Kolejny kwadrat

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
14-15.05.2021 r.

Bohaterem tego referatu jest ciąg wszystkich kwadratów liczb całkowitych dodatnich postaci:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots$$

Popularnym typem zadań konkursowych jest pytanie o to czy liczba spełniająca określone warunki może być kwadratem liczby całkowitej. Pytanie to może być także ukryte w założeniach zadania, bądź równoważne tezie. Oto przykładowe podejścia do tego problemu, którym poświęcone zostały artykuły w gazetce OMJ „Kwadrat”.

(1) Badanie zapisu dziesiętnego liczby, na przykład poprzez następujące własności kwadratów:

- kwadrat liczby całkowitej może kończyć się jedynie cyframi $0, 1, 4, 5$ lub 6,
- kwadrat liczby całkowitej musi się kończyć parzystą liczbą zer,
- kwadrat liczby nieparzystej ma parzystą cyfrę dziesiątek,
- jeśli suma cyfr kwadratu jest podzielna przez 3, to jest podzielna przez 9.

(2) Badanie rozkładu liczby na dzielniki pierwsze, na przykład korzystając z następujących faktów:

♡ jeśli liczba pierwsza p dzieli ab, gdzie a, b są całkowite, to p dzieli a lub p dzieli b,
♣ jeśli liczba pierwsza p dzieli a^2, gdzie a jest całkowita, to p^2 też dzieli a^2,
♠ jeśli $n^2 = m^2a$, gdzie a, m, n są całkowite dodatnie, to a jest kwadratem,
♢ jeśli $n^2 = ab$, gdzie $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, to a, b są kwadratami.

(3) Badanie reszt z dzielenia (tzw. reszt kwadratowych), wiedząc choćby, że:

- kwadraty liczb całkowitych dają jedynie reszty 0 lub 1 z dzielenia przez 3 i 4,
- kwadraty liczb całkowitych dają jedynie reszty 0, 1 lub 4 z dzielenia przez 5 i 8.

(4) Sprawdzanie, czy liczba nie leży pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb.

Odnośniki do artykułów poświęconych tym metodom podane są niżej.

- Łukasz Bożyk, *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta,* Kwadrat 7 (grudzień 2012 r.),
- Joanna Jaszuńska, *Kwadraty i dzielniki*, Kwadrat 11 (grudzień 2013 r.),
- Joanna Jaszuńska, *Kwadraty i dzielniki raz jeszcze*, Kwadrat 12 (czerwiec 2014 r.),
- Tomasz Kobos, *Cyfrowe problemy*, Kwadrat 17 (luty 2016 r.),
- Joanna Jaszuńska, *Różnica kwadratów*, Kwadrat 18 (sierpień 2016 r.),
- Michał Kieza, *Między kwadratami*, Kwadrat 20 (wrzesień 2017 r.).

Ostatni artykuł poświęcony jest tematowi, który chcemy dziś szerzej poruszyć. Podstawowa obserwacja to:

Obserwacja 1. *Nie istnieje liczba całkowita m taka, że dla pewnego całkowitego n mamy:*

$$n^2 < m^2 < (n+1)^2.$$

Fakt ten, choć w zasadzie nie wymaga uzasadnienia, jest podstawą wielu zadań, niekoniecznie wcale banalnych. Trzeba powiedzieć, że matematycy nie mają pełnej wiedzy o tym co dzieje się pomiędzy kolejnymi kwadratami. Jeden z najsłynniejszych nierozwiązanych problemów teorii liczb, tzw. problem Legendre'a brzmi: czy pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi kwadratami liczb całkowitych dodatnich znajduje się liczba pierwsza? Problem ten, obok[1] hipotezy Goldbacha, problemu liczb bliźniaczych oraz pytania o liczbę liczb pierwszych postaci $n^2 + 1$ stanowi jedno z największych wyzwań współczesnej teorii liczb (pominąwszy, oczywiście, hipotezę Riemanna).

Powiedzmy nieco więcej o różnicach kolejnych kwadratów.

