Układanie równań

Warsztaty „Praca z uczniem zdolnym” organizowane przez UMCS
Arkadiusz Męcel (a.mecel@mimuw.edu.pl)
Zoom, 25.03.2022 r.

W zadaniach konkursowych dotyczących zapisu dziesiętnego popularne są dwa podejścia. Pierwsze – intuicyjne, oparte jest na regułach mnożenia pisemnego i cechach podzielności. Wykorzystujemy w nim następujące przedstawienie $m+1$-cyfrowej liczby n w postaci

$$n = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0},$$

gdzie a_0 jest cyfrą jedności liczby n, dalej a_1 jest cyfrą jedności liczby n, a_2 – cyfrą setek itd., przy czym $a_m \neq 0$. Drugie podejście jest formalne — oparte na reprezentacji tej samej liczby całkowitej dodatniej n w postaci:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad (*)$$

W przypadku zadań dotyczących liczb o małej liczbie cyfr notacje te uzupełniają się i nawet na poziomie szkoły podstawowej stosujemy niekiedy zapis postaci $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, gdzie $a \neq 0, b, c$ są cyframi.

Zadania olimpijskie wymagają nierzadko rozumowań dotyczących liczb naturalnych o dowolnej, nieustalonej z góry liczbie cyfr. Obydwa przedstawione wyżej podejścia są stosowalne do rozwiązywania i takich zadań. Każde podejście ma wady i zalety. Wadą pierwszego podejścia bywa zatarcie granicy między tym co oczywiste, a tym, co należy wytłumaczyć w rozwiązaniu. Jego zaletą jest intuicyjność. Zaletą drugiego podejścia jest uniwersalność. Wadą — możliwość „zaplątania” się w notacji i rachunkach tak, że nie widzimy już co się tak naprawdę w rozwiązaniu dzieje. Wymaga ono dużego wyrobienia i algebraicznej świadomości.

Naszym celem podczas tego, i następnego referatu, będzie zwrócenie uwagi na pewne proste własności wynikające ze wzoru $(*)$, które są na tyle intuicyjne, że nie wymagają, jak się wydaje, nawet formalnego przedstawiania go uczniom w ogólnej postaci (choć oczywiście do niej prowadzą). Wiążą się one z operacjami modyfikującymi zapis dziesiętny: dodawaniem lub usuwaniem z niego cyfr, a także ich przestawianiem. Algebraiczna interpretacja tych modyfikacji prowadzi do prostych równań i nierówności. Trudność polega tu nie tyle na ich rozwiązaniu, ale na ich poprawnym sformułowaniu. Niekiedy potrzeba tu sporej kreatywności. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.[1]

Zadanie 1. (XV OMJ, 1 etap) Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Kluczowym elementem zadania jest zapisanie w formie algebraicznej liczby powstałej przez dopisanie na końcu liczby n cyfry, powiedzmy c. Jest to liczba

$$10n + c.$$

Rzeczywiście, wynika to z intuicyjnie jasnej własności, której formalny dowód wymaga użycia wzoru $(*)$:

$$\overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 0} = 10 \cdot \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}.$$

To pozwala ułożyć równanie

$$10n + c = 13n,$$

co prowadzi do rozwiązań $n = 1, 2, 3$.

Przydałoby się teraz znaleźć więcej zadań, które mogłyby pomóc naszemu uczniowi w ułożeniu jeszcze kilku rozumowań podobnego typu. To typowa praca z zadaniami olimpijskimi – nie wystarczy zrozumienie jednego, potrzeba kilku lub kilkunastu takich zadań. Jakich zadań szukać? Oczywiście dostępne zbiory oferują mnóstwo propozycji w działach „równania”, również zadania z treścią, które w sposób naturalny prowadzą do układania równań. Zauważmy jednak, że w zadaniu wyżej trzeba było poczynić obserwację matematyczną: dopisanie na końcu liczby n cyfry c daje liczbę $10n + c$. Szukajmy zadań, gdzie będzie więcej takich pomysłów. A przede wszystkim – przy każdym zadaniu próbujmy stawiać jak najwięcej pytań, eksperymentować, bawić się dobrze.

[1] Czytelnika zainteresowanego znacznie większą liczbą (także trudniejszych) zadań w tej tematyce (usuwanie, dopisywanie, przestawianie cyfr) odsyłam do encyklopedycznego źródła podobnych ciekawostek – tomu drugiego *Podróży po Imperium Liczb* autorstwa prof. Andrzeja Nowickiego z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, zatytułowanego: *Cyfry liczb naturalnych* (152 strony). Rozwiązania można (w większości) znaleźć w starej, ale pięknej książce D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, W.F. Freeman and Company, San Francisco, Londyn, 1962.

Zadanie 2. Jeżeli w pewnej liczbie pięciocyfrowej n dopiszemy jedynkę z lewej strony, to otrzymamy pewną liczbę sześciocyfrową. Jeżeli zaś jedynkę dopiszemy z prawej strony tej liczby, to otrzymamy liczbę sześciocyfrową, która jest trzykrotnie większa od poprzednio otrzymanej liczby. Znajdź tą liczbę pięciocyfrową[2].

To zadanie jest przygrywką do zagadnień, którymi zajmować się będziemy jutro. Mamy w nim bardzo konkretną konfigurację, w której operujemy na liczbach o znanej liczbie cyfr. To, że po przeniesieniu cyfry z końca na początku (lub odwrotnie) uzyskujemy wielokrotność wyjściowej liczby nie jest oczywiste, a czasem po prostu nie jest wykonalne. W części zajęć dotyczącej układania nierówności, zobaczymy to wyraźnie.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Już wiemy jak zapisać liczbę powstałą przez dopisanie jedynki z prawej strony (na końcu) liczby n. Będzie to liczba

$$10n + 1.$$

Jak zapisać liczbę, która powstaje przez dopisanie jedynki z lewej strony (na początku)? Będzie to liczba

$$n + 100000.$$

Warto spróbować uogólnić tą obserwację. Jak wyglądałaby liczba powstała przez dopisanie z lewej cyfry 2? Oczywiście $n + 200000$, Ogólnie, dopisanie cyfry c do liczby m-cyfrowej n daje liczbę:

$$n + c \cdot 10^m,$$

co wynika z $(*)$, ale co jest również (na poziomie intuicji) następstwem algorytmu dodawania pisemnego.

Rozwiązanie naszego zadania jest teraz bardzo proste. Układamy równanie, w którym po lewej stronie umieszczamy liczbę powstałą przez dopisanie jedynki na końcu liczby n, a po prawej stronie umieszczamy trzykrotność liczby powstałej przez dopisanie jedynki do lewej stronie liczby n:

$$10n + 1 = 3(n + 100000).$$

Rozwiązaniem jest $x = 42857$. Nie jest to przypadkowa liczba[3].Trudne było nie tyle samo rozwiązanie tego równania, co jego sformułowanie.

