Zliczanie dzielników

Zdalne seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
22-23.05.2020 r., platforma Zoom

Zadanie 1. *Znajdź liczbę całkowitą dodatnią mającą cztery dzielniki dodatnie, jeśli wiadomo, że jednym z tych dzielników jest 49.*

Rozwiązanie. Niech $n = 49k$ będzie szukaną liczbą, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Próbujemy wypisać jakieś dzielniki liczby $49k$. Na pewno należą do nich 1, k oraz $49k$, ale też $7k$, 7, 49. Wypisaliśmy w ten sposób sześć liczb. Oznacza to, że któreś z nich są takie same. Na pewno nie są takie same żadne z trzech liczb: $1, 7, 49$, ani też żadne z trzech liczb: $k, 7k, 49k$. Trzeba więc zbadać pozostałe możliwości. Dla $k = 1$ nasza liczba to 49, która ma tylko trzy dzielniki: 1, 7, 49. Jeśli $k = 7$, to mamy liczbę $343 = 7^3$. Ona ma tylko cztery dzielniki. Są to 1, 7, 49, 343. Możliwość, że $7 = 7k$ odpada, bo wtedy $k = 1$, a to już wykluczyliśmy. Wreszcie, może 49 równe jest $k, 7k$ lub $49k$? Jeśli $k = 49$, to nasza liczba to 7^4. A zatem ma ona... 5 dzielników! Są to $1, 7, 7^2, 7^3, 7^4$. Przypadki, gdy 49 równa jest $7k$ lub $49k$ już rozważyliśmy. A zatem jest tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania – 343. ■

Zadanie 2. *Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie podzielne przez* 5 *i mające dokładnie* 5 *dzielników naturalnych.*

Rozwiązanie. Skoro mamy pięć dzielników, to jeden z dzielników jest pierwiastkiem szukanej liczby. Szukamy więc kwadratu podzielnego przez 5. Każdy kwadrat podzielny przez 5 musi być podzielny przez 25. Rzeczywiście: $5k = n^2$. A więc n jest podzielne przez 5, a n^2 przez 25. Czyli szukana przez nas liczba jest podzielna przez 25. Ma zatem dzielniki: 1, 5, 25, i jeszcze inne dwa. Jedno rozwiązanie widzimy od razu: liczba 5^4 ma 5 dzielników. Czy są inne rozwiązania? ■

Zadanie 3. *Wykaż, że dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.*

Rozwiązanie. Niech d będzie dzielnikiem liczby n. Wóczas n/d również jest dzielnikiem liczby n. Istnieje co najwyżej jedno d takie, że $n/d = d$. Jeśli więc istnieje, to $n = d^2$, a jeśli nie, to n nie jest kwadratem. ■

Zadanie 4. *(Szwecja, 2006) Liczby całkowite dodatnie a oraz b mają odpowiednio po 99 oraz 101 dodatnich dzielników. Czy iloczyn ab może mieć dokładnie 150 dodatnich dzielników?*

Rozwiązanie. Liczby a i b muszą być kwadratami, a zgodnie z założeniem ab nie może być kwadratem, bo ma parzyście wiele dzielników. Ale iloczyn dwóch kwadratów to kwadrat, czyli z jednej strony ab musi być kwadratem, z drugiej – nie może. Sprzeczność. Nie ma zatem takich liczb a, b. ■

Zadanie 5. *(Szwajcaria, 1998) Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^2 + 11$ ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że $p^2 + 11$ jest dla $p > 4$ podzielne przez 3 i przez 4. A to znaczy, że $p^2 + 11$ jest podzielne przez 12, które ma 6 dzielników. Istotnie, liczba pierwsza $p > 4$ ma postać $6k + 1$ lub $6k + 5$, dla pewnego k. Stąd:

$$(6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1, \quad (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25.$$

Obydwa powyższe wyrażenia powiększone o 11 dają liczbę podzielną przez 12 (i nie równą 12, bo $p > 4$). Zatem $p^2 + 11$ ma więcej dzielników, niż 12, czyli ma ich więcej niż 6, co jest niemożliwe. Pozostaje rozpatrzyć $p = 2$ oraz $p = 3$.
■

Zadanie 6. *Niech a będzie najmniejszą oraz A – największą z n różnych liczb całkowitych dodatnich. Pokaż, że najmniejsza wspólna wielokrotność owych n liczb jest nie mniejsza niż iloczyn $n \cdot a$ oraz, że największy wspólny dzielnik owych n liczb jest nie większy niż iloraz $\frac{A}{n}$.*