[1] Te cztery problemy nazywane są często problemami Landau, od nazwiska niemieckiego matematyka Edmunda Landau, który zestawił je ze sobą jako podstawowe, ale „nieatakowalne przy obecnym stanie matematyki” pytania dotyczące liczb pierwszych na V Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1912 roku. Po stu latach można powiedzieć, że w badaniu tych hipotez nastąpił niemały postęp, ale żadna z nich nie jest potwierdzona, a metody zaangażowane w ich rozstrzygnięcie są niezwykle skomplikowane. Wybitny wkład w atakowanie tych problemów ma prof. Henryk Iwaniec, którego przełomowe wyniki doceniono na równi z osiągnięciami medalistów Fieldsa i wyróżniono prestiżowymi nagrodami Ostrowskiego (2001), Cole'a (2002) i Shawa (2015).

Obserwacja 2. *Różnica $n+1$-wszego oraz n-tego kwadratu jest $n+1$-wszą liczbą nieparzystą.*

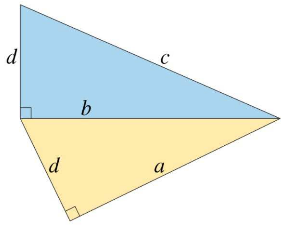
Dowód. Oczywiście $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

Powyższa obserwacja nie jest zwykłą „zabawką matematyczną”, ale podstawą słynnego prawa Galileusza o swobodnym spadaniu (z 1602 roku). Mówiąc poglądowo, głosi ono, że dystanse pokonywane przez spadający swobodnie obiekt w kolejnych jednostkach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste.

Wniosek 1. *Dwie kolejne liczby całkowite dodatnie nie mogą być kwadratami.*

Wniosek 2. *Jeśli a, b, c są trzema kolejnymi kwadratami, to $b - a \neq c - b$.*

W ostatnim wniosku występuje założenie, że liczby a, b, c są **kolejnymi** kwadratami. Jest ono kluczowe. Mamy bowiem $7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2 = 24$. Swoją drogą słynne (choć nie najsłynniejsze) twierdzenie Fermata z 1670 roku (rozwiązujące problem Fibonacciego z roku 1225) mówi, że nawet jeśli różnice pewnych dwóch par kwadratów liczb całkowitych (lub ogólniej: liczb wymiernych) są identyczne, to nie mogą być one kwadratami. Innymi słowy, w poniższej konfiguracji trójkątów prostokątnych jedna z długości a, b, c, d musi być liczbą niewymierną.



Jeśli $d^2 = b^2 - a^2 = c^2 - b^2$, to jedna z liczb a, b, c, d jest niewymierna. Źródło: Wikipedia. Fermat's right triangle theorem.

* * *

W poniższych rozwiązaniach zawsze staramy się „wstawić liczbę” pomiędzy kwadraty. W niektórych sytuacjach można to zrobić bezpośrednio, a czasami potrzebny jest dodatkowy pomysł. Na początku (zwykle) każdego z rozwiązań staram się wskazać ten „pomysł”. Często stanowi on bowiem istotę rozwiązania zadania konkursowego. Czasem skorzystamy też z „asa w rękawie”: jednego z faktów $\heartsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$, wymienionych wyżej.

* * *

Zadanie 1. *Udowodnij, że liczba* $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ *nie jest kwadratem*[2].

Rozwiązanie. (za W. Guzicki: *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, str. 393) Mamy:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1 = 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{200}+3\underbrace{00\ldots0}_{100}+1 = 100^{200} + 3\cdot 10^{100} + 1.$$

Mamy też

$$10^{200} + 2\cdot 10^{100} + 1 < 100^{200} + 3\cdot 10^{100} + 1 < 10^{200} + 4\cdot 10^{100} + 4,$$

czyli

$$(10^{100}+1)^2 < 1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99} < (10^{100}+2)^2.$$

Rozważana liczba leży zatem między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, a więc nie jest kwadratem liczby całkowitej. Rozumowanie jest całkowicie bezpośrednie. Alternatywne rozwiązanie polega na sprawdzeniu, że rozważana liczba daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3 (uogólniona cecha z dzielenia przez 3). ■

Zadanie 2. *Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n liczba $n(n+3)$ jest kwadratem?*

Rozwiązanie. Zauważmy, że $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, zaś $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$. Zaś dla $n > 0$ mamy:

$$n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + 3n < n^2 + 4n + 4.$$

A zatem umieściliśmy $n^2 + 3n$ między dwoma kolejnymi kwadratami. Musi więc zachodzić równość

$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 3n.$$

Zatem $n = 1$. ■

Uwaga. Gdyby założyć, że n może być niedodatnią liczbą całkowitą, to podobna argumentacja daje nieco więcej rozwiązań: $-4, -3, 0$. Proszę spróbować znaleźć odpowiednie szacowania.

