Równe zero

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
10-11.09.2021 r.

Celem tego seminarium jest opowiedzenie o rozmaitych zastosowaniach i rozwinięciach dobrze znanej obserwacji.

Obserwacja 1. Jeśli liczby rzeczywiste x, y spełniają warunek

$$x \cdot y = 0$$

to $x = 0$ lub $y = 0$.

Liczby rzeczywiste można w dalszych rozważaniach zastąpić obiektami lepiej znanymi uczniom, np. liczbami całkowitymi lub wymiernymi (nie ma to znaczenia dla samych rozumowań). Podstawową strategią będzie zawsze wyprowadzenie z warunków zadania równości, w której po jednej stronie jest iloczyn, po drugiej zaś zero.

Zadanie 1. *(II OMG, III etap) Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:*

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie korzysta jedynie ze szkolnych pomysłów i Obserwacji 1. Odejmujemy stronami równanie drugie od pierwszego. W efekcie uzyskujemy $ab - bc = a - c$, czyli po przekształceniach

$$(b - 1)(a - c) = 0.$$

Stąd, na mocy Obserwacji 1, mamy $b = 1$ lub $a = c$. Przypadek $b = 1$ nie może być spełniony, gdyż wtedy pierwsze równanie przybiera postać sprzeczną $a = a + 1$. Wobec tego $a = c$. Analogicznie rozpatrując drugie i trzecie równanie dostajemy $b = a$. W efekcie otrzymujemy $a = b = c$. Z pierwszego równania mamy wówczas $a^2 = 2a$, czyli

$$a(a - 2) = 0.$$

Ponownie korzystamy z Obserwacji 1 dostając $a = 0$ lub $a = 2$. Stąd $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ lub $(a, b, c) = (2, 2, 2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskane trójki (a, b, c) istotnie są rozwiązaniem danego układu równań. ■

Zadanie 2. *(Facebookowa Liga OMG, edycja 2013/14) Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości*

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c).$$

Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

Rozwiązanie. Przekształcając równoważnie związek $(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$ uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= ab + bc + ad + cd, \\ ac + bd &= ab + cd, \\ a(c - b) &= d(c - b) \\ (a - d)(c - b) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy dwa przypadki: (1) a = d lub (2) b=c. Analogicznie równość $(a + b)(c + d) = (a + d)(b + c)$ możemy doprowadzić do postaci $(a - c)(d - b) = 0$. Znów są dwie możliwości: (A) $a = c$ lub (B) $b = d$. Łącznie:

- jeżeli (1) oraz (A), to zachodzą równości $a = c = d$,
- jeżeli (1) oraz (B), to zachodzą równości $a = b = d$,
- jeżeli (2) oraz (A), to zachodzą równości $a = b = c$,
- jeżeli (2) oraz (B), to zachodzą równości $b = c = d$.

■

Zachęcam do samodzielnego rozwiązania zadań 1 i 2 z zawodów OMJ dołączonych na końcu tego dokumentu w oparciu o rozważaną metodę. Zadania te, choć otwierały zestawy konkursowe, sprawiły uczestnikom wiele problemów (patrz też opracowanie najczęstszych błędów występujących na zawodach II stopnia XVI OMJ: https://omj.edu.pl/uploads/attachments/2etap21r.pdf, str. 5-8), głównie przez tzw. błąd dzielenia przez zero.

Zadanie 3. *Liczba rzeczywista x oraz liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek*

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$$

Wykaż, że $x=a+b+c$.

Rozwiązanie. Po raz kolejny chcemy, aby po jednej ze stron rozważanej równości znalazło się zero. Nietrudno przenieść 3 na drugą stronę, ale kluczowe jest zrobienie tego w odpowiedni sposób. Metoda ta jest niezwykle przydatna w dowodzeniu nierówności. Pomysł jest taki, aby liczbę 3 znajdującą się po prawej stronie równości wyżej rozbić na trzy składniki i przenieść na drugą stronę do postaci:

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0.$$

Wydaje się, że tylko skomplikowaliśmy sobie życie. W algebrze często jest tak, że aby uprościć pewne wyrażenie trzeba je najpierw skomplikować. W tym przypadku różnice występujące w powyższych nawiasach zamieniamy na ułamki:

$$\left(\frac{x-a-b-c}{c}\right)+\left(\frac{x-b-c-a}{a}\right)+\left(\frac{x-c-a-b}{b}\right)=0.$$

Widzimy teraz, że w liczniku powyższych składników znajduje się ta sama liczba $x-a-b-c$. Wyciągając ją przed każdy z nich dostajemy:

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=0.$$

Na mocy Obserwacji 1 mamy zatem $x-a-b-c=0$ lub $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=0$. Liczby a, b, c są jednak dodatnie, więc druga możliwość nie może zachodzić. Zatem $x=a+b+c$.

