Więcej o cechach

Zdalne seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
15-16.05.2020 r., platforma Zoom

Zadanie 1. *Podaj najmniejszą liczbę* 10*-cyfrową zapisaną różnymi cyframi, która dzieli się przez 36.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że suma cyfr podanej liczby to 45, a zatem jest to zawsze liczba podzielna przez 9. Trzeba zatem, by była to także liczba podzielna przez 4. Do tego wystarczy, by dwie jej ostatnie cyfry były podzielne przez 4. A zatem szukana liczba to 10234567896. ■

Zadanie 2. *Ile jest takich* 100*-cyfrowych liczb, których iloczyn cyfr jest równy* 6*, i które są parzyste?*

Rozwiązanie. Aby iloczyn cyfr danej liczby był równy 6, żadna z cyfr nie może być zerem i ostatnia cyfra musi być parzysta. Cyfrą jedności nie może być jednak 4, ani 8, bo liczby nie dzielą iloczynu cyfr. A zatem musi to być 6 lub 2. W pierwszym przypadku pozostałe cyfry są równe 1. W drugim przypadku pozostałe cyfry to 98 jedynek i jedna trójka. Takich liczb jest 99. A zatem wszystkich liczb o żądanej własności jest 100. ■

Zadanie 3. *Dane są liczby naturalne* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$*. Czy z tych liczb można ułożyć kwadrat magiczny?*

Rozwiązanie. Sumy liczb z każdego wiersza kwadratu magicznego są równe, więc suma wszystkich liczb w kwadracie magicznym, który ma 3 wiersze, jest podzielna przez 3. A zatem gdyby dało się z wymienionych liczb ułożyć kwadrat magiczny, to ich suma musiałaby być równa 3. Tak jednak nie jest, bo $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 10 = 46$. ■

Zadanie 4. *Czy cyfry* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę pierwszą?*

Rozwiązanie. Gdyby było to możliwe, wówczas suma cyfr owej liczby pierwszej byłaby równa 21, co stanowi liczbę podzielną przez 3. Skoro zaś liczba sześciocyfrowa jest większa od 3, to oznacza, że żadna liczba opisana w zadaniu nie może być pierwsza. ■

Zadanie 5. *Czy cyfry* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę podzielną przez 11?*

Rozwiązanie. Liczba jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica sumy cyfr na miejscach parzystych i miejscach nieparzystych jest podzielna przez 11. Zauważmy, że największa możliwa różnica, jaką można otrzymać odejmując trzy z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 6$ od trzech pozostałych to

$$4 + 5 + 6 - 1 - 2 - 3 = 9.$$

A zatem jeśli $1, 2, 3, 4, 5, 6$ da się ustawić w takiej kolejności, aby powstała liczba podzielna przez 11, to różnica sum cyfr na parzystych i nieparzystych miejscach musi wynieść 0. Zauważmy jednak, że w rozważanym zestawie liczb mamy 3 nieparzyste i trzy parzyste. Niezależnie od wyboru znaków w poniższym działaniu

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$$

dostajemy sumę sześciu liczb, z których trzy dają resztę 1, a trzy resztę 0 z dzielenia przez 2. A zatem ich suma jest nieparzysta. ■

Zadanie 6. *Każda spośród pewnych sześciu różnych cyfr jest niezerowa. Czy można te cyfry zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać* 6*-cyfrową liczbę podzielną przez 4?*

Rozwiązanie. Problemem zadania jest, że nie wiemy o jakich sześciu cyfrach mowa. Wiadomo jednak, że jedna z nich musi być parzysta. Okazuje się jednak, że przy specyficznym wyborze cyfr nie jest to możliwe. Weźmy cyfry $1, 3, 5, 7, 9$ oraz 4. Jedynym sposobem, aby uzyskać liczbę parzystą jest umieszczenie cyfry 4 na końcu. Jednak wówczas dwucyfrowa końcówka może być równa tylko $14, 34, 54, 74$ lub 94, a więc na mocy cechy podzielności przez 4, cała liczba nie jest podzielna przez 4. ■

Zadanie 7. *Z cyfr* $1, 2, \ldots, 8$ *utworzono dwie liczby* 4*-cyfrowe, wykorzystując każdą cyfrę dokładnie raz. Wykaż, że suma uzyskanych liczb jest podzielna przez 9.*

