znaleźć centrum $GL_n(\mathbb{K})$.

2.17 Czy U_n jest zespoloną grupą Lie?

2.18 Udowodnić, że $GL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n_{>0} \times N_n(\mathbb{R})$ jako przestrzenie topologiczne. Utożsamiamy tu $\mathbb{R}^n_{>0}$ z macierzami diagonalnymi. (Ortogonalizacja Gramma-Schmidta)

2.19 Uogólnić powyższy rozkład dla grup z §1. (Rozkład Iwasawy - KAN.)

2.20 Pokazać, że każdą macierz M można zapisać jednoznacznie jako iloczyn macierzy symetrycznej dodatnio określonej i ortogonalnej. Udowodnić, że jeśli $M \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, to macierz ortogonalna jest z grupy $U(n)$. (Utożsamiamy tu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$.)

2.21 Pokazać, że przestrzeń wszystkich iloczynów skalarnych w $\mathbb{R}^n$ jest homeomorfoczna z przestrzenią euklidesową wymiaru $n(n+1)/2$.

2.22 Udowodnić: $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup B_n(\mathbb{K})\pi B_n(\mathbb{K})$, gdzie π przebiega macierze permutacji współrzędnych. (Rozkład Bruhat.)

2.23 Niech $SU_{1,1} \subset SL_2(\mathbb{C})$ będzie grupą zachowującą formę $1\frac{1}{2}$–liniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sprawdzić, że $SU_{1,1}$ składa sie z macierzy postaci $\begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ oraz jest izomorficzna z $SL_2(\mathbb{R})$.

2.24 Niech $G = SL_2(\mathbb{C})$.
a) wykazać, że $G = [G, G]$,
b) znaleźć $Z(G)$,
c) wykazać, że $G/Z(G)$ jest prosta.

2.25 Wykazać, że nie istnieje monomorfizm z grupy Heisenberga do grupy liniowej. (Patrz [Segal] str. 83.)

3 Exp dla macierzy

3.1 Udowodnić, że dla $A \in M_n(\mathbb{K})$ szereg $\exp(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ jest zbieżny oraz $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$.

3.2 $det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

3.3 Jeśli $AB = BA$ to $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

3.4 Wyrażenie $\log(\exp(A)\exp(B)) = A + B + \ldots$ traktujemy w sposób formalny od zmiennych nieprzemiennych A i B. Znaleźć rozwinięcie aż do wyrazów w trzeciej potędze. (Wzory Campbella–Hausdorfa.)

3.5 Udowodnić, że exp zadaje utożsamienie $M_n(\mathbb{K})$ z przestrzenią styczną $T_I GL_n(\mathbb{K})$.

3.6 Znaleźć podprzestrzenie styczne do podgrup opisanych w §1.

3.7 Udowodnić, że exp jest surjektywny dla $GL_n(\mathbb{C})$, ale nie dla $SL_n(\mathbb{C})$ czy dla $GL_n(\mathbb{R})^+$ ($det > 0$) dla $n > 1$.

3.8 Rozważamy 2-liniową (nad $\mathbb{R}$) formę określoną na $\mathbb{H}^n$ wzorem $\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_j \overline{y_j}$. Niech G będzie grupą przekształceń $\mathbb{H}$-liniowych zachowujących ϕ. Wykazać, że G jest zwarta oraz algebra Liego $Lie(G) = sp_{2n}(\mathbb{C})$.

3.9 Czy istnieje zwartą grupa G taką, że $Lie(G) = sl_2(\mathbb{R})$?

3.10 Podać jawnie izomorfizm:
a) $su_2 \simeq so_3(\mathbb{R})$;
b) $sl_2(\mathbb{C}) \simeq so_3(\mathbb{C})$.

3.11 Rozważyć dzialanie $SL_4(\mathbb{C})$ na $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ i wykazać izomorfizmy
a) $sl_4(\mathbb{C}) \simeq so_6(\mathbb{C})$,
b) $sp_4(\mathbb{C}) \simeq so_5(\mathbb{C})$.

4 Zadania ogólne

4.1 Wykazać, że grupa Lie dyfeomorficzna z S^1 jest izomorficzna z S^1.

4.2 Składowa spójna jedynki jest podgrupą normalną.

4.3 Niech G będzie spójną grupą Lie. Udowodnić, że każda normalna dyskretna podgrupa jest w centrum ZG.

4.4 Dla spójnej grupy G udowodnić. że $G/(Z)G$ ma trywialne centrum.

4.5 Udowodnic, że grupa podstawowa grupy Lie jest abelowa.

4.6 $*$ Udowodnić, że druga grupa homotopii grupy Lie jest trywialna.