Rozwiązanie. Uporządkujmy owe n liczb całkowitych dodatnich: $a = a_1 < a_2 < \ldots, < a_n = A$. Niech m będzie ich najmniejszą wspólną wielokrotnością, zaś d ich największym wspólnym dzielnikiem. S

$$\frac{m}{a_n} < \frac{m}{a_{n-1}} < \ldots < \frac{m}{a_1} = \frac{m}{a}.$$

Z drugiej strony:

$$\frac{a_1}{d} < \frac{a_2}{d} < \ldots < \frac{a_n}{d} = \frac{A}{d}.$$

Mamy więc dwa rosnące ciągi złożone z n liczb całkowitych a zatem zarówno m/a, jak i A/d musza być równe co najmniej n. Stąd $m \geqslant na$ oraz $d \leqslant A/n$. ■

Zadanie 7. *(Gazetka OMJ Kwadrat #11) Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od* 1 *do* 1000*, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez* 3 *itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik* 1000 *razy?*

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli spojrzymy na przykład na żarówkę o numerze 100, to które przełączenia jej dotyczyły? Oczywiście pierwsze, bo wtedy zapalono wszystkie światła. Potem drugie, bo 100 dzieli się przez 2, a więc w drugiej operacji zgaszono żarówkę o numerze 100. Trzecie przełączenie nie dotyczyło 100, bo 3 nie jest dzielnikiem 100. Czwarte przełączenie zmieniło stan żarówki o numerze 100. Włączyło ją ponownie, bo 4 jest dzielnikiem 100. Czy widzicie Państwo zależność? Żarówka o numerze 100 została przełączona tyle razy, ile dzielników ma liczba 100. I to dotyczy każdej innej żarówki. Ale to nie wszystko. Udało nam się jakoś połączyć problem z liczbą dzielników, ale jak rozpoznać żarówki, które po 1000 przełączeń pozostały zapalone? Otóż skoro zaczęliśmy od zgaszonych żarówek, a potem każda żarówka poddana jest na przemian zapalaniu i gaszeniu, to po zakończeniu przełączania zapalone są te, których stan zmienił się... nieparzyście wiele razy! A zatem zapalone zostaną tylko żarówki o tych numerach, których liczba dzielników jest nieparzysta! Ale wiemy dokładnie jakie to numery. Są to kwadraty liczb mniejszych od 1000. Jest ich 31. ■

Zadanie 8. *(Gazetka OMJ Kwadrat #12) Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite podzielne przez* 100*, które mają* 15 *dzielników.*

Rozwiązanie. Szukana liczba ma 15 dzielników. Zauważmy, że we wzorze na liczbę dzielników występują jedynie liczby większe od 1. A liczba 15 ma tylko jeden rozkład na iloczyn liczb całkowitych innych niż 1 i 15, czyli rozkład $3 \cdot 5$. Oznacza to, że szukana liczba ma tylko dwa czynniki pierwsze. Jeden musi mieć krotność 2, a drugi – krotność 4. Wiemy też, że nasza liczba jest podzielna przez 100, a więc na ma pewno w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby pierwsze wchodzące do rozkładu 100, czyli iloczyn $2^2 \cdot 5^2$. A zatem ta liczba to $2^2 \cdot 5^4 = 2500$ lub $2^4 \cdot 5^2 = 400$. ■

Zadanie 9. *(Gazetka OMJ Kwadrat #12) Czy liczba o dokładnie* 100! *dzielnikach dodatnich może być sześcianem liczby całkowitej?*

Rozwiązanie. NIE. Sześcian liczby całkowitej ma rozkład na czynniki pierwsze, w którym każda potęga liczby pierwszej jest dzielnikiem liczby 3 (`dlaczego`?). Oznacza to, że iloczyn występujący we wzorze na liczbę dzielników, to iloczyn liczb dających resztę 1 z dzielenia przez 3 (`dlaczego`?) A zatem liczba dzielników sześcianu nie jest podzielna przez 3. Natomiast liczba $100! = 2 \cdot 3 \cdot 98!$ jest podzielna przez 3. ■

Zadanie 10. *(LXIV OM, zawody I stopnia) Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeśli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.*