[2] Termin „kwadrat” oznacza w tym zestawie zawsze: „kwadrat liczby całkowitej”.

Zadanie 3. *Udowodnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie może być kwadratem.*

Rozwiązanie. Kluczowe jest właściwe oznaczenie trzech kolejnych liczb w postaci: $n-1, n, n+1$ (zamiast narzucającego się bardziej: n, $n+1$, $n+2$, które komplikuje rozumowanie). Jest to konkursowy „standard". Chodzi o możliwość skorzystania ze wzoru skróconego mnożenia $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$. Mamy bowiem:

$$(n-1)n(n+1) = (n^2-1)n.$$

Zauważmy jednak, że liczby n oraz $n^2 - 1$ są względnie pierwsze. Istotnie, jeśli $d > 1$ jest dzielnikiem n, to przy dzieleniu $n^2 - 1$ przed d dostajemy resztę $d - 1$. A zatem aby $(n-1)n(n+1)$ było kwadratem potrzeba, aby zarówno $n^2 - 1$, jak i n były kwadratami. Korzystamy zatem z obserwacji $\diamondsuit$.To oznacza, że również $n^2 - 1$ oraz n^2 są kwadratami! To jest jednak niemożliwe; dwie kolejne liczby całkowite dodatnie nie mogą być kwadratami! ■

Zadanie 4. *Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b spełniających równanie*

$$a^2 + \mathrm{NWD}(a^2, b^2) = b^2.$$

Rozwiązanie. Niech $d = \mathrm{NWD}(a^2, b^2)$. Kluczowa obserwacja: d jest kwadratem (równym $\mathrm{NWD}(a,b)^2$, ale tego nie użyjemy). Istotnie, jeśli liczba pierwsza p dzieli a^2 oraz b^2, to również p^2 dzieli a^2 oraz b^2 (obserwacja $\clubsuit$). Iloczyn wspólnych dzielników pierwszych a^2 i b^2 to d. A zatem równanie z treści zadania można przepisać do postaci:

$$a^2 + d^2 = b^2.$$

Równoważnie:

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1 = \left(\frac{b}{d}\right)^2.$$

A zatem dostaliśmy sytuację, w której dwie kolejne liczby całkowite dodatnie są kwadratami. Nie jest to możliwe, zatem równanie $a^2 + \mathrm{NWD}(a^2, b^2) = b^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. ■

Zadanie 5. *Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ jest niewymierna.*

Rozwiązanie. Po raz kolejny rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że $q = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ jest liczbą wymierną. Podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy:

$$q^2 = (n+1) + 2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + n,$$

czyli:

$$\frac{q^2 - (2n+1)}{2} = \sqrt{n(n+1)}.$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą wymierną, więc $n(n+1)$ musi być kwadratem liczby wymiernej. Skoro jednak $n(n+1)$ jest całkowita, to musi być kwadratem liczby całkowitej. To jest jednak niemożliwe, bo liczba ta leży ściśle pomiędzy n^2 a $(n+1)^2$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

Zadanie 6. *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba $2^n + 7^n$ jest kwadratem.*

Rozwiązanie. Dla $n = 1$ liczba $2^n + 7^n$ równa jest 9, czyli jest kwadratem. Pokażemy, że jest to jedyne rozwiązanie. Pomysł: rozważmy osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

- Jeśli $n = 2m$, to

  $$(7^m)^2 = 7^n < 2^n + 7^n = 4^m + 7^{2m} < 1 + 2 \cdot 7^m + 7^{2m} = (7^m + 1)^2,$$

  czyli liczba $2^n + 7^n$ leży pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami. Nie może być więc kwadratem.

