Liczba dzielników liczby naturalnej

Arkadiusz Męcel

Seminarium olimpijskie dla nauczycieli, 29.02.2020 r., UMCS w Lublinie

Interesuje nas problem wyznaczania liczby dodatnich dzielników liczby naturalnej większej niż 1. Zacznijmy od ustalenia o co nam w zasadzie chodzi. Weźmy liczbę 30 i zapytajmy: ile ma dzielników? Na tym poziomie rachunkowym to nic trudnego, jesteśmy w stanie z pamięci wypisać wszystkie dzielniki:

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,$$

czyli dzielników jest 8. A gdybym utrudnił sprawę i powiedział, że nie wolno sobie wszystkich dzielników wypisywać, bo w przypadku liczby 30000 zajmie to dłuższą chwilę, to co wtedy? Jak je policzyć?

Wypisanie dzielników to jeszcze nie matematyka. Idea jest taka, żeby policzyć dzielniki a nie, żeby je wypisać. To samo w sobie jest już szalenie ważnym tematem matematycznym. W matematyce wielokrotnie trzeba coś udowodnić, sprawdzić, policzyć – nie mając możliwości wypisania sobie wszystkich opcji. Typowe zadanie tego typu, pochodzące z innego działu matematyki to: *uzasadnić, że co najmniej dwóch mieszkańców Warszawy ma w tym momencie dokładnie tyle samo włosów na głowie.* Czy jesteśmy w stanie policzyć każdemu włosy na głowie? Jest niemożliwe by jednocześnie zbadać wszystkich mieszkańców stolicy, a tak trzeba by zrobić. Nie ma potrzeby! Nie ma żadnych wątpliwości, że teza jest prawdziwa. `Dlaczego`? Badania pokazują, że mamy na głowie do kilkuset tysięcy włosów, podobno nie więcej niż 300000. A przecież mieszańców Warszawy jest dobrze ponad milion. A więc niezależnie od tego ile ma każdy włosów na głowie, to jakby każdemu dawać zaświadczenie ile ma tych włosów i wydrukować 300000 zaświadczeń, każde z inną liczbą włosów, to nie starczy ich dla miliona ludzi. Więc pewna para ludzi ma ich tyle samo. Żadnych rachunków. Tego typu zadań nie brakuje i ilustrują one coś bardzo ważnego.

Jak policzyć obiekty, których nie umiemy wypisać? Zagadnieniami tymi zajmuje się dział matematyki zwany kombinatoryką. Chcemy poznać jakieś własności kombinatoryczne dzielników, aby móc je zliczać. Służą do tego całkiem sympatyczne, z punktu widzenia dydaktycznego, narzędzia: opowiadania, kolorowania, grupowania w drużyny, turnieje itd. Nie chodzi jednak o żadne zaawansowane metody. Mamy dostępne jedynie metody szkolne. Wiemy czym jest dzielnik i znamy na poziomie intuicji dwie metody zliczania: zasadę mnożenia i zasadę dodawania. Znamy też rozkład na czynniki pierwsze. Wychodząc od nich musimy resztę zbudować sami. Wypróbujmy najpierw naszą intuicję na następującym zadaniu.

Zadanie 1 (Toruń 2004)**.** *Znajdź liczbę mającą cztery dzielniki, jeśli wiadomo, że jednym z nich jest 49.*

Cóż możemy powiedzieć o szukanej liczbie? Uczeń obeznany z metodami olimpijskimi powie zapewne: taka liczba jest postaci $49k$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Następnie skorzysta z najprostszej być może uwagi, jaką można sformułować na temat zliczania dzielników. Oto jej nieformalna postać.

Uwaga 1. *Dzielnik dzielnika jest dzielnikiem, czyli jeśli a dzieli b oraz b dzieli c, to a dzieli c.*

Czy widać `dlaczego` ten fakt jest prawdziwy? Można to oczywiście pokazać formalnie. Jeśli $ax = b$ oraz $by = c$, dla pewnych liczb całkowitych dodatnich x, y, to $c = axy$, czyli a dzieli c. Fakt ten ma przyjemny skutek matematyczny.