Dowód. Sposób pierwszy polega na skorzystaniu z faktu, że suma cyfr dowolnej liczby naturalnej daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co sama liczba. Idea jest bardzo prosta: widać ją bez problemu na przykładzie liczby czterocyfrowej n postaci: $1000a + 100b + 10c + d$, czyli też $999a + a + 99b + b + 9c + c + d$. A zatem jest jasne, że niezależnie od przydziału ośmiu cyfr do dwóch liczb 4−cyfrowych otrzymamy liczby, których sumy cyfr dodane do siebie dają taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak suma $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$. A zatem suma będzie liczbą podzielną przez 9. □

Zadanie 8. *Dane są liczby naturalne* a, b, c *spełniające warunek* $a \cdot b \cdot c = 71286$. *Uzasadnij, że co najmniej jedna z sum* $a + b$, $b + c$ *nie jest podzielna przez* 3.

Rozwiązanie. Suma cyfr liczby 71286 równa jest 24, a zatem jest to liczba podzielna przez 3, ale niepodzielna przez 9. Oznacza to, że tylko jedna z liczb a, b, c jest podzielna przez 3. Zauważmy, że gdyby obydwie powyższe sumy były podzielne przez 3, to jedna z sum miałaby za składnik jedną z liczb podzielnych przez 3. Wtedy jednak i drugi składnik tej sumy musiałby być podzielny przez 3, co przeczy wcześniejszym naszym obserwacjom. ■

Zadanie 9. *Uzasadnij, że liczba* $943^{87} - 243^{87}$ *jest podzielna przez* 4.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$943^{87} = \underbrace{(900 + 43)(900 + 43) \ldots (900 + 43)}_{87}.$$

Interesują nas tylko dwie ostatnie cyfry tego iloczynu. Po wymnożeniu nawiasów mamy składniki złożone z 87 czynników, z których tylko jeden składnik nie zawiera czynnika 900. Jeśli suma zawiera czynnik 900, to jej ostatnie dwie cyfry są zerami, na mocy cechy podzielności przez 100. A zatem o ostatnich dwóch cyfrach liczby 943^{87} decyduje to jakie są ostatnie dwie cyfry liczby 43^{87} – owego jedynego składnika powstałego z wymnożenia nawiasów wyżej, który nie jest podzielny przez 100. Podobnie jest dla 243^{87} – ostatnie dwie cyfry tej liczby są takie same, jak ostatnie dwie cyfry liczby 43^{87}. A zatem odejmujemy od siebie dwie liczby 943^{87}, 243^{87}, które mają identyczne dwie ostatnie cyfry. A zatem dwie ostatnie cyfry ich różnicy to dwa zera. Ta różnica jest zatem podzielna przez 100, a więc także przez 4. ■

Zadanie 10. *Udowodnij, że liczba* $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ *nie jest kwadratem liczby naturalnej.*

Rozwiązanie. Suma cyfr podanej liczby to $5 \cdot 40 + 1 \cdot 40$, czyli 240. Liczba ta jest zatem podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9. Nie może być zatem kwadratem liczby całkowitej. ■

Zadanie 11. *Czy liczba* $6\underbrace{77\ldots7}_{2019}1$ *jest podzielna przez* 2013*?*

Rozwiązanie. Mamy $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Suma cyfr opisanej liczby to $7 \cdot 2020$, co nie jest liczbą podzielną przez 3. A zatem opisywana liczba nie jest podzielne przez 2013. ■

Zadanie 12. *Czy liczba* $6\underbrace{77\ldots7}_{2021}1$ *jest podzielna przez* 2013*?*

Rozwiązanie. W tym przypadku suma cyfr wynosi $7 \cdot 2022$, czyli jest to liczba podzielna przez 3. Trzeba zatem sprawdzić podzielność przez 11 oraz 61. Podzielność przez 11 jest wtedy, gdy suma cyfr na parzystych miejscach pomniejszona o sumę cyfr na nieparzystych miejscach daje liczbę podzielną przez 11. A zatem liczba ta jest podzielna przez 11. A czy jest podzielna przez 61? Owszem, proszę zauważyć, że $61 \cdot 11 = 671$, $61 \cdot 111 = 6771$ itd. ■

Zadanie 13. *Po wymazaniu cyfry jedności pewnej liczby n, a następnie dodaniu do uzyskanej w ten sposób liczby 33-krotności cyfry jedności liczby n uzyskano liczbę 9400. Wykaż, że liczba n jest podzielna przez 47.*

Rozwiązanie. Niech b będzie ostatnią cyfrą n. Zapiszmy równanie, które wynika z treści zadania:

$$\frac{n-b}{10} + 33b = 9400.$$

A zatem po wymnożeniu przez 10 mamy $n + 329b = 9400$. W szczególności $n = 47(20 - 7b)$. ■