- Jeśli $n = 2m + 1$, to liczba $2^n + 7^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4, co nie jest możliwe dla kwadratu. I nie potrzebujemy do tego kongruencji. Jest jasne, że $7^n = (8-1)^n$ i po wymnożeniu n nawiasów postaci $8 - 1$ dostajemy, poza jednym składnikiem, same składniki podzielne przez 8. A zatem

  $$7^n = (8-1)^n = 8k + (-1)^n,$$

  dla pewnego k, co dla n nieparzystego oznacza, że 7^n daje resztę 7 z dzielenia przez 8, czyli resztę 3 z dzielenia przez 4. To zaś, że $2^{2m+1} = 4^m \cdot 2$ jest podzielne przez 4 jest zupełnie jasne (mamy $m > 1$). Zatem proszę nie mówić: „nie znamy kongruencji". Można znać, ale można też nie znać (w szkole podstawowej).

■

Zadanie 7. *Niech x, y będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wykaż, że liczby $x^2 + y + 1$ oraz $y^2 + 4x + 3$ nie mogą być jednocześnie kwadratami. Wskazówka: rozważ osobno przypadki $x \geqslant y$ oraz $x < y$.*

Rozwiązanie. W zadaniach, gdzie mamy wyrażenia algebraiczne zależne od dwóch zmiennych (lub więcej) często warto rozważać osobno wszystkie możliwości uporządkowania tych zmiennych. To jest główny pomysł (wskazówki do) zadania (poza tym, że będziemy „wkładać między kwadraty"). Zauważmy, że dla $x \geqslant y$ mamy:

$$x^2 < x^2 + y + 1 \leqslant x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Zatem $x^2 + y + 1$ leży pomiędzy dwoma kwadratami. Nie może być więc kwadratem.

Niech $x < y$. Wówczas $y^2 < y^2 + 4x + 3$. Z drugiej strony $y^2 + 4x + 3 < y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$. Stąd $y^2 + 4x + 3$ leży pomiędzy kwadratami (**prawie kolejnych!**) liczb y oraz $y + 2$. Zatem $y^2 + 4x + 3$ nie jest kwadratem, o ile nie zachodzi równość $y^2 + 4x + 3 = (y+1)^2$. Wtedy jednak mamy:

$$y^2 + 4x + 3 = (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1,$$

czyli $y = 2x + 1$, a więc $x^2 + y + 1 = x^2 + 2x + 2$. Jednak liczba $x^2 + 2x + 2$ leży pomiędzy kwadratami kolejnych liczb:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2x + 2 < x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

A zatem jeśli $y^2 + 4x + 3$ jest kwadratem, to $x^2 + y + 1 = x^2 + 2x + 2$ nie jest kwadratem. ■

Zadanie 8. *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech d będzie dodatnim dzielnikiem liczby $2n^2$. Pokaż, że liczba $n^2 + d$ nie jest kwadratem.*

Rozwiązanie. Cała trudność to wprowadzić dodatkowe oznaczenia i uwierzyć, że do „czegoś dojdziemy" (częste postępowanie w przypadku założenia, że mamy podzielność przez liczbę opisaną pewnym wyrażeniem). Z założenia zadania istnieje więc dodatnia liczba k taka, że

$$2n^2 = kd.$$

Załóżmy, wbrew tezie (po raz kolejny), że $n^2 + d = m^2$, dla pewnego całkowitego dodatniego m. Wówczas:

$$m^2 = n^2 + \frac{2n^2}{k}$$

czyli

$$(mk)^2 = n^2(k^2 + 2k).$$

A zatem $k^2 + 2k$ musi być kwadratem (patrz ♠). Ale przecież $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$. Dostaliśmy sprzeczność. ■

Zadanie 9. *Pomiędzy kolejnymi kwadratami może być zawarta wielokrotność kwadratu (mamy na przykład $5^2 < 2 \cdot 4^2 < 6^2$). Pokaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d takie, że:*

$$a^2 < bc^2 < bd^2 < (a+1)^2.$$

Rozwiązanie. Załóżmy przeciwnie (kolejny raz), że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d takie, że zachodzą nierówności podane w tezie, m.in. $c < d$. Oczywiście mamy wtedy $b > 1$, w przeciwnym bowiem przypadku dostajemy $a^2 < c^2 < d^2 < (a+1)^2$, co nie może mieć miejsca. Wyjściową nierówność przepisujemy do postaci:

$$\frac{a^2}{b} < c^2 < d^2 < \frac{(a+1)^2}{b}.$$

Skorzystamy następującej obserwacji: dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y **nie mniejszych od** 1 zachodzi równoważność: $x^2 < y^2 \iff x < y$. Zostawiam Czytelnikowi sprawdzenie, że $b \leqslant a^2$ (czego i tak nie potrzebujemy). Mamy:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} < c < d < \frac{a+1}{\sqrt{b}}.$$