Wniosek 1. *Jeśli m jest dodatnim dzielnikiem n, to m ma nie więcej dzielników, niż n.*

Próbujemy, korzystając z tej obserwacji, wypisać jakieś dzielniki liczby $49k$. Na pewno należą do nich 1, k oraz $49k$, ale też $7k$, 7, 49. Wypisaliśmy w ten sposób sześć liczb. To za dużo, bo przecież miały być tylko cztery dzielniki. Oznacza to, że któreś z nich są takie same. Czy wiemy, że jakieś z tych liczb na pewno nie mogą być równe? Na pewno nie są takie same żadne z trzech liczb: $1, 7, 49$, ani też żadne z trzech liczb: $k, 7k, 49k$. Trzeba więc zbadać pozostałe możliwości. Liczba 1 może być ewentualnie równa k (na pewno nie $7k$ czy $49k$, `dlaczego`?). Wówczas jednak nasza liczba to 49, która ma tylko trzy dzielniki: 1, 7, 49. Może więc 7 równe jest k lub $7k$ (na pewno nie jest równe 49k)? Otóż jeśli $k = 7$, to mamy liczbę

$343 = 7^3$. Ona ma tylko cztery dzielniki. Czy to widzimy? Są to 1, 7, 49, 343. Możliwość, że $7 = 7k$ odpada, bo wtedy $k = 1$, a to już wykluczyliśmy. Wreszcie, może 49 równe jest $k, 7k$ lub $49k$? Sprawdzamy to w poszukiwaniu kolejnej liczby o własności przedstawionej w zadaniu. Jeśli $k = 49$, to nasza liczba to 7^4. A zatem ma ona... 5 dzielników! Są to $1, 7, 7^2, 7^3, 7^4$. Za dużo. Przypadki, gdy 49 równa jest $7k$ lub $49k$ już rozważyliśmy. A zatem jest tylko 343 spełnia warunki zadania.

Rozwiązanie tego zadania nie tylko sprawdziło nieco naszą intuicję, ale też po drodze pojawił się kilka razy motyw, który powinien doprowadzić do następującej obserwacji.

Uwaga 2. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, wówczas liczba p^n ma $n+1$ dzielników.*

`Dlaczego` ta uwaga jest prawdziwa? Już wyjaśniam. Jeśli k jest dzielnikiem p^n to albo jest samo liczbą pierwszą, albo ma dzielnik pierwszy... STOP! Jak to? `Dlaczego` ma dzielnik pierwszy? Jak uczeń tak zacznie dopytywać, to możemy się zdenerwować, ale to też okazja do nauczenia go czegoś.

Najgorsze co moglibyśmy w tym momencie zrobić, to powołać się na twierdzenie o rozkładzie na czynniki pierwsze. Proszę się na mnie nie irytować! Taka odpowiedź to gotowiec, a nie odpowiedź. Można prościej.

Odpowiedź nie jest banalna. Każda liczba całkowita większa od 1 ma dzielnik pierwszy. Gdyby tak nie było, to musiałaby istnieć jakaś najmniejsza liczba N, co nie ma dzielnika pierwszego. No to próbuję ją dzielić przez wszystkie liczby naturalne od 2 aż do $N-1$. Widzicie Państwo, że przez żadną z nich nie może być podzielna? Otóż nie może, ponieważ każda z liczb od 2 aż do $N-1$ jest mniejsza niż NAJMNIEJSZA liczba bez dzielnika pierwszego, a więc ma dzielnik pierwszy! No to N nie może się przez nią dzielić, bo zgodnie z uwagą wyżej dzielnik dzielnika jest dzielnikiem! A zatem N nie dzieli się przez NIC poza 1 oraz samą sobą. Czyli jest to liczba pierwsza. Ale to też źle! Bo N miała być niepodzielna przez liczbę pierwszą. Wniosek? Takiego najmniejszego $N > 1$ bez dzielników pierwszych nigdy nie było.

Czy teraz widzicie Państwo jak pokazać naszą uwagę? Jeśli dzielnik p^n ma dzielnik pierwszy, to to musi być p, i nic innego (każda inna liczba pierwsza jest względnie pierwsza z q – czy ja tu nie przemycam czegoś trudnego?). A więc każdy dzielnik p^n to musi być potęga p. A ich jest $n+1$. Uwaga została uzasadniona, a przy okazji przekonaliśmy się, że każda liczba całkowita dodatnia jest liczbą dzielników pewnej liczby.

Odeszliśmy nieco od głównego tematu. Czas na kolejną obserwację o zliczaniu dzielników.