Zadanie 14. *Po wymazaniu cyfry jedności pewnej liczby n, a następnie odjęciu od uzyskanej w ten sposób liczby 14-krotności cyfry jedności liczby n uzyskano wielokrotność liczby 47. Wykaż, że liczba n jest podzielna przez 47.*

Rozwiązanie. Niech b będzie ostatnią cyfrą n. Zapiszmy równanie, które wynika z treści zadania:

$$\frac{n-b}{10} - 14b = 47m,$$

dla pewnego m całkowitego. A zatem po wymnożeniu przez 10 mamy $n - 141b = 470m$. W szczególności $n = 47(10m + 3b)$. O co chodzi w tym zadaniu (i poprzednim)? Chodzi o tworzenie własnych cech podzielności. Przepis jest taki: jeśli szukamy cechy podzielności przez liczbę m, niepodzielną przez 2 i przez 5, to szukamy taką liczbę x, że $10x$ daje resztę -1 z dzielenia przez m. Na przykład dla 47 jest to 14, ponieważ $140 = 3 \cdot 47 - 1$. Cecha działa tak: wymazujemy z m ostatnią cyfrę i odejmujemy x razy cyfrę jedności, którą usunęlismy. Jeśli n było podzielne przez m, to uzyskana liczba też musi być podzielna w ten sam sposób. Dlaczego to działa? ■

Zadanie 15. *Zapis dziesiętny liczby n składa się z bloków cyfr postaci $001, 002, \ldots, 999$ ustawionych obok siebie w pewnej kolejności (używamy wszystkich 999 bloków). Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 37.*

Rozwiązanie. Cecha podzielności przez 999 mówi, że liczba n jest podzielna przez 999 wtedy i tylko wtedy, gdy suma trzycyfrowych bloków tej liczby jest podzielna przez 999 (jesli liczba nie ma $3k$ cyfr, to z przodu dopisujemy zera). A zatem nasza liczba n dzieli się przez 999, bo suma liczb od 1 do 999 wynosi $999 \cdot 499$. A skoro liczba n jest podzielna prze 999, to także przez 37, bo $999 = 37 \cdot 27$. ■

Zadanie 16. *Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.*

Rozwiązanie. To zadanie nie jest na cechy, ale ważne by jakoś umieć do niego podejść. Chodzi o stosowanie reszt z dzielenia. Otóż wyliczenie pierwszych kilku przykładów:

$$2^2 + 2 = 6, \quad 3^2 + 2 = 11, \quad 5^2 + 2 = 27, \quad 7^2 + 2 = 51.$$

Czy coś z nich możemy odczytać? Otóż chciałbym wykazać, że dla $p \neq 3$ liczba $p^2 + 2$ jest podzielna przez 3. Jak to zrobić? Jeśli liczba p jest większa od 3, to nie jest podzielna przez 3, a zatem daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Gdy zatem weźmiemy liczbę p^2, ona zawsze daje resztę 1 z dzielenia przez 3. ■

Zadanie 17. *Dane są liczby naturalne a, b, c, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzw. każda cyfra liczby a występuje w jej zapisie dziesiętnym tyle samo razy, co w zapisie każdej z liczb b i c). Czy jest możliwe, aby $a + b + c = 10^{1001}$? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie. Nie jest to możliwe. Suma cyfr każdej z liczba a, b, c jest taka sama. A zatem suma $a+b+c$ daje taką samą resztę przy dzieleniu przez 3. W szczególności liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 3. Liczba 10^{1001} nie jest podzielna przez 3. ■

Zadanie 18. *Dla każdej liczby naturalnej możemy przeprowadzić następującą operację: bierzemy sumę wszystkich jej cyfr, następnie sumę wszystkich cyfr tak powstałej liczby itd., dopóki nie otrzymamy liczby jednocyfrowej. Przeprowadźmy tę operację na wszystkich liczbach naturalnych od 1 do 1000. Jakich cyfr otrzymamy więcej – jedynek czy dwójek?*

Rozwiązanie. Suma cyfr z danej liczby daje taką samą resztę przy dzieleniu przez 9, co ta liczba. A zatem dla każdej liczby od 1 do 1000 cyfra otrzymana w wyniku wielokrotnego sumowania cyfr ma taką samą resztę z dzielenia przez 9, co ta liczba. Zauważmy, że $1000 = 999 + 1$, a zatem 1000 daje resztę 1. Każda kolejna liczba całkowita daje kolejną resztą, a zatem wśród liczb od 1 do 999 jest tyle samo liczb dających resztę 1, co i resztę 2 z dzielenia przez 3. A zatem uwzględniają liczbę 1000 widzimy, że więcej otrzymamy 1. ■