Uwaga 1. Niedoświadczeni uczniowie mogą odczuwać pokusę „udowodnienia" tezy przez wstawienie do wyjściowego warunku $a+b+c$ w miejsce x. Doprowadzi to, po prostych rachunkach, do tożsamości $0=0$. Wnioskując jednak stąd, że $x=a+b+c$ jest jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania uczniowie popełnią błąd logiczny – pomylą założenie z tezą. Chodzi o to, by z równości podanej w treści zadania wyprowadzić warunek $x=a+b+c$, nie zaś tylko by stwierdzić, że liczba $x=a+b+c$ tę równość spełnia. Zauważmy jednak, że podjęcie tej „naiwnej próby" prowadzić może do odgadnięcia sztuczki niezbędnej do przeprowadzenia właściwego rozumowania[1] poprzez „odkrycie", że w kolejnych składnikach „brakuje" odpowiednio ułamków $\frac{c}{c}$, $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$.

Uwaga 2. Bardziej (lub za bardzo) doświadczeni uczniowie mogą uznać, że po prostu trzeba wymnożyć wszystko przez abc i wyznaczyć x. Takim śmiałkom mogę tylko powiedzieć, że w oryginalnej tezie tego zadania nie było powiedziane ile ma wynosić x. To trochę osłabia zapał do rozwiązań siłowych (wrócimy do tego przy Zad. 5). ■

Zadanie 4. *(XIV OMJ, I etap) Liczby całkowite a, b, c są różne od 0 i spełniają zależność*

$$\frac{a}{b+c^2}=\frac{a+c^2}{b}.$$

Wykaż, że $a+b+c \leqslant 0$.

Rozwiązanie. Przekształcając równoważnie daną w treści zadania równość, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}(a+c^2)(b+c^2)&=ab,\\ ab+ac^2+bc^2+c^4&=ab,\\ c^2(a+b+c^2)&=0.\end{aligned}$$

Korzystamy z Obserwacji 1. Skoro $c \neq 0$, to $c^2 \neq 0$ i mamy $a+b+c^2=0$. A zatem wystarczy pokazać następującą nierówność:

$$a+b+c \leqslant a+b+c^2=0.$$

[1] Jest jeszcze inna droga „ratująca" to podejście. Jak słusznie odnotowano podczas seminarium, uczeń znający pojęcie funkcji może zauważyć, że lewa strona jest niestałą funkcją liniową zmiennej x i stąd wskazane rozwiązanie musi być jedyne.

Sprowadza się ona do nierówności $c \leqslant c^2$. Jest ona prawdziwa dla dowolnej liczby całkowitej (ale nie dla dowolnej liczby wymiernej – warto powiedzieć o tym uczniom zanim dowiedzą się czym jest „delta"). Równoważnie:

$$0 \leqslant c(c-1).$$

Jeśli $c = 1$, to prawa strona jest zerem. Dla $c \neq 0, 1$ obie liczby c oraz $c-1$ są różne od zera. Ponieważ są to liczby całkowite różniące się o 1, więc nie mogą być przeciwnych znaków. ■

Zadanie 5. *Pokazać, że jeśli liczby rzeczywiste x, y, z, a, b, c spełniają układ równań:*

$$\begin{cases} (z-x)(x-y) = a \\ (x-y)(y-z) = b \\ (y-z)(z-x) = c \end{cases},$$

to $ab + bc + ca = 0$.