Uwaga 3. *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas każdy dodatni dzielnik liczby n albo jest koleżeński, albo jest samolubny.*

Niech Państwa nie zdziwi to niematematyczne sformułowanie. Kombinatoryka charakteryzuje się formułowaniem rozmaitych opowieści ułatwiających zrozumienie tego w jaki sposób można zliczać różne obiekty matematyczne. O co chodzi powyżej? Otóż, jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczby n, to są dwie możliwości:

- istnieje liczba całkowita $d' \neq d$ taka, że $n = d \cdot d'$,
  na przykład dla dzielnika 2 liczby 30 takim kolegą „do pary" jest liczba 15,
- $n = d \cdot d$, jak się dzieje na przykład dla dzielnika 6 liczby 36. Dzielnik 6 można nazwać samolubnym.

Widzimy więc, że z każdą liczbą całkowitą n możemy związać taką społeczność jej dzielników. Normą jest, że każdy dzielnik ma różny od siebie dzielnik do pary. Może też być wyjątkowa sytuacja, gdy istnieje jeden wyjątkowy dzielnik, który nie ma innego do pary. Oznacza to, że liczba n jest wyjątkowa – jest kwadratem liczby całkowitej. Możemy teraz wysłowić naszą obserwację w języku matematycznym.

Twierdzenie 1. *Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.*

Fakt ten był motywem przewodnim artykułu z 11. numeru Gazetki OMJ Kwadrat. Spróbujmy go zastosować w kilku sytuacjach.

Zadanie 2 (GWO 2004)**.** *Znajdź wszystkie liczby naturalne podzielne przez 5 i mające dokładnie 5 dzielników naturalnych.*

To zadanie mogliśmy atakować już wcześniej, ale pięć dzielników to jednak dość sporo. Już przy czterech zabrnęliśmy w poważne rachunki. Teraz jednak wiemy, że dzielniki należy parować i, że może się ewentualnie zdarzyć jeden samolubny. Tak będzie w rozważanym przypadku. Skoro mamy pięć dzielników, to jest dzielnik „nie do pary" i to musi być pierwiastek z szukanej liczby? Jaki to pierwiastek? Naturalnie

nie wiemy. Wiemy jednak, że szukamy kwadratu podzielnego przez 5. Czy umiecie Państwo pokazać, że każdy kwadrat podzielny przez 5 musi być podzielny przez 25. To jest kluczowa sprawa. Rzeczywiście: $5k = n^2$. Jeśli n nie jest podzielne przez 5 to ta równość nie ma sensu, bo po jednej stronie jest liczba podzielna przez 5, a po drugiej nie (to, że to 5, a nie 6 jest ważne, bo niezerowe reszty z dzielenia przez 5 nie mnożą się do liczby podzielnej przez 5). A więc n jest podzielne przez 5, a n^2 przez 25. Czyli szukana przez nas liczba jest podzielna przez 25. Ma zatem dzielniki: 1, 5, 25, i jeszcze inne dwa. Jedno rozwiązanie widzimy od razu na mocy naszej uwagi, że liczba 5^4 ma 5 dzielników. Czy są inne rozwiązania? Mamy 5 dzielników, w tym 1, 5, 25. Wiem, że jeden z nich jest „samolubny". To może być tylko 25. Czyli 5^4 to jedyne rozwiązanie.

Zadanie 3 (Szwecja 2006)**.** *Liczby całkowite dodatnie a oraz b mają odpowiednio po 99 oraz 101 dodatnich dzielników. Czy iloczyn ab może mieć dokładnie 150 dodatnich dzielników?*

To zadanie „pachnie już" prawdziwymi zawodami. Ma dziwne sformułowanie i na pierwszy rzut oka nie wiadomo co tu zrobić. A jednak teraz wiemy już dużo o liczbach a, b. Mają 99 i 101 kwadratów, czyli... nieparzyście wiele! A ich iloczyn ma parzyście wiele. Czy to możliwe? Liczby a i b muszą być kwadratami, a zgodnie z założeniem ab nie może być kwadratem, bo ma parzyście wiele dzielników. Ale iloczyn dwóch kwadratów to kwadrat, czyli z jednej strony ab musi być kwadratem, z drugiej – nie może. Sprzeczność. Nie ma zatem takich liczb a, b.

Zadanie 4 (Kwadrat nr 11)**.** *Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 123, która jest kwadratem liczby całkowitej?*

Kolejne zadanie, które w pomysłowy sposób wykorzystuje wiedzę szkolną. To mogło by spokojnie być zadanie na klasówkę (na najwyższa ocenę). Co to znaczy, że liczba na sumę cyfr 123? To znaczy, że jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9. Innych kryteriów podzielności z sumą cyfr uczniowie przecież nie znają. A może być kwadrat, który jest podzielny przez 3, a przez 9 nie? Już od dłuższej chwili mówimy, że takie przypadki nie są możliwe.