Zadanie 3. (Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 1962) Znaleźć najmniejszą liczbę n zakończoną cyfrą 6 o tej własności, że przeniesienie cyfry 6 na początek liczby n da nam liczbę $4n$.

Jest kilka sposobów rozwiązania tego zadania, ale z naszego punktu widzenia interesujące będzie zapisanie liczby powstającej przez przeniesienie cyfry 6 z końca na początek zapisu dziesiętnego liczby n. W tym celu wprowadzimy (tylko na niby) nowe pojęcie: LICZBĘ dziesiątek liczby całkowitej n. Cóż to takiego? Jest to wynik dzielenia n przez 10, bez reszty. Jeśli $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$, to liczba dziesiątek n wynosi $\overline{a_m a_{m-1} \dots a_1}$.

Niech x będzie liczbą dziesiątek liczby n. Wiedząc, że na końcu n jest cyfra 6 mamy (ze znanych już własności):

$$n = 10x + 6.$$

Załóżmy teraz, że n ma m cyfr[4], To znaczy, że x ma ich $m - 1$. Co otrzymamy, próbując dopisać 6 z przodu liczby x? Nowa liczba to zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami

$$6 \cdot 10^{m-1} + x.$$

Teraz możemy ułożyć równanie wiążące $4n$ oraz liczbę, która powstała z n przez przestawienie ostatniej cyfry na początek:

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{m-1} + x.$$

Spróbujmy wyznaczyć x z tego równania.

$$\begin{aligned} 40x + 24 &= 6 \cdot 10^{m-1} + x \\ 39x &= 6(10^{m-1} - 4) \\ 13x &= 2(10^{m-1} - 4) \\ x &= 2 \cdot \frac{10^{m-1} - 4}{13}. \end{aligned}$$

[2] Źródło: Bobiński Z., Nodzyński P., Uscki M.: *Koło matematyczne w gimnazjum.* Wydawnictwo Aksjomat

[3] Po dopisaniu jedynki z przodu uzyskujemy liczbę 142857, a przecież... $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

[4] A jeśli to nam się nie podoba, to przyjmijmy np. $m = 3$ i sprawdźmy czy istnieje rozwiązanie. Lub $m = 6$.

Widzimy, że liczba dziesiątek liczby n spełnia osobliwy warunek. Jego WŁAŚCIWA INTERPRETACJA to kolejne wyzwanie, bowiem celem zadania nie jest znalezienie wszystkich liczb x spełniających warunek wyżej, ale jedynie najmniejszej możliwej liczby całkowitej dodatniej x, która go spełnia (inna sprawa, że jak znajdziemy jedną, to będzie wiadomo jak znaleźć wszystkie). Czy taka liczba w ogóle istnieje? Tu widzimy, że wcale nie jest to oczywiste. Nie jest też jasne, czy biorąc np. $5n$ zamiast $4n$ dostalibyśmy jakieś rozwiązanie. Jutro okaże się, że nie. Zatrzymanie się w tym miejscu i dyskusja jest kluczowa. Ładne zadanie to takie, które prowadzi do nowych pytań, a tu jesteśmy w miejscu, które wyraźnie sugeruje, że takie pytania warto postawić.

Liczby $10^{m-1} - 4$ mają bardzo konkretną postać:

$$6, 96, 996, 9996, 99996, \ldots$$

Szukamy wśród takich liczb najmniejszej, podzielnej przez 13, o ile istnieje. Już samo przekonanie, że taka liczba podzielna przez 13 musi w tym ciągu istnieć to pewne wyzwanie. Dla osób doświadczonych jest to oczywiste. Zanim dowiemy się dlaczego tak jest powiedzmy, że szukaną liczbą jest 99996. Mamy $99996 = 13 \cdot 7692$ i $x = 2 \cdot 7692 = 15384$. Stąd szukana liczba równa jest

$$153846.$$

Skąd wiedzieliśmy, że warto szukać liczby 99996? Można to zrobić intucyjnie (czyli dość pomysłowo) lub wykorzystując narzędzia teorii liczb, czego oczywiście oczekiwalibyśmy od uczestników zawodów międzynarodowych.

Sposób sztuczkowy jest taki, że 13 mnożone przez liczby złożone z samych cyfr 7 daje wyniki bliskie potęg 10:

$$13 \cdot 7 = 91, \quad 13 \cdot 77 = 1001, \quad 13 \cdot 777 = 10101, \quad 13 \cdot 7777 = 101101, \quad 13 \cdot 77777 = 1011101, \ldots$$

„Nietrudno” widzieć, że $13 \cdot 7777 - 13 \cdot 77 = 100100$, a skoro $13 \cdot 8 = 104$, to 99996 jest podzielne przez 13.

Intuicja „osoby doświadczonej” jest taka, że kolejne potęgi 10 dają przy dzieleniu przez 13 reszty, które „muszą się zapętlić” i to „dość szybko”[5]. Stąd szybko dowie się czy liczba 4 występuje wśród tych reszt. Oto one.

wykładnik	0	1	2	3	4	5	6
reszta	1	10	9	12	3	4	1

Jak uzyskiwać kolejne reszty? Mnożymy poprzednią resztę przez 10 i bierzemy resztę MODULO 13 (dlaczego?). Widać zatem, że $10^5 - 4 = 99996$ daje resztę 0, czyli jest podzielne przez 13.

Wyposażeni w metodę dopisywania cyfr z dwóch stron danej liczby całkowitej możemy zrobić zadanie, którego treść zupełnie nie sugerowała układania jakichkolwiek równań. Było to jedno z trudniejszych zadań kończącej się XVII Olimpiady Matematycznej Juniorów. Teraz dysponujemy nowymi narzędziami do jego rozwiązania.

Zadanie 4 (XVII OMJ, 1 etap) Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n-cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6.

Niech a będzie dowolną z wybranych cyfr, a m – dowolną liczbą (n-1)-cyfrową złożoną z pozostałych wybranych cyfr. Dopisujemy a do liczby m – raz z prawej, a raz z lewej strony, za każdym razem otrzymując liczbę spełniającą warunki zadania. Wiemy już, że dostajemy w ten sposób:

$$10m + a, \quad a \cdot 10^{n-1} + m,$$

A zatem wypisane wyżej liczby są, zgodnie z warunkami zadania, podzielne przez 7. Czas na kluczową obserwację, którą również można nazwać „układaniem równania”, czy dokładniej – układaniem podzielności. Mówi ona, że również dowolna całkowitoliczbowa kombinacja[6] powyższej wypisanych liczb jest podzielna przez 7. Oto jedna z nich:

$$10 \cdot (a \cdot 10^{n-1} + m) - 1 \cdot (10m + a) = a \cdot (10^n - 1).$$

Jeśli teza zadania ma być spełniona, to liczba $a \cdot (10^n - 1)$ ma być podzielna przez 7. Skoro a jest cyfrą, a 7 jest liczbą pierwszą, więc sprowadziliśmy wyjściowy problem do problemu podzielności przez 7 liczb postaci:

$$10^n - 1 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n\,jedynek}.$$

A jak to rozstrzygnąć? Znowu trzeba zobaczyć, że reszty z dzielenia 10^n przez 7 „się zapętlają”. Powodzenia!

