Pierścienie skośnych wielomianów — wprowadzenie[1]

Przez R oznaczać będziemy pierścień. Nie zakładamy, że jest on przemienny. W większości przypadków będzie on miał jedynkę, czyli element 1 taki, że dla każdego $r \in R$:

$$1 \cdot r = r \cdot 1 = r.$$

Przez $R\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ oznaczać będziemy pierścień wielomianów nad R o nieprzemiennych zmiennych.

Twierdzenie 1 (Własność uniwersalna) *Pierścień wielomianów $K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ jest K jest* ***algebrą wolną*** *o wolnym zbiorze generatorów $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to znaczy — dla dowolnej K-algebry A i elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ przyporządkowanie $f : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ takie, że*

$$f(x_i) = a_i$$

przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu K-algebr: $\overline{f} : K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \longrightarrow A$.

Przykłady ilorazów algebry wolnej $K\langle x, y\rangle$.

1. Pierścień wielomianów o przemiennych zmiennych: $K[x, y] \simeq K\langle x, y\rangle/_{(xy-yx)}$.

2. W pierścieniu $K\langle x, y\rangle/_{(xy)}$ zachodzi równość $ab = 0$, gdzie $x \mapsto a$ oraz $y \mapsto b$. W szczególności a jest lewostronnym dzielnikiem zera, ale nie jest prawostronnym dzielnikiem zera. Podobnie w pierścieniu $K\langle x, y\rangle/_{(xy-1)}$ zachodzi relacja $ab = 1$, co oznacza, że b jest prawostronną odwrotnością a. Nietrudno jednak pokazać, że nie jest to lewostronna odwrotność, czyli a nie jest elementem odwracalnym.

3. Algebra kwaternionów $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}\langle x, y\rangle/_{(x^2+1, y^2+1, xy+yx)}$

4. Pierwsza algebra Weyla:

   $$A_1(R) = R\langle x, y\rangle/_{(xy-yx-1)}.$$

   W algebrze tej zachodzi równość $ab-ba = 1$, gdzie $x \mapsto a, y \mapsto b$. Gdy R jest ciałem charakterystyki 0, algebra $A_1(R)$ może być rozumiana jako pierścień różniczkowych operatorów na pierścieniu wielomianów $P = R[y]$. Rzeczywiście, jeśli D oznacza operator d/dy na P oraz L oznacza lewostronne mnożenie przez y w P, wówczas dla każdego $f(y) \in P$, formuła na pochodną iloczynu daje nam:

   $$(DL)(f) = \frac{d}{dy}(yf) = y\frac{df}{dy} + f = (LD + I)f,$$

   gdzie I jest identycznością na P. A zatem mamy homomorfizm ϕ algebr z $A_1(R)$ do $\mathrm{End}_R(P)$, który posyła a na D oraz b na L. Nietrudno widzieć, że obrazem ϕ jest dokładnie pierścień S operatorów różniczkowych postaci:

   $$\sum_i a_i(L)D^i,$$

   gdzie a_i są wielomianami zmiennej y. W dalszej części zobaczymy, że $A_1(R)$ realizowane może być jako pierścień skośnych wielomianów zmiennej x nad pierścieniem $P = k[y]$.

[1] Na podstawie notatek A. Męcla do wykładu prof. J. Matczuka pt. *Wstep do teorii pierscieni nieprzemiennych* (2008).

Rozszerzenia Ore

Niech T – pierścień, którego elementy są wielomianami o współczynnikach w pierścieniu R:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in R,$$

gdzie mnożenie jest wyznaczone przez mnożenie w R oraz dodatkowo dla każdego $a \in R$ istnieją takie $\overline{a}, \overline{b}$, że

$$xa = \overline{a}x + \overline{b}.$$

Niech $\sigma : R \longrightarrow R$ będzie takie, że $\sigma(a) = \overline{a}$ oraz $\delta : R \longrightarrow R$ będzie takie, że $\delta(a) = \overline{b}$. Wtedy σ jest endomorfizmem pierścienia R. Istotnie:

$$\begin{aligned} xr &= \sigma(r)x + \delta(r) \\ x(r+s) &= xr + xs = (\sigma(r) + \sigma(s))x + \delta(r) + \delta(s) \\ x(r+s) &= \sigma(r+s)x + \delta(r+s) \end{aligned}$$

Stąd $\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s)$, $\delta(r+s) = \delta(r) + \delta(s)$.