Zadanie 5 (Kwadrat nr 11)**.** *Jaś wybrał pewną dodatnią liczbę całkowitą i powiedział Małgosi, ile ta liczba ma dzielników. Czy tylko na podstawie tej informacji Małgosia może rozstrzygnąć, czy wybrana przez Jasia liczba jest sześcianem pewnej liczby całkowitej?*

To dobry przykład tak zwanego zadania na kontrprzykład. Formułujemy pewne przypuszczenie w formie pytania. Jeśli umiemy potwierdzić to przypuszczenie, trzeba przedstawić uzasadnienie. Jeśli umiemy mu zaprzeczyć, wystarczy podać przykład. Otóż można łatwo wskazać dwie liczby całkowite, z których jedna jest sześcianem, a druga nie jest, a mają tę samą liczbę dzielników. Są to liczby 6 i 8. Każda z nich ma po 4 dzielniki, a więc gdybym tylko znał liczbę dzielników, to nie umiałbym odróżnić sześcianu od nie-sześcianu. Inna sprawa, że jeśli liczba dzielników jest podzielna przez 3, to liczba nie może być sześcianem. Jak to pokazać? O tym dalej.

Zadanie 6 (Kwadrat nr 12)**.** *Czy istnieje taka liczba całkowita $n > 2$, że liczba $n!$ ma dokładnie 101 dodatnich dzielników?*

To zadanie w zasadzie powinno być na końcu zestawu, ale ciągle próbuję prowokować Państwa do nie-korzystania ze wzoru na liczbę dzielników i do zastanawiania się nad problemem „takim, jakim on jest". Czasem to prowadzi w ślepy zaułek. Taka jest matematyka. Co nam mówi obecna wiedza? Gdyby dla pewnego n iloczyn $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ miał 101 dodatnich dzielników, to byłby to kwadrat, bo 101 jest liczbą nieparzystą. Czy $n!$ może być kwadratem? Muszę powiedzieć, że nie znam elementarnego wyjaśnienia tego faktu, ale odpowiedź jest negatywna. Do uzasadnienia, według mojej wiedzy, potrzebny jest poważny wynik –słynne XIX-wieczne twierdzenie Czebyszewa o liczbach pierwszych. Poświęćmy mu chwilę, bo warto.

Twierdzenie 2. *(Czebyszew, 1852) Dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza p taka, że $n < p < 2n$.*

To twierdzenie mówi coś więcej niż to, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Mówi ono, że startując od pewnej liczby całkowitej możemy mieć pewność, że zanim osiągniemy jej dwukrotność, natkniemy są na liczbę pierwszą. Proszę zauważyć, że jest wiele nieskończonych zbiorów liczb całkowitych, które nie mają tej własności – na przykład zbiór potęg liczby 3 postaci: $\{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$. Pomiędzy 10, a 20 nie ma potęgi liczby 3. Liczby pierwsze, choć nie znamy dokładnie ich rozmieszczenia, zachowują się w zaskakująco regularny sposób. Największe hipotezy matematyczne naszych czasów mierzą się z tym problemem.

Sprawdzamy teraz, że $n!$ nie może być kwadratem. Załóżmy, że $n \geqslant 4$. Na mocy powyższego twierdzenia istnieje liczba pierwsza p taka, że $\frac{n}{2} < p < n$. Skoro n ma być kwadratem, to zgodnie z obserwacjami w poprzednich zadaniach także p^2 musi dzielić n (tak samo jak gdy 3 dzieli kwadrat, to także 9 go dzieli). Skoro jednak p^2 jest dzielnikiem n, czyli $p^2k = n$, to znaczy, że p jest dzielnikiem liczby pk, która jest mniejsza od n. Zatem $\frac{pk}{p} \geqslant 2$. Zatem $pk \geqslant 2p > n$ (ostatnia nierówność to znowu tw. Czebyszewa). To jednak sprzeczność, bo pk nie może być większe od n. Zatem p dzieli $n!$, ale p^2 nie. A zatem takiego $n \geqslant 4$ nie ma. Sprawdzenie, że 2! oraz 3! to nie kwadraty jest proste.

Jest jasne, że mało kto wpadłby na takie rozwiązanie. Rozwiązanie zadania 6 polega na zauważeniu, że liczba dzielników liczby $n!$, czyli 101, to liczba pierwsza. Twierdzimy, że $n!$ nie może mieć pierwszej liczby dzielników. Wynika to z następującej obserwacji.