[5] Innymi słowy osoba ta nie tylko zna, ale też rozumie małe twierdzenie Fermata.

[6] Nazewnictwo własne: dla liczb całkowitych x, y całkowitoliczbową kombinacją tych liczb nazywamy dowolną liczbę całkowitą postaci $ax + by$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Wyrażenia tego typu wykorzystywane są przy stosowaniu algorytmu Euklidesa, ale też w prostych dowodach i zadaniach teorioliczbowych, por. `https://mimuw.edu.pl/~amecel/semNWD.pdf`.

Zadania na część warsztatową

Przed nami cztery zadania, będące bezpośrednimi zastosowaniami poznanych już metod. Następnie zrobimy trzy nieco bardziej niestandardowe przykłady. Uniwersalna porada jest następująca: jeśli nie wiemy co robić, próbujmy szukać przykładów lub rozwiązywać „małe zadania" dla niewielkiej liczby cyfr. Może nam to dać ważne intuicje i pomóc w sformułowaniu odpowiednich rozumowań.

1. Znajdź wszystkie całkowite dodatnie liczby n, dla których liczba uzyskana przez wymazanie ostatniej cyfry n jest dzielnikiem n.

   Rozwiązanie. Zauważmy, że jest to uogólnienie Zadania 1 z pierwszego etapu XV OMJ, które rozwiązywaliśmy wyżej. Niech a będzie liczbą dziesiątek liczby n, zaś b jest cyfrą jedności. Mamy zatem $n = 10a+b$. Liczba a jest dzielnikiem n, a zatem $n - 10a = b$ jest wielokrotnością liczby a. Stąd a jest dzielnikiem b. Oznacza to jednak, że a jest cyfrą i „nietrudno stąd widzieć", że n jest jedną z liczb:

   $$11, 12, \ldots, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99.$$

   Koniec? Niezupełnie, jest jeszcze mały detal. Cyfra b może być równa 0 i wtedy powyższe „nietrudno widać" przestaje być prawdą. Zero jest wszak wielokrotnością każdej liczby całkowitej. A zatem do powyższych wyników należy dołączyć wszystkie liczby n kończące się cyfrą 0, czyli podzielne przez 10. Powtórzmy — przed sformułowaniem powyższego rozumowania warto poprosić uczniów o wskazanie kilku przykładów liczb o postulowanej własności. Wtedy „przypadek z zerem" raczej nie zostanie pominięty. ■

2. Znajdź wszystkie liczby złożone n zaczynające się cyfrą 6, które maleją 25 razy, gdy ta pierwsza cyfra jest z zapisu n usunięta.

   Rozwiązanie. Załóżmy, że poszukiwana liczba ma m cyfr (lub zacznijmy od $m = 3, 4, \ldots$). Wtedy możemy zapisać, że: $n = 6 \cdot 10^{m-1} + y$, gdzie y to liczba powstająca po usunięciu 6 z zapisu n. Zatem mamy warunek:

   $$6 \cdot 10^{m-1} + y = 25y \Rightarrow y = \frac{6 \cdot 10^{m-1}}{24} = \frac{10^{m-1}}{4}.$$

   Widzimy stąd, że $m \geqslant 3$, aby zachodziła podzielność przez 4, i mamy:

   $$y = 25 \cdot 10^{m-3}.$$

   A zatem szukana liczba n ma, dla dowolnego $m \geqslant 3$, postać:

   $$625\underbrace{00\ldots0}_{m-3\ zer}.$$

   ■

3. Pokaż, że nie istnieje liczba złożona n, która maleje 35 razy, gdy usunie się pierwszą cyfrę od lewej.

   Rozwiązanie. Postępujemy identycznie jak wyżej, nawet jeśli tym razem nie znamy pierwszej cyfry. Zakładamy, że n ma m cyfr i zapisujemy ją w postaci:

   $$n = x \cdot 10^{m-1} + y,$$

   gdzie $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ oraz y powstaje po usunięciu pierwszej cyfry. A zatem pytamy czy spełniony jest warunek:

   $$35y = x \cdot 10^{m-1} + y \iff 34y = x \cdot 10^{m-1} \iff 17y = x \cdot 5 \cdot 10^{m-2}.$$

   Pamiętajmy, że 17 jest względnie pierwsze z 10^{m-2} oraz z 5, a zatem 17 jest dzielnikiem x, co nie jest możliwe. To już było całkiem poważne rozumowanie teorioliczbowe. Przy okazji: zadanie zrobi się znacznie prostsze, jeśli założymy, że usuwamy pierwszą cyfrę od prawej. Prostsze nie oznacza tu „mało ciekawe". ■

4. Pierwszą cyfrą liczby 6-cyfrowej n jest 3. Jeżeli tą pierwszą cyfrę przesuniemy z pierwszego miejsca na ostatnie, to otrzymamy czwartą część wyjściowej liczby n. Znajdź tą liczbę sześciocyfrową.

   Rozwiązanie. Usunięcie cyfry 3 z pierwszej pozycji liczby n daje nam liczbę $x = n - 3 \cdot 100000$. Dopisanie do niej na końcu liczby 3 daje liczbę $10x + 3$. A zatem wykonana operacja przeniesienia liczby 3 z początku na koniec n daje liczbę:

   $$10(n - 300000) + 3 = \frac{1}{4}n.$$

   A zatem:

   $$40n - 12000000 + 12 = n \Rightarrow 39n = 11999988 \Rightarrow 307692.$$

   Odnotujmy, że w uzyskanym rozwiązaniu po przesunięciu 3 na koniec dostajemy liczbę 76923, czyli druga cyfra od lewej „zniknęła". Mała niespodzianka, ale nasze rozumowanie jest wrażliwe na takie sytuacje. ■

5. Wykaż, że nie istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że po przeniesieniu ostatniej jej cyfry na początek uzyskamy liczbę dwukrotnie mniejszą.