Jeśli chodzi o własności multyplikatywne, to jeśli $r, s \in R$, to:

$$\begin{aligned} xrs &= (xr)s = (\sigma(r)x + \delta(r))s = \sigma(r)xs + \delta(r)s = \sigma(r)(\sigma(s)x + \delta(s)) + \delta(r)s \\ xrs &= x(rs) = \sigma(rs)x + \delta(rs) \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\sigma(rs) = \sigma(s)\sigma(r)$ oraz $\delta(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s)$ Stąd δ jest σ – różniczkowaniem. Przypomnijmy definicję:

Definicja 1 *Niech $\delta : R \longrightarrow R$ oraz $\sigma \in \mathrm{End}(R)$. Wtedy δ jest σ –* ***różniczkowaniem*** *jeżeli:*

1. *δ jest homomorfizmem grup addytywnych R,*
2. *dla każdych $r, s \in R$ mamy: $\sigma(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s)$.*

Uwaga. Jeśli $\sigma = id_R$ to jest to dokładnie różniczkowanie pierścienia R.

Twierdzenie 2 *Niech σ będzie endomorfizmem pierścienia R i niech δ będzie σ – różniczkowaniem. Wówczas na grupie abelowej wszystkich wielomianów o współczynnikach z R istnieje struktura pierścienia łącznego zadana przez mnożenie w R oraz warunek:*

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r).$$

Pierścień ten oznaczamy przez $R[x; \sigma, \delta]$ i nazywamy ***rozszerzeniem Ore*** *pierścienia R.*

Dowód: Wystarczy sprawdzić łączność...

Przykład 1 *Gdy $\delta = 0$ (to zawsze jest σ – różniczkowanie), wówczas $R[x; \sigma, 0] = R[x; \sigma]$ nazywamy* ***pierścieniem wielomianów skośnych*** *nad R. Mamy wtedy $xr = \sigma(r)x$.*

Przykład 2 *Gdy* $\sigma = id_R$ *wtedy* $R[x; id, \delta] = R[x; \delta]$ *nazywamy* ***pierścieniem operatorów różniczkowych****. Mamy wtedy:* $xr = rx + \delta(r)$.

Przykład 3 *Niech:* * *będzie sprzężeniem zespolonym. Wtedy można określić* $\mathbb{C}[x; ^*]$*, gdzie mnożenie pochodzi od* $\mathbb{C}$ *oraz spełniony jest warunek* $xz = z^* x$*. Łatwo zauważyć, że* $x^2 z = zx^2 \Rightarrow x^2 \in Z(\mathbb{C}[x; ^*])$*. Okazuje się też, że traktując nasz pierścień jako algebrę nad* $\mathbb{R}$ *(warunki są oczywiście spełnione) i dzieląc ją przez ideał* $(x^2 + 1)$ *dostajemy algebrę nad* $\mathbb{R}$ *izomorficzną z* $\mathbb{H}$*. Bazę stanowią tu:* $[1], [i], [x], [ix]$.

Twierdzenie 3 *Dany jest pierścień* $R[x; \sigma, \delta]$*. Wówczas:*

1. σ *– injektywny,* R *– dziedzina* $\Rightarrow$ $R[x; \sigma, \delta]$ *jest dziedziną.*
2. σ *– injektywny,* R *– z dzieleniem* $\Rightarrow$ *każdy lewostronny ideał w* $R[x; \sigma, \delta]$ *jest główny (nieprzemienna wersja faktu mówiące, że* $K[x]$ *jest pierścieniem ideałów głównych).*
3. σ *– automorfizm,* R *– lewostronnie (prawostronnie) noetherowski* $\Rightarrow$ $R[x; \sigma, \delta]$ *też jest (uogólnione twierdzenie Hilberta o bazie).*

Dowód: Zacznijmy od punktu (1). Niech $f, g \in R[x; \sigma, \delta]$ takie, że:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Wtedy:

$$f \cdot g = a_m \sigma^n (b_m) x^{n+m} + \ldots$$

Widać, że $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$. Niech ten iloczyn będzie zerem. Oznacza to, że także $a_m \sigma^n (b_m) = 0$. Co z tego wnioskujemy? Element $a_m \sigma^n (b_m)$ jest zerowym elementem pierścienia R. Pierścień R jest dziedziną, a więc $a_m = 0$ lub $\sigma^n (b_m) = 0$. Jednak skoro σ jest injekcją, to znaczy, że $\ker(\sigma) = 0$, a więc jeśli $\sigma^n (b_m) = 0$, to $b_m = 0$. Zatem rzeczywiście $\deg(f + g) = \deg(f) + \deg(g)$, czyli $R[x; \sigma, \delta]$ jest dziedziną.