Rozwiązanie. Niech $n = 2^k \cdot l$, gdzie l jest dodatnią liczbą nieparzystą. Suma parzystych dzielników liczby n jest parzysta, jeśli więc suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest nieparzysta, to nieparzystych dzielników n jest nieparzyście wiele. Liczba dzielników n równa jest przy tym iloczynowi liczby dzielników w 2^k razy liczba dzielników l. Zauważmy, że każdy nieparzysty dzielnik liczby n musi być dzielnikiem liczby l. A zatem l jest kwadratem pewnej liczby całkowitej m. A zatem $n = 2^k \cdot m^2$. Jeśli k jest parzysta, to $k/2$ jest całkowita nieujemna i n jest kwadratem:

$$n = \left(2^{\frac{k}{2}} \cdot m\right)^2.$$

Jeśli zaś k jest nieparzysta, to liczba $k - 1/2$ jest całkowita i wtedy n jest podwojonym kwadratem:

$$n = 2 \cdot \left(2^{\frac{k-1}{2}} \cdot m\right)^2.$$

■

Zadanie 11. *(Gazetka OMJ Kwadrat #12) Czy istnieje taka liczba całkowita $n > 2$, że liczba $n!$ ma dokładnie 101 dodatnich dzielników?*

Rozwiązanie. NIE. Idea jest taka, że jeśli liczba dzielników dodatnich $D(n)$ liczby całkowitej n jest liczbą pierwszą, to liczba ta jest potęgą liczby pierwszej. Wynika to z faktu, że dla liczb względnie pierwszych m, n mamy $D(mn) = D(m)D(n)$. Tymczasem dla $n > 2$ liczba $n!$ nigdy nie jest potęgą liczby pierwszej (dlaczego?). ■

Zadanie 12. *(LVIII OM, zawody III stopnia) Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy białą, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy czarnymi. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.*

Rozwiązanie. Dla liczby całkowitej $k > 1$ niech $B(k)$ oznacza sumę białych dzielników liczby k, $C(k)$ – liczbę czarnych dzielników liczby k oraz niech $D(k) = B(k) - C(k)$. Szukamy takiego k, by $D(k) = 0$. Pokażemy najpierw, że dla dowolnych względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich l, m prawdziwa jest równość:

$$D(lm) = D(l) \cdot D(m).$$

Zobaczymy najpierw co wynika z tej równości, a potem ją pokażemy. Przypuśćmy, że dla pewnej $n >$ mamy $D(n) = 0$. Rozłóżmy n na iloczn potęg różnych liczb pierwszych:

$$n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_j^{r_j}.$$

Na mocy uzyskanego wzoru mamy:

$$D(n) = D(p_1^{r_1}) \cdot D(p_j^{r_j}) = 0.$$

Wobec tego istnieje liczba pierwsza p i liczba całkowita dodatnia r, dla których $D(p^r) = 0$. Jest to jednak niemożliwe: wszystkimi białymi dzielnikami p^r są liczby $1, p^2, p^4, \ldots$, a wszystkimi czarnymi dzielnikami – liczby $p, p^3, p^5, \ldots$, i w konsekwencji zachodzi równość

$$D(p^r) = 1 - p + p^2 - p^3 + \ldots + (-1)^r p^r,$$

zaś liczba stojąca po prawej stronie równości nie jest podzielna przez p, więc nie może być zerem.

Dowodzimy $D(lm) = D(l) \cdot D(m).$, dla $NWD(l, m) = 1$. Wyrazimy $B(lm)$ oraz $C(lm)$ przez liczby $B(l), B(m), C(l), C(m)$. Oczywiście każdy dodatni dzielnik d iloczynu lm ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $d = ab$, gdzie a jest dzielnikiem liczby l, zaś b jest dzielnikiem liczby m.

Suma wszystkich iloczynów postaci ab, gdzie a, b są białymi dzielnikami równa jest $B(l)B(m)$, zaś suma wszystkich takich iloczynów, w których dzielniki a, b są czarne wynosi $C(l)C(m)$. Licząc $B(lm)$ zauważamy, że dzielnik d liczby lm jest biały wtedy i tylko gdy l i m mają taki sam kolor. Zatem:

$$B(lm) = B(l)B(m) + C(l)C(m).$$

Skoro $B(lm) + C(lm) = B(l)B(m) + C(l)C(m) + B(l)C(m) + C(l)B(m)$, to mamy także:

$$C(lm) = B(l)C(m) + C(l)B(m).$$

Zatem

$$D(lm) = (B(l) - C(l))(B(m) - C(m)) = D(l)D(m).$$

■

Zadanie 13. *(Wietnam, 1992) Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $f(n)$ oznacza liczbę dzielników dodatnich liczby n, których cyfry jedności to 1 lub 9, oraz niech $g(n)$ oznacza liczbę dzielników dodatnich liczby n, których cyfra jedności to 3 lub 7. Udowodnić, że $f(n) \geqslant g(n)$.*

Rozwiązanie. Po pierwsze niech $n = 2^x \cdot 5^y \cdot k$, gdzie x, y są całkowite nieujemne oraz k jest nieparzysta, niepodzielna przez 5. Zauważmy, że $f(n) = f(k)$ oraz $g(n) = g(k)$. Istotnie, dzielniki n o cyfrach jedności $1, 3, 7, 9$ są nieparzyste i niepodzielne przez 5, więc są względnie pierwsze z 2 i 5. W rezultacie są też dzielnikami k, i to wszystkimi możliwymi. A zatem możemy zakładać, że n jest liczbą nieparzystą, niepodzielną przez 5.