Rozwiązanie. Robiliśmy już podobne zadanie, więc wiemy jak należy zapisać nowo powstałą liczbę. Przyjmujemy, że n ma m cyfr, gdzie ostatnią cyfrą jest c, różne od zera (dlaczego możemy to założyć?). Niech x będzie liczbą dziesiątek liczby n tak, by $n = 10x+c$. Wówczas liczba powstała przez przestawienie ostatniej cyfry na początek to, podobnie jak podczas zajęć:

$$c \cdot 10^{m-1} + x.$$

A zatem rozwiązujemy równanie:

$$2(c \cdot 10^{m-1} + x) = 10x + c \Rightarrow 8x = c \cdot (2 \cdot 10^{m-1} - 1).$$

Liczba $2 \cdot 10^{m-1} - 1$ jest nieparzysta, więc c jest podzielne przez 8. Ale c jest niezerową cyfrą skąd $c = 8$. I teraz argument niespodzianka — liczba $x = 2 \cdot 10^{m-1} - 1$ ma m cyfr, a powinna mieć $m-1$ cyfr! Dostaliśmy sprzeczność. Motyw kończący to rozumowanie będziemy wykorzystywać w drugiej części szkolenia. ■

6. Na tablicy zapisana jest (w systemie dziesiętnym) dodatnia liczba całkowita N. Jeśli nie jest to liczba jednocyfrowa, wykonujemy następujące operacje: wycieramy ostatnią cyfrę c liczby N i zastępujemy uzyskaną liczbę M przez liczbę $M - 3c$. Znajdź wszystkie liczby N, dla których wielokrotne wykonywanie opisanych operacji prowadzi do uzyskania liczby 0.

Rozwiązanie. Jak wygląda liczba powstająca po wykonaniu operacji na N? Starcie cyfry c z końca to po prostu wzięcie $N - c$ oraz podzielenie przez 10. Trzeba jeszcze odjąć $3c$, więc nasza operacja ma postać:

$$N \mapsto \frac{N-c}{10} - 3c = \frac{N-31c}{10}.$$

Jak przewidzieć czy można dojść do zera? Trzeba zauważyć, ze w grę wchodzi podzielność N przez 31. Zauważmy, że jeśli N jest podzielna przez 31, to $\frac{N-31c}{10}$ też. I w drugą stronę, jeśli N nie jest podzielne przez 31, to $\frac{N-31c}{10}$ również nie jest podzielne przez 31. A zatem tylko od liczb podzielnych przez 31 możemy dojść do 0, bo również 0 jest wielokrotnością 31. Ale czy od każdej takiej liczby rzeczywiście da się dojść do zera?

Odpowiedź brzmi: tak. Załóżmy przeciwnie, że od pewnej wielokrotności $31M$ nie można dość do zera i niech M będzie najmniejszą liczbą o tej własności. Jest jasne, że jeśli c jest cyfrą, to $31c$ kończy się liczbą c, a więc od $31c$ przechodzimy w jednym kroku do zera. Zatem $M > 9$. To jednak oznacza, że po wykonaniu operacji na $31M$ przechodzimy do mniejszej, ale dodatniej wielokrotności 31, od której (też) nie da się przejść do zera, co oznacza sprzeczność z założeniem, że M jest najmniejszą taką liczbą. ■

7. (VIII OMG, I etap) Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Rozwiązanie. Tym razem interesuje nas znajomość liczby setek liczby n, którą oznaczymy przez a, i która zgodnie z warunkami zadania będzie jednym z czynników po wstawieniu znaku mnożenia między cyfrę setek, a cyfrę dziesiątek liczby n. Drugi z czynników utworzony przez dwie ostatnie cyfry liczby n oznaczmy przez b, co daje

$$n = 100a + b.$$

Wiemy również, z warunków zadania, że

$$a \cdot b = \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(100a + b).$$

Ten typ równania jest bardzo znany na konkursach matematycznych. Aby to zobaczyć musimy przedstawić to równanie w równoważnych postaciach $2ab = 100a + b$ oraz

$$2ab - 100a - b = 0.$$

Teraz trzeba zauważyć, co jest znaną olimpijską metodą[7], że wyrażenie po lewej wygląda jak efekt mnożenia dwóch wyrażeń algebraicznych (konkretnie: dwumianów), przy czym brakuje jednego składnika. Próbujemy zamienić powyższą równość na iloczyn. Można to zrobić dodając do obydwu stron 50. Mamy:

$$2ab - 100a - b + 50 = 50 \iff (2a-1)(b-50) = 50.$$

Stąd wynika, że liczba $2a - 1$ jest dodatnim i nieparzystym dzielnikiem liczby 50, a zatem jest równa 1, 5 lub 25. Stąd łatwo dochodzimy do dwóch rozwiązań (dla $2a - 1 = 1$ liczba b nie jest dwucyfrowa), czyli $n = 360$ oraz $n = 1352$. ■

[7] Zadaniom tego typu poświęcony został artykuł Michała Kiezy *Sztuczka z iloczynem*, Kwadrat nr 5 (dostępny na stronie OMJ).

Układanie nierówności

Warsztaty „Praca z uczniem zdolnym” organizowane przez UMCS
Arkadiusz Męcel (a.mecel@mimuw.edu.pl)
Zoom, 26.03.2022 r.

W pierwszym dniu zajęć poświęciliśmy wiele czasu prostym zagadnieniom dotyczącym modyfikacji zapisu dziesiętnego cyfr. Zabawy te prowadzą, jak mogliśmy zobaczyć, do wielu naturalnych sytuacji, gdzie formułować należy równania. Dziś natomiast przyjrzymy się w jaki sposób te same zagadnienia poprowadzą nas w sposób naturalny do oszacowań, nierówności, a nawet drobnych niezmienników. Motywem przewodnim będzie bardzo stare zadanie, uogólniające przykład rozważany wczoraj.

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $\hat{n}$ oznaczać będziemy liczbę otrzymaną z liczby n przez przestawienie jest pierwszej liczby na koniec. Przykład: jeśli $n = 123456$, to $\hat{n} = 234561$.

Zadanie 1. Jeśli $\frac{\hat{n}}{n}$ jest liczbą całkowitą, to musi być ona równa 1 lub 3.

Rozwiązanie rozbijemy na kilka etapów[8]. Każdy wymagać będzie prostych, ale ładnych obserwacji. Punktem wyjścia jest następujące, oczywiste stwierdzenie.

Liczby n oraz $\hat{n}$ mają po tyle samo cyfr.