Uwaga 4. *Jeśli a, b są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi, to:*

$$\text{liczba dzielników } a \cdot \text{ liczba dzielników } b = \text{ liczba dzielników } ab.$$

Jeśli znowu założymy, że nie wolno nam korzystać z twierdzenia o rozkładzie na czynniki pierwsze, to trzeba się będzie chwilę pomęczyć i wykorzystać tzw. Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki. Dowód zajmie dłuższą chwilę. Jako, że w zasadzie byłby on dowodem twierdzenia o rozkładzie na czynniki pierwsze, pominiemy go („To wcześniej nie mogliśmy pominąć, a teraz możemy? `Dlaczego`”?!). Stwierdzenie, że a i b są względnie pierwsze oznacza, że w rozkładzie na czynniki pierwsze mają różne dzielniki pierwsze. Jeśli jakaś liczba pierwsza dzieli a, to nie dzieli b i odwrotnie. Jeśli jednak wezmę jakikolwiek dzielnik liczby ab to ma on w rozkładzie na czynniki pierwsze jedynie liczby pierwsze z rozkładu a oraz z rozkładu b i da się (przez ich względną pierwszość) jednoznacznie powiedzieć które liczby pierwsze są z którego rozkładu. Stąd każdy dzielnik ab to w istocie iloczyn dzielników liczby a oraz liczby b (któryś z nich może być równy 1). Iloczyny tej postaci nie powtarzają się, to znaczy: jeśli $pq = p'q'$, gdzie $NWD(p, q) = NWD(p', q') = NWD(p, q') = NWD(q, p') = 1$, to $p = p'$ oraz $q = q'$. Koniec dowodu.

Jak teraz pokazać, że liczba dzielników $n!$ jest złożona (gdy nie wynosi 1). Otóż 2 oraz 3 są (przeważnie) dzielnikami $n!$, a to oznacza, że w rozkładzie na czynniki pierwsze $n!$ mamy $2^a \cdot 3^b \cdot x$, gdzie $2^a, 3^b, x$ to liczby parami względnie pierwsze. Zatem liczba dzielników $n!$ to liczba $(a+1)\cdot(b+1)\cdot$ liczba dzielników x. Wynika to z faktu, że 2^a ma $a + 1$ dzielników, a 3^b ma $b + 1$ dzielników. Widzimy więc, że $n!$ nie może mieć 101 dzielników.

Zadanie 7 (Szwajcaria, 1998)**.** *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^2 + 11$ ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.*

To zadanie też nie ma nic wspólnego z żadnym wzorem, choć mówi o liczbie dzielników, i to konkretnej. Do rozwiązania „trzeba tylko zauważyć”, że $p^2 + 11$ jest dla $p > 4$ podzielne przez 3 i przez 4. A to znaczy, że $p^2 + 11$ jest podzielne przez 12, które ma 6 dzielników. Wiecie Państwo jak to pokazać? To też typowa teorioliczbowa zagadka. Pamiętajmy, że p jest liczbą pierwszą. Musi mieć więc postać... $6k + 1$ lub $6k + 5$. Istotnie, p nie może być postaci $6k$, bo byłoby liczbą złożoną. Skoro zaś $p > 4$, to nie może być też równe $6k + 3$. Oczywiście p nie ma reszty 2 lub 4 z dzielenia przez 6, bo p musi być nieparzyste. A zatem zostają tylko reszty 1 i 5. Ale:

$$(6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1, \quad (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25.$$

Obydwa powyższe wyrażenia powiększone o 11 dają liczbę podzielną przez 12 (i nie równą 12, bo $p > 4$). Zatem na mocy pierwszego wniosku $p^2 + 11$ ma więcej dzielników, niż 12, czyli ma ich więcej niż 6, co jest niemożliwe. Państwu polecam sprawdzić co się dzieje dla $p = 2$ oraz $p = 3$.

Tego typu zagadnień jest więcej. Jedno z nich, bardzo piękne i klasyczne jest następujące.