Zadanie 19. *Pokaż, że wśród dowolnych 39 kolejnych liczb naturalnych musi istnieć taka, której suma cyfr dzieli się przez 11.*

Rozwiązanie. Niech m będzie liczbą, której suma cyfr dzieli się przez 11. Pokażemy, że taka liczba jest nie większa niż $m + 39$. Przyglądamy się ostatniej i przedostatniej cyfrze m.

- Jeśli ostatnia cyfra m nie wynosi 0, to dodawanie pisemne do m liczby 9 powoduje „przenoszenie". Co zmienia przenoszenie? Obniża cyfrę jedności o 1, a powiększa cyfrę dziesiątek o 1 chyba, że cyfra dziesiątek do 9. A więc dla przypadku gdy ostatnia cyfra to nie jest 0, a przedostatnia to nie jest 9 mamy rozwiązanie.
- Jeśli przedostatnia cyfra liczby m wynosi 9 – co wtedy? Okazuje się, że możemy dodać do m co najwyżej 10, aby otrzymać liczbę mającą na końcu dwa zera. Jeśli do tej powiększonej liczby zaczniemy dodawać 0, 1, ..., 19, to otrzymamy 19 liczb o sumie cyfr dających kolejne reszty z dzielenia przez 11. A więc jedna z nich ma sumę cyfr podzielną przez 11. A zatem do m dodaliśmy nie więcej niż 29 i dostaliśmy liczbę o sumie cyfr podzielne przez 11.
- Jeśli ostatnia cyfra m wynosi 0, a przedostatnia nie wynosi 8 ani 9, to $m + 29$ spełnia warunki zadania, bo nie mamy przy dodawaniu żadnego przenoszenia i do liczby o sumie cyfr 11 dodalismy liczbę o sumie cyfr 11 (bez przenoszenia).
- Ostatni przypadek jest gdy przedostatnia liczba wynosi 8. Tylko nas interesuje przypadek, gdy ostatnia cyfra to 0. W przeciwnym przypadku już mamy rozwiązanie. W tym jednak przypadku możemy dodawać do liczby o końcówce 80 liczbę 20 i otrzymać liczbę mającą na końcu dwa zera. Nie wiemy jaka jest suma cyfr (reszta z dzielenia przez 11), ale jak dodamy kolejne 19 liczb to suma cyfr będzie się stopniowo powiększa i jedna sum będzie podzielna przez 11.

■

Zadanie 20. *Znaleźć wszystkie liczby czterocyfrowe, w których cyfra tysięcy jest równa cyfrze setek, a cyfra dziesiątek - cyfrze jedności i które są kwadratami liczb całkowitych.*

Rozwiązanie. Z cechy podzielności przez 11 wiemy, ze szukana liczba jest podzielna przez 11. Jeśli ma być kwadratem, to musi być podzielna przez 121. A zatem $1000a + 100a + 10b = b = 121k^2$. Przekształcając otrzymujemy $100a + b = 11k^2$. A zatem $a + b = 11(k^2 - 9a)$. Zatem liczba $a + b$ jest podzielna przez 11. Wiemy, że b to ostatnia cyfra kwadratu, więc nie jest równa $2, 3, 7, 8$. Patrząc na powyższą sumę widzimy, że ostatnia nie może być też równa 0 lub 1. A zatem pozostają opcje: $4, 5, 6, 9$. Odpowiednie wartości a to $7, 6, 5, 2$, więc wartościami szukanej liczby mogą być jedynie $7744, 6655, 5566, 2299$. Tylko pierwsza z nich jest kwadratem liczby całkowitej. A zatem do m dodaliśmy nie więcej niż 39, otrzymując liczbę o sumie cyfr również 11. ■

Źródła:

1. Joanna Bednarczuk, Jerzy Bednarczuk: *Matematyczne gwiazdki*, Wydawnictwo Aksjomat 2019.
2. Wojciech Guzicki: *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, ORE 2013.
3. Daniar Musztari, Przygotowanie do olimpiad matematycznych, OWP „Adam" 1998.
4. Zadania z OMG, OMJ i gazetki *Kwadrat* #23, dostępne na `www.omj.edu.pl`.