- Obserwacja 1. Zachodzi nierówność:
$$\frac{\hat{n}}{n} < 10.$$
Ten fakt jest zupełnie intuicyjny, biorąc pod uwagę to, że n oraz $\hat{n}$ mają po tyle samo cyfr – powiedzmy, że cyfr tych jest po m. Pamiętajmy, że iloraz liczb dodatnich rośnie zarówno gdy zwiększamy licznik, jak i gdy zmniejszamy mianownik. Stąd:
$$10^{m-1} = 1\underbrace{00\ldots0}_{m-1} \leqslant n, \quad \text{oraz} \quad \hat{n} \leqslant \underbrace{99\ldots9}_{m} = 10^m - 1,$$
czyli
$$\frac{\hat{n}}{n} < \frac{10^m - 1}{10^{m-1}} < \frac{10^m}{10^{m-1}} = 10.$$

- Obserwacja 2.
$$\frac{\hat{n}}{n} \text{ nie jest równy } 5, 6, \text{lub } 8.$$
Rozumujemy nie wprost. Załóżmy, że $\hat{n} = 5n$. Jaka liczba może stać na początku przedstawienia liczby n tak, by po przemnożeniu przez 5 dostać liczbę o tej samej liczbie cyfr? Musi to być liczba 1. Doceńmy to – wykonaliśmy w tym miejscu proste, ale błyskotliwe szacowanie. Jak się okazuje, prowadzi ono w łatwy sposób do sprzeczności. W ten sposób okazuje się bowiem, że liczba 1 jest cyfrą jedności liczby $\hat{n}$, a więc $\hat{n}$ nie jest podzielna przez 5. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\hat{n} \neq 5n$. Czy widzą Państwo, że identyczne rozumowanie działa także dla przypuszczeń $\hat{n} = 6n$ oraz $\hat{n} = 8n$? To jest zupełnie jasne, bo n dalej musi rozpoczynać się liczbą 1, co oznacza, że $\hat{n}$ jest liczbą nieparzystą.

- Obserwacja 3.
$$\frac{\hat{n}}{n} \text{ nie jest równy 7 lub 9.}$$
Ponownie rozumujemy nie wprost. Liczba cyfr liczby n nie wzrasta po przemnożeniu przez 7 lub 9, więc na początku liczby n musi ponownie znajdować się cyfra 1.

Wprowadzimy teraz motyw, który pojawił się na poprzednich zajęciach. Mianowicie przyjmiemy, że n ma m cyfr i przez x oznaczmy liczbę co najwyżej $m-1$-cyfrową powstającą z usunięcia pierwszej cyfry 1 z zapisu n. Wówczas mamy
$$n = 1 \cdot 10^{m-1} + x, \quad \text{oraz } \hat{n} = 10x + 1.$$

[8]Każdy z etapów można przeprowadzić metodą algebraiczną, lub analizą wynikającą z algorytmu mnożenia pisemnego, por. Bartłomiej Zawalski *Teoria cyfr*, *Kwadrat* nr 23: https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat23.pdf.

Warunek $\hat{n} = 7n$ implikuje:

$$10x + 1 = 7(10^{m-1} + x) \Rightarrow 3x = 7 \cdot 10^{m-1} - 1 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 10^{m-1} - 1}{3}.$$

Założyliśmy jednak, że x jest liczbą nie więcej niż $m - 1$ cyfrową, czyli liczbą mniejszą niż $10^{m-1} = 1\underbrace{00\ldots0}_{m-1}$. Tymczasem mamy:

$$x = \frac{7 \cdot 10^{m-1} - 1}{3} \geqslant \frac{6 \cdot 10^{m-1}}{3} = 2 \cdot 10^{m-1}.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód. Zachęcam Czytelnika do sprawdzenia, że w identyczny sposób doprowadza się do sprzeczności założenie $\hat{n} = 9n$.

- Obserwacja 4.

  $$\frac{\hat{n}}{n} \text{ nie jest równy } 2.$$

  Liczba cyfr liczby n nie zmienia się po przemnożeniu przez 2, więc pierwsza cyfra n nie może przekraczać 4. Po raz kolejny wykonaliśmy zatem proste szacowanie. Pojawiło się nieco więcej możliwości, niż we wcześniejszych przypadkach, ale zaraz je ograniczymy. Pamiętajmy, że po przeniesieniu pierwszej cyfry na koniec dostajemy liczbę parzystą $\hat{n} = 2n$, a zatem przenosić musieliśmy – zgodnie z cechą podzielności przez 2 – liczbę parzystą. A zatem n zaczynać się musi cyfrą 2 lub cyfrą 4.

  Podobnie jak wcześniej przyjmiemy, że n ma m cyfr i przez x oznaczmy liczbę nie więcej niż $m-1$-cyfrową powstającą z usunięcia pierwszej cyfry (2 lub 4) z zapisu n. Wówczas mamy:

  $$n = 2 \cdot 10^{m-1} + x, \quad \text{oraz } \hat{n} = 10x + 2$$

  lub

  $$n = 4 \cdot 10^{m-1} + x, \quad \text{oraz } \hat{n} = 10x + 4.$$

  Biorąc jednak pod uwagę założenie $\hat{n} = 2n$, dostajemy w pierwszym przypadku (gdy n zaczyna się od 2):

  $$2(2 \cdot 10^{m-1} + x) = 10x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 10^{m-1} - 2}{8} = \frac{2 \cdot 10^{m-1} - 1}{4},$$

  a w drugim przypadku (gdy n zaczyna się od 4):

  $$2(4 \cdot 10^{m-1} + x) = 10x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 \cdot 10^{m-1} - 4}{8} = \frac{2 \cdot 10^{m-1} - 1}{2}.$$

  Zauważmy, że żadna z otrzymanych formuł na x nie jest możliwa, bowiem z jednej strony x jest liczbą całkowitą, a z drugiej strony formuły te opisują ilorazy liczby nieparzystej przez liczbę parzystą, czyli liczby niecałkowite. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $\hat{n} \neq 2n$.

- Obserwacja 5.

  $$\frac{\hat{n}}{n} \text{ nie jest równy } 4.$$

  W tym przypadku wykonujemy już tylko mieszankę wcześniejszych sposobów. Mnożenie liczby n przez 4 nie zwiększa liczby cyfr, więc nie możemy mnożyć przez liczbę większą od 2. Z drugiej strony, po przeniesieniu cyfry na koniec mamy otrzymać liczbę parzystą $\hat{n} = 4n$. A zatem przenosić musimy cyfrę 2. Ponownie przyjmujemy za x oznaczmy liczbę nie więcej niż $m-1$-cyfrową powstającą z usunięcia pierwszej cyfry 2 z zapisu n, co daje:

  $$4 \cdot (2 \cdot 10^{m-1} + x) = 10x + 2 \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 10^{m-1} - 2}{6}.$$

  Podobnie jak przy szacowaniu w przypadku Obserwacji 3, uzyskana liczba jest z pewnością m cyfrowa, co po raz ostatni prowadzi do sprzeczności.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli $\hat{n}/n$ jest liczbą całkowitą, to jedynie równą 1 lub 3. Nietrudno wskazać przykłady w pierwszym przypadku, biorąc liczby o tych samych cyfrach. W drugim przypadku trzeba zauważyć, że warunek $\hat{n} = 3n$ wymusza, by n zaczynało się liczbą 1 lub 3. W pierwszym przypadku najmniejszą liczbą o postulowanej własności jest liczba rozważana wczoraj, czyli 142857.

W drugim zadaniu przyjrzymy się kilku niezwykle interesującym nierównościom.