Dowodzimy (2). Skoro R jest z dzieleniem, to jest oczywiście dziedziną, a więc na mocy punktu (1) – $R[x; \sigma, \delta]$ jest dziedziną. Naszym celem będzie pokazanie, że można w tej dziedzinie dzielić z resztą. Wywnioskujemy stąd (podobnie jak się robi w przypadku przemiennym), że każdy lewostronny ideał jest główny. Mamy wielomiany f, g. Chcemy pokazać, że istnieją wielomiany h, r, że $f = hg + r$ oraz $\deg(r) < \deg(g)$. Jeśli $\deg(f) < \deg(g)$, to jest to oczywiste. Załóżmy przeciwnie. Będziemy niejako konstruować nasze h. Niech $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Szukamy najpierw takiego α_n, żeby:

$$a_n x^n = \alpha_n x^{n-m} b^m x^m \iff a_n x^n = \alpha_n \sigma^{n-m} (b_m) x^n.$$

Skoro R jest z dzieleniem, to istnieje b_m^{-1}. Skoro σ to monomorfizm, zatem istnieje $\sigma(a_n^{-1})$ i jest niezerowe (bo $b_m \neq 0$). Kładąc $\alpha_n = a_n \sigma^{n-m} (b_n^{-1})$ dostajemy zatem najwyższy współczynnik przy h. Dalej postępujemy indukcyjnie. Skoro umiemy dzielić z resztą, to oczywiście jeśli mamy nietrywialny ideał $I \triangleleft R[x; \sigma, \delta]$ oraz $f, g \in I$, to wówczas także reszta z dzielenia f przez g należy do I ($\deg(f) \geq \deg(g)$). Wśród takich reszt istnieje reszta najmniejszego stopnia. To jest (z dokładnością do stowarzyszenia) generator I.

Warto zauważyć, że dostaliśmy tu generator ideału lewostronnego. Zauważmy, że pierścień jest nieprzemienny i fakt, że $f = hg+r$ nie musi mieć nic wspólnego z ewentualnym faktem, że $f = gh'+r'$. Przeglądając ten dowód widać, że nie można uzyskać tego drugiego warunku. Przy wyliczaniu elementu α_n naszego ilorazu mielibyśmy warunek:

$$a_n x^n = b_m x^m \cdot \alpha_n x^{n-m} \Leftrightarrow a_n x^n = b_m \sigma^m(\alpha_n) x^n.$$

Założenie o injektywności σ nie pozwala tu na jednoznaczne określenie α_n.

Zostało więc do uzasadnienia uogólnione twierdzenie Hilberta o bazie. Dowód ma kilka etapów.

- Każdy element $t \in R[x;\sigma,\delta]$ można zapisać (dla pewnego n) w postaci:

  $$x^n + x^{n-1} b_{n-1} + \ldots + x b_1 + b_0.$$

  Wystarczy, gdy pokażemy ten krok dla jednomianów. Niech $f = a_k x^k$. Skoro σ jest automorfizmem, to istnieje takie $b_k \in R$, że $\sigma(b_k) = a_k$. Stąd:

  $$a_k x^k = x^k \sigma^{-k}(a_k) - \sum_{i=1}^{k} \delta(\sigma^{-i}(a_k)).$$

- Niech $I <_l R[x;\sigma,\delta]$. Definiujemy:

  $$I_n = \{b \in R : \exists_{b_{n-1},\ldots,b_0 \in R}\ x^n b + x^{n-1} b_{n-1} + \ldots + b_0 \in I\}.$$

  Z tego, że σ jest automorfizmem łatwo wywnioskować, że I_n są ideałami lewostronnymi w R. Co więcej, $I_n \subseteq I_{n+1}$. Istotnie, włożenie jest zadane przez mnożenie $f \longrightarrow xf$ (dlatego mamy współczynniki z niecodziennej strony, inaczej mielibyśmy tylko $\sigma(I_n) \subseteq I_{n+1}$).

- Jeśli $I, J <_l R[x;\sigma,\delta]$ tak, że $I \subseteq J$ oraz $\forall_n\, I_n = J_n \Rightarrow I = J$. Załóżmy przeciwnie, że $f \in J \smallsetminus I$ jest najmniejszego możliwego stopnia. Gdyby $\deg(f) \geq 0$ i $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, wówczas z faktu, że $I_n = J_n$ istnieje $w \in I \subseteq J$, że $w = a_n x^n + \ldots$. Wtedy $f - w \in J \smallsetminus I$ jest niższego stopnia.

- Niech $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$ będzie ciągiem lewostronnych ideałów w $R[x;\sigma,\delta]$. Aby pokazać tezę, wystarczy by ciąg ten się stabilizował. Niech $L_{ki} = (L_k)_i$. Wówczas mamy tablicę inkluzji:

  $$\begin{array}{ccccccc} L_{00} & \subseteq & L_{10} & \subseteq & L_{20} & \subseteq & \ldots \\ \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \\ L_{01} & \subseteq & L_{11} & \subseteq & L_{21} & \subseteq & \ldots \\ \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \cap\!\mid & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

  Z noetherowskości R mamy tu następujący, stabilizujący się ciąg inkluzji pomiędzy ideałami R:

  $$L_{00} \subseteq L_{11} \subseteq L_{22} \subseteq \ldots.$$

  Zatem od pewnego M wszystkie kolumny tej nieskończonej tablicy mają te same wyrazy. Zatem zgodnie z poprzednią obserwacją: $L_n = L_M$ dla każdego $n \geq M$. To kończy dowód.