Zadanie 8. *Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od* 1 *do* 1000*, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez* 3 *itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik* 1000 *razy?*

Jak rozwiązać takie zadanie? Nie da się chyba rozrysować sobie 1000 żarówek i zrobić symulacji 1000 operacji przełączania żarówek, zgodnie z opisem. Mogłoby to być ewentualnie ładne zadanie na projekt informatyczny. A jednak odpowiedź jest niesamowicie prosta i atrakcyjna. Otóż zauważmy, że jeśli spojrzymy na przykład na żarówkę o numerze 100, to które przełączenia jej dotyczyły? Oczywiście pierwsze, bo wtedy zapalono wszystkie światła. Potem drugie, bo 100 dzieli się przez 2, a więc w drugiej operacji zgaszono żarówkę o numerze 100. Trzecie przełączenie nie dotyczyło 100, bo 3 nie jest dzielnikiem 100. Czwarte przełączenie zmieniło stan żarówki o numerze 100. Włączyło ją ponownie, bo 4 jest dzielnikiem 100. Czy widzicie Państwo zależność? Żarówka o numerze 100 została przełączona tyle razy, ile dzielników ma liczba 100. I to dotyczy każdej innej żarówki. Ale to nie wszystko. Udało nam się jakoś połączyć problem z liczbą dzielników, ale jak rozpoznać żarówki, które po 1000 przełączeń pozostały zapalone? Otóż skoro zaczęliśmy od zgaszonych żarówek, a potem każda żarówka poddana jest na przemian zapalaniu i gaszeniu, to po zakończeniu przełączania zapalone są te, których stan zmienił się... nieparzyście wiele razy! A zatem zapalone zostaną tylko żarówki o tych numerach, których liczba dzielników jest nieparzysta! Ale wiemy dokładnie jakie to numery. Są to kwadraty liczb mniejszych od 1000. Jest ich 31.

Twierdzenie 3. *Niech liczba n ma rozkład na czynniki pierwsze postaci:*

$$n = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{a_1\ razy} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots p_2}_{a_2\ razy} \cdot \ldots \underbrace{p_s \cdot \ldots p_s}_{a_s\ razy} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s},$$

gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ są liczbami pierwszymi oraz $a_1, a_2, \ldots, a_s$ to liczby całkowite dodatnie. Wówczas liczba dzielników liczby n równa jest:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_s + 1).$$

Nasze wstępne uwagi pozwalają udowodnić wzór na liczbę dzielników bez problemu. Liczby $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_s^{a_s}$ są parami względnie pierwsze. Każda z nich ma odpowiednio a_1+1, a_2+1, ..., a_s+1 dzielników. Z ostatniej uwagi wynika zatem, że liczba dzielników n to iloczyn tych liczb.

Poznaliśmy zatem wzór na liczbę dzielników. Jakie zadania możemy rozwiązać z jego pomocą? Część z nich wypisałem na liście poniżej. Są one rozwiązane w 11. i 12. numerze gazetki Olimpiady Matematycznej Juniorów „Kwadrat". Znajdziecie tam Państwo jeszcze więcej przykładów, i więcej metod postępowania. Zaawansowanych zachęcam do lektury tekstu prof. A. Nowickiego (UMK) z serii: Imperium Liczb pod adresem: `http://www-users.mat.umk.pl/~anow/imperium/far04.pdf`. Polecam oczywiście całą serię!

Zadanie 9 (Kwadrat nr 12)**.** *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite podzielne przez* 100*, które mają dokładnie* 15 *dzielników.*

Szukana liczba ma 15 dzielników. Zauważmy, że we wzorze na liczbę dzielników występują jedynie liczby większe od 1. A liczba 15 ma tylko jeden rozkład na iloczyn liczb całkowitych innych niż 1 i 15, czyli rozkład $3 \cdot 5$. Oznacza to, że szukana liczba ma tylko dwa czynniki pierwsze. Jeden musi występować w potędze 2, a drugi w potędze 4. Wiemy też, że nasza liczba jest podzielna przez 100, a więc na ma pewno w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby pierwsze wchodzące do rozkładu 100, czyli iloczyn $2^2 \cdot 5^2$. A zatem ta liczba to $2^2 \cdot 5^4 = 2500$ lub $2^4 \cdot 5^2 = 400$.

Zadanie 10 (Kwadrat nr 12)**.** *Czy liczba o dokładnie* 100! *dzielnikach dodatnich może być sześcianem liczby całkowitej?*

NIE. Sześcian liczby całkowitej ma rozkład na czynniki pierwsze, w którym każda potęga liczby pierwszej jest dzielnikiem liczby 3 (`dlaczego`?). Oznacza to, że iloczyn występujący we wzorze na liczbę dzielników, to iloczyn liczb dających resztę 1 z dzielenia przez 3 (`dlaczego`?) A zatem liczba dzielników sześcianu nie jest podzielna przez 3. Natomiast liczba $100! = 2 \cdot 3 \cdot 98!$ jest podzielna przez 3.