4.7 Udowodnić, że spójne nakrycie grupy Lie wraz z wybranym przeciwobrazem jedynki ma naturalną strukturę grupy Lie.

4.8 Niech A będzie algebrą nad $\mathbb{K}$, ($\dim A < \infty$). Wykazać, że grupa automorfizmów A jest grupą Lie. Podać ciekawe przykłady.

4.9 Niech G będzie spójną grupą Lie, a $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem. Wykazać, że ϕ jest wyznaczone przez pochodną w jedyce.

4.10 Udowodnić, że każda zwarta spójna zespolona grupa Lie jest abelowa.

4.11 Na górnej półpłaszczyźnie $\mathbb{C}$ nie można wprowadzić struktury zespolonej grupy Lie.

4.12 Niech K będzie maksymalną podgrupą zwartą w spójnej grupie Lie G. Udowodnić, że G/K jest homeomorficzne z przestrzenią euklidesową.

4.13 Forma Killinga $\langle X, Y\rangle = Tr(ad(X) \circ ad(Y))$ na algebrze Lie zwartej grupy jest niedodatnio określona. Dla grupy zwartej i prostej jest ujemnie określona. (Przypomnienie: $ad(X) : Lie(G) \to Lie(G)$, $ad(X)(Y) = [X, Y]$.)

4.14 Niech $\mathbf{g}$ będzie algebrą Lie. Dla $X, Y, Z \in \mathbf{g}$ niech $\Phi(X, Y, Z) = \langle X, [Y, Z]\rangle$. Wykazać, że Φ jest antysymetryczną formą, niezmienniczą ze względu na działanie $\mathbf{g}$ (poprzez ad).

4.15 Niech G będzie spójną grupą Lie, a H jej podgrupą. Wykazać, że jeśli $\dim H = \dim G$, to $H = G$.

4.16 Jaka jest grupa automorfizmów torusa n-wymiarowego?

4.17 Załóżmy, że grupa G jest spójna. Wykazać, że jądrem reprezentacji dołączonej $Ad : G \to GL(\mathbf{g})$ jest centrum $Z(G)$.

4.18 Niech $H \subset G$ będzie spójną podgrupą. Wykazać, że G/H jest rozmaitością orientowalną.

4.19 Niech A i B będą macierzami. Definiujemy szereg formalny o wyrazach macierzowych $\sum_{i=1}^{\infty} M_i t^i = \log(\exp(tA)\exp(tB))$. Udowodnić, że wsystkie jego współczynniki M_i wyrażają się przez A, B oraz komutatory.

4.20 Niech $\mathbf{g}$ będzie algebrą Liego oraz $\mathbf{h}$ podalgebrą Liego, która jest ideałem w $\mathbf{g}$. Niech G będzie jednospójną grupą Liego z algebrą $\mathbf{g}$. Udowodnić, że podgrupa odpowiadająca $\mathbf{h}$ jest domknięta.

4.21 Wykazać, że centrum jednospójnej grupy Lie nie zawiera $S^1 \times S^1$.

4.22 Niech $F(n)$ oznacza algebrę macierzy o współczynnikach w F, oraz C_i rzeczywistą algebrę Cliforda dla niezdegenerowanej formy ujemnie określonej. Udowodnić:

$$C_1 \simeq \mathbb{C}, \quad C_2 \simeq \mathbb{H}, \quad C_3 \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \quad C_4 \simeq \mathbb{H}(2),$$

$$C_5 \simeq \mathbb{C}(4), \quad C_6 \simeq \mathbb{R}(8), \quad C_7 \simeq \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \quad C_4 \simeq \mathbb{R}(16),$$

oraz

$$C_{k+8} \simeq C_k \otimes \mathbb{R}(16).$$

[Husemoler II,§11.5]

4.23 Znaleźć wektory najwyższej wagi dla reprezentacji spinorowych.

4.24 Wykazać, że grupa $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ jest jednospójna.

4.25 Niech X będzie gładką kwadryką w $\mathbb{C}^n$ zadaną wzorem $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Znaleźć $SO_n(\mathbb{R})$-ekwiwariantny dyfeomorfizm X z przestrzenią styczną TS^{n-1}.

4.26 Opisać rozkłady Bruhata dla SU_2 i SO_3.

27 listopad 2007