Zadanie 2. (Włochy 1999) Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy zbalansowaną, jeśli liczba jej cyfr w zapisie dziesiętnym równa jest liczbie jej parami różnych dzielników pierwszych. Na przykład 15 jest zbalansowana, a 49 nie jest. Pokaż, że istnieje tylko skończenie wiele zbalansowanych liczb.

Rozwiązanie. Jaką intuicję można mieć w takim zadaniu? Wydaje się ono z zupełnie innego świata niż zagadnienia omawiane w szkole podstawowej. Cóż to znaczy, że liczba cyfr równa jest liczbie parami różnych dzielników pierwszych? Tu potrzeba kilku eksperymentów, a potem wyciągnięcia wniosków.

Niech x będzie n-cyfrową liczbą zbalansowaną. Mamy szacowanie wynikające z liczby cyfr:

$$10^n > x.$$

Czy możemy powiedzieć coś więcej? Jak zabrać się do tych n parami różnych dzielników pierwszych liczby x? Wiemy, że liczba n rozkłada się na czynniki pierwsze i z treści zadania wynika, że jest ich co najmniej n (choć może być więcej, np. $50 = 2 \cdot 5^2$ ma dwa różne dzielniki pierwsze, ale jest iloczynem trzech liczb pierwszych). Ważne jednak, że liczba x ma dzielnik, który jest iloczynem n liczb, a tak naprawdę ma po prostu dzielnik[9] $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. gdzie $p_1, \ldots, p_n$ to owe różne n dzielników pierwszych. Czego tu możemy się uchwycić?

Po co nam ta skomplikowana podzielność? Tylko po to, by napisać nierówność:

$$10^n > x \geqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Teraz możemy zacząć szacować twierdząc, że $p_1, \ldots, p_n$ nie mogą być wszystkie zbyt duże. Gdyby każda była równa co najmniej 11, to mielibyśmy:

$$10^n > x \geqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_n > 11^n,$$

co jest absurdem. Z drugiej strony mamy mało liczb pierwszych mniejszych od 10 – jedynie 4. Gdybyśmy nawet mieli $p_1p_2p_3p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, to potem liczby pierwsze zaczynają się robić znacznie większe niż 10, więc wydaje się, że będzie jakiś problem z iloczynem pozostałych czynników $p_5p_6 \ldots p_n$. Dokładniej mówiąc, przyjmując $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ mamy, dla $n > 4$:

$$p_5 \cdot \ldots \cdot p_n > 10^{n-4}.$$

Ta nierówność zdaje się jednak być do poprawienia. Zauważmy, że liczb pierwszych mniejszych niż 100 jest tylko 25. A zatem dla $n > 25$ mamy:

$$p_{26} \cdot \ldots \cdot p_n > 100^{n-25} = 10^{2(n-25)} = 10^{2n-50}.$$

Mamy zatem dla $n > 25$

$$10^n > x \geqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_n > p_{26} \cdot \ldots \cdot p_n > 10^{2n-50}.$$

Widzicie Państwo problem? Przecież po lewej stronie mamy liczbę $n+1$-cyfrową, a po prawej: $2n-49$-cyfrową. Zatem dla $n > 50$ mamy:

$$10^{2n-50} > 10^n.$$

Oznacza to, że liczba x nie może mieć więcej niż 50 cyfr (w istocie można znacznie poprawić to ograniczenie). Zatem liczb zbalansowanych jest skończenie wiele.

■

Nie ma co ukrywać, że przedstawione rozumowanie jest dość wyrafinowane i zapewne nie należałoby spodziewać się go na zawodach dla szkół podstawowych. To jest jednak problem, który można krok po kroku pokazać uczniowi szkoły podstawowej, bo nie wykonujemy żadnych szacowań, które opierałyby się na wiedzy przekraczającej program szkoły podstawowej. Niekiedy jednak wiedzę tą trzeba wykorzystać bardzo kreatywnie. Podobnie będzie w kolejnym rozważanym przez nas zadaniu.

[9] Tutaj kluczowe są wszystkie założenia. Z faktu, że 2 oraz 4 są dzielnikami liczby całkowitej m nie wynika, że 8 jest również dzielnikiem tej liczby. W tym przypadku możemy posłużyć się np. twierdzeniem o rozkładzie na czynniki pierwsze po prostu wyciągając z tego rozkładu czynnik $p_1 \ldots p_n$. Możemy też skorzystać z następującego faktu: jeśli liczba pierwsza p jest dzielnikiem iloczynu ab liczb całkowitych a, b, to p jest dzielnikiem a lub jest dzielnikiem b. W szczególności jeśli p nie jest dzielnikiem a, to musi być dzielnikiem b. Teraz jeśli $n = p_1 \cdot m$, to p_2 jest dzielnikiem $p_1 \cdot m$. Ale p_2 nie jest dzielnikiem p_1, więc p_2 to dzielnik m. Stąd $n = p_1 \cdot p_2 \cdot m'$. Ale teraz p_3 jest dzielnikiem iloczynu p_1p_2 oraz m'. Skoro p_3 nie jest dzielnikiem p_1p_2, to jest dzielnikiem m' itd.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, które są równe sumie swoich cyfr powiększonej o iloczyn swoich cyfr.

Rozwiązanie. Niech $n = \overline{a_1a_2\ldots a_m}$ będzie zapisem dziesiętnym liczby całkowitej m-cyfrowej n o cyfrze jedności a_m, cyfrze dziesiątek a_{m-1} itd., przy czym $a_1 \neq 0$. Załóżmy też, że liczba n spełnia warunki zadania, czyli:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_m} = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_1a_2\ldots a_m.$$

W tym rozwiązaniu pojawia się dość głęboka myśl (która zaraz okaże się czymś całkowicie oczywistym): wyrażenie po prawej stronie „nie jest zbyt duże” w porównaniu z wyrażeniem po lewej. Jak to zobaczyć? Trzeba nieco poeksperymentować. Zachęcam, aby przed rozwiązaniem ogólnego problemu spróbować ograniczyć się np. do liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych. Korzyści będzie kilka. Po pierwsze uczniowie znajdą jakieś rozwiązania (jak się okaże – wszystkie), a po drugie zobaczą, że to abstrakcyjne równanie zapisane wyżej mówi o jakiejś bardzo nienaturalnej sytuacji. Inaczej mówiąc – uchwycą sedno sprawy. To jest ważniejsze niż formalizmy.

Eksperyment 1. Szukamy takich cyfr a, b, gdzie $a \neq 0$, że:

$$\overline{ab} = 10a + b = a + b + ab.$$

Od razu widzimy, że $9a = ab$, czyli $b = 9$. Mamy 9 rozwiązań dwucyfrowych (jednocyfrowych nie ma).

Eksperyment 2. Proszę wykazać, że dla dowolnych cyfr a, b, c $(a \neq 0)$ mamy:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = a + b + c + 99a + 9b > a + b + c + abc.$$

To jest oczywiste. Przecież $99a > abc$, bo $99 > ab$. Składnik $100a$ był kluczowy.