Mamy zatem $c - d \geqslant 1$, natomiast wobec $b > 1$ mamy

$$\frac{a+1}{\sqrt{b}} - \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} < 1,$$

co prowadzi do sprzeczności. A zatem trudność zadania polegała na wykonaniu nieoczywistych działań na nierównościach (prowadzących do pozornej komplikacji). Warto zapamiętać ten rodzaj szacowania! ■

Zadanie 10. *Liczby całkowite a, b spełniają, dla pewnego n całkowitego, nierówność:*

$$n^2 < a < b < (n+1)^2.$$

Pokaż, że ab nie jest kwadratem.

Zanim przedstawię rozwiązanie tego zadania chciałbym zwrócić uwagę na to, że jest ono „odporne” na proste szacowania, które już poznaliśmy. Oczywiście jedyne sensowne rozumowanie jakie można tu prowadzić, to rozumowanie nie wprost. Trzeba więc założyć, że ab jest kwadratem. I co dalej? Możemy wprost wykorzystać szacowanie z góry i napisać:

$$n^4 < ab < (n+1)^4 = (n^2+2n+1)^2.$$

Skoro ab ma być kwadratem, to musi to być kwadrat liczby m większej od n^2, a mniejszej niż n^2+2n+1. Nie bardzo widać jak należałoby kontynuować to rozumowanie.

Spróbujmy teraz przenieść bezpośrednio rozumowanie z poprzedniego zadania. Weźmy $m^2 = ab$ i wstawmy:

$$n^2 < a < \frac{m^2}{a} < (n+1)^2.$$

Po obustronnym pierwiastkowaniu mamy wykazać, że:

$$n < \sqrt{a} < \frac{m}{\sqrt{a}} < n+1.$$

Aby dojść do sprzeczności wystarczyłoby pokazać, jak poprzednio, że $\frac{m}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} > 1$. Równoważnie: $m - a > \sqrt{a}$, czyli $m > a + \sqrt{a}$. Wiemy, że $b > a$, czyli $m^2 = ab > a(a+1)$, bo iloczyn kolejnych liczb nie może być kwadratem! A zatem $m > \sqrt{a^2+a}$. Ale niestety nie ma równości $\sqrt{a^2+a}$ oraz $a+\sqrt{a}$. Szacowanie nie chce działać! Problem w tym, że szacowanie $m^2 > a(a+1)$ można poprawić. Wymaga to jednak głębszego wejścia w związki iloczynów z kwadratami.

Rozwiązanie. Załóżmy przeciwnie, że ab jest kwadratem. Tym razem zagramy prawdziwego Jokera!

Każdą liczbę całkowitą można zapisać w postaci iloczynu kwadratu oraz liczby bezkwadratowej, czyli niepodzielnej przez kwadrat liczby pierwszej.

Wynika to łatwo (czyli jak?) z twierdzenia o rozkładzie na czynniki pierwsze. Możemy zatem zapisać $a = uv^2$ oraz $b = wz^2$, dla pewnych liczb całkowitych dodatnich u, v, w, z, przy czym u, w są bezkwadratowe. Skoro

$$ab = (uv^2)(wz^2) = (uw)(vz)^2$$

jest kwadratem, to uw jest kwadratem (znowu korzystamy z ♠). To, co dzieje się dalej, to moim zdaniem esencja „algebraicznego cudu”. Argument jest następujący.

Iloczyn dwóch liczb bezkwadratowych jest kwadratem tylko wtedy, gdy liczby te są równe, ponieważ do rozkładu na czynniki pierwsze liczb u, w każda liczba pierwsza wchodzi tylko raz.

