Propozycje tematów zagadnień na seminarium
„Klasyczne struktury algebraiczne i ich zastosowania”

Podstawowym źródłem zagadnień wprowadzającym w klasyczną teorię pierścieni nieprzemiennych będzie podręcznik Mateja Bresara *Introduction to Noncommutative Algebra.* Przykładowe tematy bazujące na tym źródle to:

- Twierdzenie Frobeniusa
- Centralne algebry i ich automorfizmy
- Maksymalne podciała w centralnych prostych algebrach i twierdzenie Wedderburn'a o skończonych pierścieniach z dzieleniem
- Maksymalne przemienne podalgebry w macierzach nad ciałem
- Iloczyn tensorowy algebr

Tematy dodatkowe

1 O niezależności warunków w definicji odwzorowań liniowych

Definicja przekształcenia liniowego składa się z warunku addytywności oraz warunku jednorodności. W kontekście przestrzeni liniowych nad ciałem żaden warunek nie implikuje drugiego bez dodatkowych zastrzeżeń, patrz [2], [3]. W ogólniejszym kontekście teorii modułów oznacza to, że jeśli $End_R(V)$ jest zbiorem endomorfizmów (lewostronnego) R-modułu V, zaś $M_R(V)$ – zbiorem jednorodnych funkcji na V, wówczas $End_R(V) \subseteq M_R(V)$. Różne klasyczne prace dotyczą warunku równości w tej inkluzji, np. [1], [2]. Zagadnienie to można też rozpatrywać z punktu widzenia teorii równań funkcyjnych, patrz [3], [4].

1 W. S. Martindale III, *When are multiplicative mappings additive?* Proc. Amer. Math. Soc., 21, 695–698 (1969).

2 C. J. Maxsonm J. H. Meyer, *How Many Subspaces Force Linearity?*, The American Mathematical Monthly 108 (2001).

3 A. Naziev, *On the independence of conditions in the linear mapping definition*, `https://arxiv.org/abs/2208.12648`.

4 M. Bresar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale III, *Functional Identities*, Birkhauser Verlag, 2007.

2 Odwracalność macierzy nad pierścieniami nieprzemiennymi

Jeśli pierścień R ma tę własność, że dla $r, s \in R$ warunek $rs = 1$ implikuje $sr = 1$, wówczas nazywamy go pierścieniem skończonym w sensie Dedekinda [1]. Jeśli własność tę mają dodatkowo wszystkie pierścienie $M_n(R)$, dla $n \geqslant 1$, wówczas pierścień nazywamy stabilnie skończonym (stably finite) [2]. Wzór na macierz odwrotną nad kwaternionami można wyliczyć podobnie jak na algebrze liniowej [3]. Jeśli zapytamy o odwracalność macierzy transponowanej do odwracalnej, już dla pierścieni z dzieleniem własności tej nie ma, ale są klasy spełniające ten warunek [4] (oraz bibliografia)

1 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.

2 N. Cohen, S. de Leo, *Quaternionic matrices: inversion and determinant*, Electronic Journal of Linear Algebra.

3 R.N. Gupta a, A. Khurana, D. Khurana, T.Y. Lam, *Rings over which the transpose of every invertible matrix is invertible, Journal of Algebra* 322 (2009).

3 Moduły i kraty podmodułów

Krata jest strukturą kombinatoryczną znajdującą się w tle większości ważnych struktur algebraicznych, pod postacią kraty podgrup, ideałów, czy podmodułów. Niech A będzie R-algebrą nad niezerowym pierścieniem oraz niech M będzie A-modułem. Zbiór $S(M)$ wszystkich podmodułów M jest częściowo uporządkowany przez relację inkluzji. Zbiór ten jest również kratą zupełną, mającą szereg istotnych dodatkowych własności, przede wszystkim modularność, spośród których szczególnie istotne jest badanie warunków: łańcuchowości i rozdzielności.

1 R. S. Pierce, *Associative algebras, chapter 2*, GTM 86, Springer 1982.

2 G. Birkhoff, Lattice Theory, AMS, 1967.

3 M. Jastrzębska, *O pewnych kratach testowych*, Delta 1.2014.

4 Algebry incydencji

Algebry incydencji to obiekt wprowadzony przez Gian-Carlo Rotę w latach 60' XX wieku jako narzędzie do badania problemów kombinatorycznych, uogólniający teoriomnogościową zasadę włączeń i wyłączeń oraz teorioliczbową formułę inwersyjną Mobiusa. Algebry te obejmują jednak znacznie szerszą klasę ważnych przykładów algebr, znajdując szczególne miejsce w tzw. teorii reprezentacji algebr.

1 E.Spiegel, C.J. O'Donnell, *Incidence Algebras*, CRC Press 1997.

2 G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of M¨obius functions, Z Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), 340-368.