Niech A będzie zbiorem liczb całkowitych o cyfrach jedności 1 lub 9, zaś B niech będzie zbiorem liczb całkowitych o cyfrach jedności 3 lub 7.

Rozważmy przypadek, gdy n należy do B. Wówczas biorąc dowolny jej dzielnik m z B mamy, że $\frac{n}{m}$ jest elementem A. W szczególności każdemu dzielnikowi n z B odpowiada dokładnie jeden dzielnik z A, czyli $f(n) = g(n)$.

Pozostaje rozważyć trudniejszy przypadek, gdy n jest elementem A, a więc ma cyfrę jedności 1 lub 9. Niestety podzielenie elementu z A przez dzielnik ze zbioru A może dać zarówno dzielnik z A, jak i z B, więc analogiczny argument jak wyżej nie zadziała. Musimy zbadać rozkład n na czynniki. Pokażemy, że w tym przypadku $f(n) > g(n)$.

Weźmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby n i oznaczmy przez a liczbę $p^{v_p(n)}$, czyli najwyższą potęgę p dzielącą n. Liczbę n/a oznaczamy jako b. Będziemy zliczać dzielniki n, osobno ze zbioru A i osobno ze zbioru B. Skoro $n = ab$, to każdy dzielnik d liczby n można przedstawić w sposób jednoznaczny jako iloczyn dzielnika d_a liczby a i dzielnika d_b liczby b. Jeśli d_a oraz d_b są z A, to d też. Jeśli d_a oraz d_b są z B, to d jest z A. Jeśli d_a należy do A oraz d_b należy do B, to d należy do B, i odwrotnie – jeśli d_a należy do B oraz d_b nalezy do A, to d należy do A. Wynikają stąd wzory:

$$f(n) = f(a)f(b) + g(a)g(b), \quad g(n) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Istotnie, aby jednak dostać dzielnik z A trzeba przemnożyć dwa dzielniki typu A lub dwa dzielniki typu B, zaś aby dostać dzielnik z B trzeba przemnożyc dwa dzielniki różnych typów. Na ile sposobów? Dzielnik liczby a ze zbioru A można wybrać na $f(a)$ sposobów, a dzielnik b ze zbioru A można wybrać na $f(b)$ sposobów. Zatem iloczyn tych dzielników można wybrać na $f(a)f(b)$ różnych sposobów. Osobno zliczamy dzielniki n typu A powstające przez przemnożenie dzielników typu B: te iloczyny można uformować na $g(a)g(b)$ sposobów. Stąd wzór na $f(n)$. Aby dostać dzielnik typu B trzeba przemnożyć dzielnik typu A z dzielnikiem typu B, stąd wzór na $g(n)$. A zatem:

$$f(n) - g(n) = f(a)f(b) + g(a)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(a) = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b)).$$

W szczególności teza $f(n) - g(n) > 0$ jest równoważna temu, że $f(a) - g(a) > 0$ oraz $f(b) - g(b) > 0$. Wystarczy więc, że rozstrzygniemy zadanie dla $n = p^k$, gdzie n jest elementem A, bo wtedy zadanie sprowadza się do rozstrzygnięcia nierówności $f(b) - g(b) > 0$, którą możemy wykonać analogicznie, jak dla a, wydzielając kolejny czynnik pierwszy.

Czym jest $f(p^k)$, gdzie $p \in A$? Jest to $k+1$. Czym jest $g(p^k)$, gdy $p \in A$? Jest to 0. Tu więc nierówność zachodzi. Czym jest $f(p^k)$, jeśli p należy do B? Wówczas pamiętamy, że k musi być parzyste i wtedy dzielniki z A to $1, p^2, p^4, \ldots, p^{[k/2]}$, czyli $f(p^k) = [k/2] + 1$. Natomiast $g(p^k)$ zlicza dzielniki postaci $g, g^3, \ldots, g^{k-1}$, których jest $[k/2]$. A zatem w obydwu przypadkach $f(n) > g(n)$, co kończy dowód. ■