To znaczy, że $a = uv^2$, $b = uw^2$ są pomiędzy kolejnymi kwadratami, co jest niemożliwe, zgodnie[3] z Zadaniem 9. ■

Zadanie 11. *Czy pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych można zmieścić dwa różne sześciany? Innymi słowy, czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, n takie, że:*

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2?$$

Rozwiązanie. Odpowiedź brzmi: *nie istnieją*, ponieważ jak się okazuje, pomiędzy dwa kolejne sześciany można... wstawić kwadrat! Istotnie, zauważmy, że dla dowolnego $m > 1$ mamy:

$$(m+1)\sqrt{m+1} - m\sqrt{m} > 1,$$

co oznacza (ważne !!!), że istnieje x liczba całkowita x taka, że:

$$m\sqrt{m} \leqslant x \leqslant (m+1)\sqrt{m+1}.$$

[3]Zadanie 9 jest przydatne także w znacznie trudniejszych problemach olimpijskich (wciąż nie wymagających wiedzy licealnej), o czym można się przekonać czytając poniższy tekst: `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A717&l=en`.

Zatem podnosząc nierówność stronami do kwadratu (wszystkie rozważane wyrażenia są dodatnie) mamy:

$$m^3 \leqslant x^2 \leqslant (m+1)^3.$$

Oczywiście $(a+1)^3 \leqslant b^3$, co kończy dowód.

Istnieje mniej sztuczkowe rozwiązanie[4], oparte o umiejętne wnioskowanie z układu nierówności

$$\begin{cases} n^2 < a^3, \\ (a+1)^3 < (n+1)^2. \end{cases}$$

■

Zadanie 12. *Niech S_n oznacza sumę pierwszych n liczb pierwszych. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ pomiędzy liczbą S_n a liczbą S_{n+1} znajduje się kwadrat, czyli istnieje liczba całkowita m taka, że*

$$S_n < m^2 < S_{n+1}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z faktu, że różnica $n+1$-wszego i n-tego kwadratu to $2n+1$. Wykorzystamy też kolejny znany zabieg konkursowy. Weźmy **największe takie** N, że

$$1+3+5+7+9+\ldots+(2N-1) = N^2 \leqslant S_n. \quad (*)$$

Niech p_n będzie n-tą liczbą pierwszą. Wówczas

$$2N-1 < p_n.$$

Inaczej liczby $p_1, \ldots, p_n$ występowałyby wśród liczb $1, \ldots, 2N-1$, na pewno nie stanowiąc wszystkich z nich, co by przeczyło $(*)$. W szczególności

$$2N+1 < p_{n+1}.$$

Z tego, że wybraliśmy **największe** N takie, że $N^2 \leqslant S_n$ mamy:

$$S_n < (N+1)^2 = N^2 + (2N+1) < S_n + p_{n+1} = S_{n+1},$$

co kończy dowód. ■

Zadanie 13. *Podczas porządkowania strychu, Zbyszek znalazł stary kalkulator, który potrafi obliczać pierwiastki kwadratowe, jednak jego wyświetlacz pokazuje tylko dwie cyfry po przecinku. Przykładowo, dla $\sqrt{4}$ urządzenie pokaże 2.00, a dla $\sqrt{6} = 2,44949\ldots$ będzie to 2.44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, nie będąca kwadratem liczby całkowitej, której pierwiastek kalkulator Zbyszka wyświetli z dwoma zerami po przecinku?*

Rozwiązanie. (Náboj 2018, zadanie 32). Odpowiedź to 2501. Oznaczmy przez $\mathrm{pdc}(n)$ liczbę dwucyfrową powstałą z pierwszych dwóch cyfr po przecinku liczby $\sqrt{n}$, gdzie n nie jest kwadratem (na moment traktujemy wyrażenia typu 01 jako liczby; tutaj 01 oznacza liczbę 1). Zauważmy, że jeśli dla pewnej liczby dodatniej k mamy

$$k^2 \leqslant m \leqslant n \leqslant (k+1)^2$$

to $\mathrm{pdc}(m) \leqslant \mathrm{pdc}(n)$. Istotnie, części całkowite $\sqrt{m}, \sqrt{n}$ są identyczne, więc $m \leqslant n$ implikuje, że $\{\sqrt{m}\} \leqslant \{\sqrt{n}\}$ (gdzie $\{x\}$ – oznaczenie tzw. części ułamkowej liczby rzeczywistej x). Oto główny bohater: część ułamkowa!