3 Iovanov M., Koffi G.: On Incidence Algebras and their Representations (2017), https://arxiv.org/abs/1702.03356v5.

5 Algebry z bazami multyplikatywnymi

W skończenie wymiarowej algebrze nad ciałem K, bazę B nazwiemy multyplikatywnie zamkniętą, jeśli $B \cup \{0\}$ jest półgrupą (jest zamknięta na mnożenie). Naturalnym przykładem takich algebr są algebry (pół)grupowe. Klasa ta obejmuje jednak znacznie szerszy zakres algebr, a istnienie bazy multyplikatywnej wymusza ciekawe własności algebry. Z drugiej strony są naturalne przykłady negatywne: żadna nietrywialna baza Hamela ciała $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nie jest multyplikatywnie zamknięta.

1 C. de la Mora, P. Wojciechowski, *Multiplicative bases in matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications 419 (2006), 287-298.

2 T. Kania, *On bases that are close under multiplication*, The American Mathematical Monthly 124 (2017), 651-653.

3 R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Sameron, Representation finite algebras and multiplicative bases, Invent. Math. 81 (1985), 217-285.

6 Orbity działania grupy macierzy górnotrójkątnych

Niech $B_n(K)$ będzie zbiorem odwracalnych macierzy górnotrójkątnych rozmiaru n. Rozważamy działanie tej grupy na zbiorze macierzy $M_n(K)$ przez sprzęganie oraz działanie grupy $B_n(K) \times B_n(K)$ na $M_n(K)$ dane wzorem $(b_1, b_2)m = b_1 m b_2^{-1}$. Drugie z tych działań ma skończenie wiele orbit, zarówno przy działaniu na $Gl_n(K)$, jak i na $M_n(K)$. Działanie przez sprzęganie na całym $M_n(K)$ ma nieskończenie wiele orbit, o ile nie ograniczymy zbioru macierzy, na przykład do nilpotentnych stopnia 2.

1 A. Melnikov, *B-Orbits in Solutions to the Equation $X^2 = 0$ in Triangular Matrices*, J. Algebra 223 (2000), 101-108.

2 D.Ž. Djoković, J. Malzan, *Orbits of Nilpotent Matrices*, Linear Algebra and its Applications, 32 (1980), 157-158.

3 M. Boos, M. Reineke, *B-orbits of 2-nilpotent matrices and generalizations*, Highlights in Lie Algebraic Methods, Birkhauser 2012.

7 Rachunek prawdopodobieństwa w grupach i pierścieniach skończonych

Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwa elementy skończonej grupy G lub pierścienia skończonego R są przemienne?

1 D. MacHale, *Commutativity in Finite Rings*, The American Mathematical Monthly, 83, (1976), 30-32.

2 D. MacHale, *How Commutative Can a Non-Commutative Group Be*? The Mathematical Gazette 58 (1974), 199-202.

3 R. M. Guralnick, G. R. Robinson, *On the commuting probability in finite groups*, J. Algebra 300 (2006) 509-528.

8 Prime avoidance lemma

Klasyczny rezultat zwany prime avoidance lemma mówi, że jeśli ideał I w przemiennym pierścieniu R zawarty jest w sumie skończenie wielu pierścieni pierwszych P_i, to ideał ten zawarty jest w którymś z P_i. Lemat ten uogólniano w różnych kierunkach. Jeden z nich to badanie pierścieni, w których opuścić można warunek skończoności rodziny ideałów $\{P_i\}$, a inny — to rozważanie lematu w kontekście nieprzemiennym.

1 M. F. Atiyah, I.G. MacDonald *Introduction To Commutative Algebra*, CRC Press 1994.

2 O. A. Karamzadeh, *The prime avoidance lemma revisited*, Kyungpoook Math. J. 52 (2012) 149-153.

3 J. Chen, *Infinite prime avoidance*, arXiv:1710.05496v1.

4 A. Tarizadeh, J. Chen, *Avoidance and absorbance*, J. Algebra 582 (2021), 88-99.

9 Zagnieżdżone pierwiastki

Upraszczanie pierwiastków typu $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ jest istotnym zagadnieniem teorii obliczeń. Niemal do końca XX wieku nie był znany ogólny algorytm (ani kryterium) usuwania niewymierności, a więc przedstawiania zagnieżdżonych pierwiastków jako kombinacji pierwiastków o niższym stopniu zagnieżdżenia, np. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{1/9} - \sqrt[3]{2/9} + \sqrt[3]{4/9}$. Zagadnienie to można rozważać w języku metod teorii Galois.

1 S. Landau, *Simplification of Nested Radicals*, SIAM Journal on Computing 21 (1992).

2 M. Honsbeek, *Radical extensions and Galois groups*, praca magisterska.

3 H. M. Lenstra, *Entangled radicals*, Colloquium Lectures, American Mathematical Society 112th Annual Meeting, San Antonio, January 12–15, 2006.