Proszę powtórzyć to rozumowanie dla liczb czterocyfrowych $\overline{abcd}$ i zobaczyć, że składnik $999a$ pełni analogiczną rolę – szacuje z góry iloczyn $abcd$. Wszystko robi się jasne. Nie ma innych rozwiązań niż dwucyfrowe. Dowód to uważnie dobrane narzędzia i redakcja. To wszystko jest w zasięgu naszych uczniów i gwarantuję – to się spodoba!

Czas przejść do formalnego rozwiązania. Wymaga ono wyrobienia przekraczającego, jak się wydaje, możliwości poziomu OMJ, ale mimo wszystko warto spróbować zobaczyć, że w istocie wykonujemy tu jedynie znane szacowania, przebrane w formalizm. Skorzystamy nawet z postaci $(*)$, ale jedynie dla pewnej ilustracji. Zapiszemy wyrażenie po lewej stronie w postaci sumy potęg dziesiątki przemnożonych przed odpowiednie cyfry:

$$a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + 10 \cdot a_{m-1} + a_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_1a_2\ldots a_m.$$

Przeniesiemy teraz na lewą stronę sumę $a_1 + \ldots + a_m$ i odpowiednio pogrupujemy:

$$a_1(10^{m-1} - 1) + a_2(10^{m-2} - 1) + \ldots + 9a_{m-1} = a_1a_2\ldots a_m. \qquad (\dagger)$$

Co chcemy zobaczyć w tej równości? Otóż to, że:

$$a_1 \underbrace{a_2\ldots a_m}_{\text{m-1 cyfr}} \leqslant a_1(10^{m-1} - 1) = a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{\text{m-1 cyfr}},$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $m = 2$ i $a_2 = 9$. Dlaczego tak jest? Otóż dla $m > 2$ mamy:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{m-1} < a_2 \cdot 10^{m-2} < 9 \cdot 10^{m-2} < \underbrace{99\ldots9}_{\text{m-1 cyfr}}.$$

Po odjęciu od stron równości $(\dagger)$ liczby $a_1(10^{m-1} - 1)$ dostajemy równość:

$$a_2(10^{m-2} - 1) + \ldots + 9a_{m-1} = a_1 \cdot (a_2\ldots a_m - \underbrace{99\ldots9}_{\text{m-1 cyfr}}), \qquad (\dagger\dagger)$$

przy czym wyrażenie po lewej stronie jest nieujemne, a wyrażenie po prawej – niedodatnie! Wniosek jest taki, że obydwie strony powyższej równości muszą być równe zero! To bardzo pomysłowe podejście. Zakończenie rozwiązania jest teraz bardzo proste. Pamiętając, że $a_1 \neq 0$ musimy mieć

$$a_2\ldots a_m = \underbrace{99\ldots9}_{\text{m-1 cyfr}}.$$

A zatem $m = 2$ oraz $a_2 = 9$. Szukanymi wartościami n są więc liczby:

$$19, \quad 29, \quad 39, \quad 49, \quad 59, \quad 69, \quad 79, \quad 89, \quad 99.$$

■

Zadania na część warsztatową

1. Liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą. Jaka to cyfra?

Oczywiście można spróbować policzyć potęgi 2 oraz 5 dla małych n i zobaczyć przykładową odpowiedź. Możemy pokusić się jednak o pomysłowe rozwiązanie. Otóż jaka by nie była szukana pierwsza cyfra c, z pewnością znamy pierwszą cyfrę iloczynu $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Jest to 1. Co możemy uzyskać na tej podstawie? Skorzystamy z pomysłu, który jeszcze się nie pojawił. Załóżmy, że 2^n ma $k+1$ cyfr, a 5^n ma $l+1$ cyfr. Wówczas można zapisać:

$$2^n = (c + r_1) \cdot 10^k, \quad 5^n = (c + r_2) \cdot 10^l,$$

gdzie c jest szukaną cyfrą, a r_1, r_2: liczbami wymiernymi z przedziału $[0, 1)$. Krótko mówiąc r_1, r_2 powstają przez podzielenie 2^n oraz 5^n odpowiednio przez 10^k oraz 10^l. Na przykład:

$$1024 = (1 + 0,024) \cdot 10^3.$$

Teraz wykonujemy iloczyn:

$$2^n \cdot 5^n = (c + r_1) \cdot 10^k \cdot (c + r_2) \cdot 10^l.$$

A zatem $0 < (c + r_1)(c + r_2)$ jest dodatnią potęgą liczby 10. Biorąc jednak pod uwagę, że $c < 9$ oraz $r_1, r_2 < 1$ mamy

$$0 < (c + r_1)(c + r_2) < 100 \quad \Rightarrow (c + r_1)(c + r_2) = 10.$$

To szacowanie daje nam od razu wynik $c = 3$. Istotnie, mamy:

$$(2 + r_1)(2 + r_2) < 9, \quad (4 + r_1)(4 + r_2) > 16.$$

Nietrudno widzieć, że biorąc $n = 5$ mamy:

$$2^5 = 32, \quad 5^5 = 3125.$$

Proszę spróbować pokazać, że jeśli pierwsze dwie cyfry od lewej w przedstawieniu liczb 2^n oraz 5^n są identyczne, to są to kolejno (od lewej) cyfry $3, 1$. Podpowiedź: opieramy się tu na intuicji:

$$\sqrt{10} \approx 3.16227766$$

Ostatnie trzy zadania dotyczą liczb palindromicznych.

2. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n, względnie pierwszej z 10, istnieje liczba postaci $11\ldots1$ podzielna przez n.

To dobrze znane zadanie posłuży nam jako wprowadzenie do kolejnych dwóch zadań dotyczących liczb palindromicznych. Oznaczmy przez e_m liczbę n cyfrową $11\ldots1$. Weźmy liczbę n, względnie pierwszą z 10. Rozpatrzmy liczby

$$e_1, e_2, \ldots e_n, e_{n+1}.$$

Wśród tych liczb istnieją co najmniej dwie takie liczby e_a, e_b, gdzie $a < b$, których reszty z dzielenia przez n są jednakowe (tych liczb jest więcej niż wszystkich możliwych reszt). Wtedy liczba $e_b - e_a$ jest podzielna przez n. Zauważmy, ze

$$e_b - e_a = e_{b-a} \cdot 10^a.$$

Ponieważ liczby 10 oraz n są względnie pierwsze, to e_{b-a} jest podzielna przez n.

Można pytać czy założenie, że n jest względnie pierwsze z 10 jest potrzebne. Nie jest ono konieczne, ale oczywiście jeśli ostatnią cyfrą liczby n jest zero, to nie ma takiej liczby k, by kn miało same jedynki czy było jakąkolwiek liczbą palindromiczną. Okazuje się, że jest to jedyne ograniczenie. Nie wykażemy tego (dowód można znaleźć w książce prof. Nowickiego), ale pokażemy prostą obserwację.

3. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna u taka, że $u \cdot 2^s$ jest palindromiczna.

Tym razem będzie szacowanie. Zapis dziesiętny liczby $2^s < 10^s$ ma co najwyżej s cyfr. Zapiszmy cyfry liczby $a = 2^s$ w odwrotnej kolejności i otrzymaną liczbę oznaczmy przez b. Dopiszmy do liczby b (z prawej strony) s zer. Otrzymujemy liczbę $b \cdot 10^s$. Wówczas liczba $b \cdot 10^m + a$ jest palindromiczna i dzieli się przez 2^s.

Analogicznie pokazujemy, że dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna u taka, że liczba $u \cdot 5^s$ jest palindromiczna.

4. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Pokazać (choćby dla liczb o niewielkiej liczbie cyfr), że dla dowolnych liczb naturalnych a, b mamy:

$$s(a+b) \leqslant s(a)+s(b), \quad s(ab) \leqslant s(a)s(b).$$

Na tej podstawie pokazać, że

$$s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n),$$

dla dowolnej liczby naturalnej n, a także:

$$\frac{s(n)}{s(4n)} \leqslant 7, \quad \frac{s(n)}{s(5n)} \leqslant 2, \quad \frac{s(n)}{s(8n)} \leqslant 8, \quad \frac{s(n)}{s(16n)} \leqslant 13, \quad \frac{s(n)}{s(25n)} \leqslant 4, \quad \frac{s(n)}{s(5^5 n)} \leqslant 5.$$

Ostatnie zadanie przeznaczymy na pokazanie ciekawego i pouczającego zastosowania wzoru $(*)$ podanego na początku. Powyższe nierówności są całkowicie zgodne z intuicją, ale jak je udowodnić? Zaczniemy od następującej obserwacji, wykorzystującej pojęcie części całkowitej $[x]$ liczby rzeczywistej x.

Fakt. Dla każdej liczby naturalnej n o $m+1$ cyfrach zachodzi równość:

$$s(n) = n - 9\left(\left[\frac{n}{10^1}\right] + \left[\frac{n}{10^2}\right] + \left[\frac{n}{10^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{10^m}\right]\right).$$

Uzasadnienie jest proste. Niech

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_{m-1}$ są cyframi. Wówczas:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{n}{10^1}\right] &= a_m \cdot 10^{m-1} + a_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1 \\
\left[\frac{n}{10^2}\right] &= a_m \cdot 10^{m-2} + a_{m-1} \cdot 10^{m-3} + \ldots + a_2 \\
&\vdots \\
\left[\frac{n}{10^m}\right] &= a_m,
\end{aligned}$$

Dodając te równości stronami dostajemy:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{n}{10^1}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{10^1}\right] &= a_m \cdot \underbrace{11\ldots1}_{m} + a_{9m-1} \cdot \underbrace{11\ldots1}_{m-1} + \ldots + a_2 \cdot 11 + a_1 \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{9}\left(a_m \cdot \underbrace{99\ldots9}_{m} + a_{m-1} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{m-1} + \ldots + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9\right) = \\
&= \frac{1}{9}\left(a_m \cdot (10^m - 1) + \ldots + a_1(10-1) + a_0(1-1)\right) = \frac{1}{9}(n - s(n)).
\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej x istnieje m takie, że $\left[\frac{x}{10^m}\right] = 0$ możemy powyższą sumę traktować jako nieskończoną. Będzie nam łatwiej szacować. Teraz dowód naszej nierówności jest już bardzo prosty. Różnica $s(a) + s(b) - s(a+b)$ jest teraz równa:

$$\begin{aligned}
&n - 9\left(\left[\frac{a}{10^1}\right] + \left[\frac{a}{10^2}\right] + \ldots\right) + b - 9\left(\left[\frac{b}{10^1}\right] + \left[\frac{b}{10^2}\right] + \ldots\right) - (a+b) + 9\left(\left[\frac{a+b}{10^1}\right] + \left[\frac{a+b}{10^2}\right] + \ldots\right) = \\
&= 9\left(\left[\frac{a+b}{10^1}\right] - \left[\frac{a}{10^1}\right] - \left[\frac{b}{10^1}\right]\right) + 9\left(\left[\frac{a+b}{10^2}\right] - \left[\frac{a}{10^2}\right] - \left[\frac{b}{10^2}\right]\right) + \ldots.
\end{aligned}$$

Teraz trzeba tylko sprawdzić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi oczywista nierówność $[x+y] \geqslant [x]+[y]$. Dowód wymaga rozważenia kilku przypadków. Pokażemy jeden z nich. Niech $x = [x]+r$, gdzie $r > 0,5$ oraz $y = [y] + s$, gdzie $s \leqslant 0,5$. Stąd:

$$[x+y] = [[x]+[y]+r+s] = [x]+[y],$$

bowiem $r + s < 1$. Czytelnik już będzie wiedział co robić dalej.

Dowód drugiej nierówności sprowadzimy do dowodu pierwszej. Sprawdzamy najpierw, że jeśli a, b są cyframi, to

$$s(ab) \leqslant ab.$$

Następnie, wykorzystując pokazaną wyżej nierówność oraz fakt, że:

$$s(10^k \cdot n) = s(n),$$

wykazujemy tezę jak następuje. Niech

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad b = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0,$$

gdzie a_i, b_j są cyframi. Wtedy iloczyn ab jest sumą wyrażeń postaci $a_i b_k 10^{i+j}$. Możemy zatem, używając notacji sumacyjnej, napisać:

$$s(nm) \leqslant \sum \sum s(a_i b_j 10^{i+j}) = \sum \sum s(a_i b_j) \leqslant \sum \sum a_i b_j = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) = s(n)s(m).$$

Dowody pozostałych nierówności są już teraz prostymi zastosowaniami wypracowanego rezultatu. Pokażemy jedynie nierówność

$$s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n),$$

pozostawiając pozostałe fakty jako proste ćwiczenia.

Z poprzednich faktów mamy:

$$s(2n) = s(n+n) \leqslant s(n) + s(n) = 2s(n) = 2s(10n) = 2s(5 \cdot 2n) \leqslant 2s(5)s(2n) = 10s(2n).$$

Źródła

1. Andreescu T., Andrica D., *Number Theory: Structures, Examples, and Problems*, Birkhauser 2011.
2. Forum Art of Problem Solving (`https://artofproblemsolving.com/community`).
3. Nowicki A., *Cyfry liczb naturalnych*, `https://www-users.mat.umk.pl/~anow/index.php`, Toruń 2012.
4. Shklarsky D.O., Chentzov N. N, Yaglom I. M., *The USSR Olympiad Problem Book*, W.F. Freeman and Company, San Francisco, Londyn, 1962.