Obserwacja wyżej pozwala zredukować problem poszukiwania najmniejszej liczby n, nie będącej kwadratem, dla której $\mathrm{pdc}(n) = 0$, do liczb postaci k^2+1, gdzie k jest liczbą całkowitą, bo takie są najmniejsze między kwadratami.

Łatwo widać, że część całkowita liczby $\sqrt{k^2+1}$ to dokładnie k. Warunek $\mathrm{pdc}(k^2+1) = 00$ możemy więc równoważnie przepisać jako

$$\sqrt{k^2+1} - k < \frac{1}{100}.$$

Przenosząc k na prawą stronę nierówności, podnosząc do kwadratu (obie strony są dodatnie) oraz porządkując wyrazy, otrzymujemy:

$$k > 50\left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Ostatecznie, ponieważ prawa strona jest liczną ściśle pomiędzy 49, a 50, a k jest całkowita, dostajemy $k \geqslant 50$. Toteż $n = 50^2 + 1 = 2501$ jest szukaną najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunki zadania. ■

[4]Autorami są uczestnicy XV warsztatów I LO w Koszalinie.

Zadanie 14. *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że suma dzielników dodatnich liczby p^4 jest kwadratem.*

Rozwiązanie. Skoro p jest liczbą pierwszą, to dodatnimi dzielnikami liczby p^4 są jedynie liczby:

$$1, p, p^2, p^3, p^4.$$

Szukamy takich p, że istnieje liczba całkowita x spełniająca równość:

$$x^2 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4.$$

Sposób 1 (nieco sprytny). Zauważmy, że mamy:

$$(2p^2 + p)^2 < 4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) < (2p^2 + p + 2)^2.$$

Istotnie, po podzieleniu przez 4 mamy:

$$\left(p^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = p^4 + p^3 + \frac{p^2}{4} < p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 < p^4 + p^3 + \frac{9}{4}p^2 + p + 1 = \left(p^2 + \frac{p}{2} + 1\right)^2. \qquad (\dagger)$$

Skoro $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ ma być kwadratem, to $4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)$ też musi nim być, a zatem mamy:

$$4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = (2p^2 + p + 1)^2,$$

co prowadzi do równania

$$-p^2 + 2p + 3 = (3 - p)(p + 1) = 0.$$

A więc $p = 3$ to jedyne rozwiązanie. Oczywiście trikowa część to zauważenie[5], że warto rozważaną sumę dzielników przemnożyć przez 4 (oraz znajomość odpowiednich wzorów skróconego mnożenia).

Sposób 2. Tym razem będziemy szacowali mniej dokładnie, ale bardziej intuicyjnie. Zauważmy, że x^2 znajduje się między kwadratami liczb całkowitych. Mamy:

$$(p^2 + 1)^2 = p^4 + p^2 + p^2 + 1 < \underbrace{p^4 + p^3 + p^2 + p + 1}_{x^2} < p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = (p^2 + p + 1)^2.$$

Z oszacowania tego wynika, że x jest postaci $p^2 + k$, gdzie $1 < k < p + 1$. Mamy zatem:

$$x^2 = p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = (p^2 + k)^2 = p^4 + 2p^2k + k^2.$$

Po przeniesieniu na jedną stronę wyrażeń zawierających p mamy: $p^3 + p^2(1 - 2k) + p = k^2 - 1$, czyli

$$p(p^2 + p(1 - 2k) + 1) = (k - 1)(k + 1). \qquad (*)$$

Jeśli liczba pierwsza jest dzielnikiem iloczynu liczb całkowitych, to jest dzielnikiem jednego z czynników ($\heartsuit$). A zatem p jest dzielnikiem $k - 1$ lub $k + 1$. Wobec ograniczenia $1 < k < p + 1$ mamy $k = p - 1$. Zatem równość $(*)$ przybiera postać:

$$p(p^2 + p(3 - 2p) + 1) = (p - 2)p,$$

czyli

$$-p^2 + 3p + 1 = p - 2,$$

i dalej

$$-p^2 + 2p + 3 = (3 - p)(p + 1) = 0.$$

A więc $p = 3$ to jedyne rozwiązanie. ■

Zadanie 15. *Ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$ złożony jest z liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami. Pokaż, że n-ty wyraz tego ciągu jest równy*

$$n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x, czyli taką liczbę całkowitą m, że $m \leqslant x < m + 1$.

[5] Dla licealisty, a pomysł ten jest autorstwa uczestników XV warsztatów I LO w Koszalinie, nie jest to problem, bo wie, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca, a jedyna liczba całkowita w przedziale $[p^2 + p/2, p^2 + p/2 + 1]$, to $p^2 + p/2 + 1/2$, więc może od razu wnioskować z szacowania ($\dagger$).

Rozwiązanie. Pokażemy, że liczba $n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ leży między dwoma kolejnymi kwadratami. Dokładniej:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2 < n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] < \left(\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + 1\right)^2. \qquad (\dagger)$$

Jeśli wykażemy tę nierówność, wówczas wśród liczb

$$1, 2, \ldots, n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

znajdować się będzie dokładnie $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ kwadratów: $1^2, 2^2, \ldots, \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2$. To oczywiście da nam tezę.

Uwaga. W tym miejscu należy się zatrzymać i upewnić, że **rozumiemy** poprzednie zdanie!

Dowodzimy ($\dagger$). Jest to sprytne Zauważmy, że $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \neq \frac{1}{2}$ dla dowolnego n całkowitego dodatniego (już ta obserwacja jest sama w sobie sympatycznym zadaniem!). Rozważamy dwa przypadki:

- $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \frac{1}{2}$. Wówczas $[\sqrt{n}]^2 \leqslant n < \left([\sqrt{n}] + \frac{1}{2}\right)^2$. Zatem $[\sqrt{n}]^2 < n < [\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] + \frac{1}{4}$. Stąd:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = [\sqrt{n}] = k.$$

  A zatem nierówność ($\dagger$) przybiera oczywistą postać $k^2 < k^2 + k < n + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.

- $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] > \frac{1}{2}$. Wówczas: $\left([\sqrt{n}] + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant n^2 < ([\sqrt{n}] + 1)^2$, czyli $[\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] + \frac{1}{4} < n < [\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}] + 1$. Stąd:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = [\sqrt{n}] + 1 = k + 1.$$

  A zatem nierówność ($\dagger$) przybiera oczywistą postać

$$(k+1)^2 = (k^2 + k) + k + 1 < n + k + 1 < (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4.$$

■

* * *

Omówione zagadnienia, choć nie przekraczają możliwości zdolnego ucznia szkoły podstawowej, a na pewno nie wymagają poznawania bardziej zaawansowanych metod niż te obecne w programie szkoły podstawowej (potrzeba je jednak przyswoić i głęboko zrozumieć, a nie tylko przerobić), nie są z pewnością łatwe. Sam przegląd metod używanych przy stwierdzaniu czy dana liczba jest kwadratem liczby całkowitej robi niemałe wrażenie. Jest to zagadnienie, którego horyzont znacznie przekracza nie tylko szkolne, ale i akademickie ramy. Poszczególne zagadnienia wspomniane w tekście stanowić mogą punkt wyjścia do ciekawych prac uczniowskich.

Źródła

1. Andreescu T., Andrica D., Feng Z.: *104 Number Theory Problems*, Birkhäuser (2006).
2. Archiwum zawodów międzynarodowych Náboj (`https://math.naboj.org/archive.php`).
3. Forum Art of Problem Solving (`https://artofproblemsolving.com/community`).
4. Guzicki W.: *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, ORE 2013 (dostępny online).
5, Iowa State University M.D. Problem of the Week (`https://orion.math.iastate.edu/ehjohnst/PoW/PoW.html`).
6. Kieza M.: *Między kwadratami*, Gazetka OMJ „Kwadrat” 21 (2017).
7. KöMaL (magazyn węgierski, ale o specjalnych wydaniach w języku angielskim: `https://www.komal.hu/`).
8. Li K.: *Perfect squares*, Mathematical Excalibur 21 (2018) (`https://www.math.ust.hk/excalibur/`).
9. Santos D.: *Number Theory for Mathematical Contests*.
10. The Berkeley Math Circle Archives (`https://mathcircle.berkeley.edu/circle-archives`).
11. Xu J.: *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses: For Junior Section*, World Scientific (2010).