Rozwiązanie. To zadanie jest pewnym uproszczeniem zadania z II etapu XV Olimpiady Matematycznej. Na pierwszy rzut oka może wydawać się nieco nieeleganckie – dużo zmiennych, dość abstrakcyjny warunek. Oryginalny problem kazał rozwiązać ten układ równań ze względu na x, y, z przy danych a, b, c – odsyłam do Archiwum Olimpiady Matematycznej. Pokażę dwie drogi rozwiązania. Jedna – bazująca na bardzo eleganckim pomyśle i nawiązująca do poprzedniego zadania, a druga – naśladująca oryginalne rozwiązanie sprzed lat.

Sposób „branżowy". Należy dokładniej przyjrzeć się czynnikom występującym po lewych stronach powyższych równości. Mamy bowiem:

$$(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0.$$

Ta obserwacja (ta metoda – zawsze gdy rozważany jest iloczyn warto sprawdzić co wiemy o sumie czynników) rodzi podejrzenie, że jeśli przepiszemy warunek $ab+bc+ca = 0$ po prostu korzystając z kolejnych równań to po długich rachunkach dostaniemy tezę. Rachunki można jednak bardzo elegancko skrócić korzystając ze znanego triku: tworzymy nowe zmienne!

$$r := x-y, \quad s := y-z, \quad t := z-x.$$

Nasz układ równań przybiera postać:

$$\begin{cases} tr = a \\ rs = b \\ st = c \end{cases}.$$

Teraz mamy:

$$ab + bc + ca = (tr)(rs) + (rs)(st) + (tr)(st) = r^2st + rs^2t + rst^2 = rst(r+s+t).$$

Wiemy jednak, że $r + s + t = (x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$, co kończy dowód.

Sposób „firmowy". Przejdźmy do rozwiązania oryginalnego. Pokazuje ono bogactwo pomysłów algebraicznych zupełnie oderwanych od wzorów skróconego mnożenia. Początek to typowe podejście przy rozwiązywaniu układów równań: dążymy do zastąpienia kilku warunków jednym – mnożymy równania stronami, dostając:

$$(x-y)^2(z-x)^2(y-z)^2 = abc.$$

Trzeba rozważyć dwa przypadki: $abc = 0$ oraz $abc \neq 0$ (po lewej stronie jest kwadrat, więc $abc \geqslant 0$).

- Niech $abc = 0$. Wówczas mamy $(x-y)^2(z-x)^2(y-z)^2 = 0$. A zatem jeden z czynników jest równy 0, czyli dwie z trzech zmiennych x, y, z są równe. Weźmy na przykład $x = y$. Wówczas a oraz b są równe 0, czyli $ab + bc + ca = 0$.

- Niech $abc \neq 0$. Co teraz? Aby była mowa o rozwiązaniach musi być $abc > 0$ i możemy napisać:

  $$(x-y)(z-x)(y-z) = \pm\sqrt{abc}.$$

  Teraz możemy na przykład skorzystać z tego, że $(x-y)(z-x) = a$ i dostać $a(y-z) = \pm\sqrt{abc}$. Podobnie dostaniemy warunki $b(z-x) = \pm\sqrt{abc}$ oraz $c(x-y) = \pm\sqrt{abc}$. Teraz kolejna sztuczka: mnożymy otrzymane warunki odpowiednio przez bc, ca, ab. Mamy więc:

  $$\begin{cases} a{\color{red}bc}(y-z) = \pm\sqrt{abc}{\color{red}bc} \\ b{\color{red}ac}(x-y) = \pm\sqrt{abc}{\color{red}ac} \\ c{\color{red}ab}(z-x) = \pm\sqrt{abc}{\color{red}ab} \end{cases}$$

Skoro założyliśmy, że $abc \neq 0$, to możemy podzielić każdy z warunków przez $\sqrt{abc}$ i dostajemy:

$$\begin{cases} \pm\sqrt{abc}(y-z) = bc \\ \pm\sqrt{abc}(z-x) = ac \\ \pm\sqrt{abc}(x-y) = ab \end{cases}.$$

Dodając stronami te równania otrzymujemy, o zaskoczenie:

$$\pm\sqrt{abc}(y-z+z-x+x-y) = 0 = bc+ac+ab,$$

co kończy dowód.

■

Zadanie 6. *Zamieniono kolejność liczb $1, 2, \ldots, n$ uzyskując ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wykaż, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to iloczyn*

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\ldots(a_n-n)$$

jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie. To zadanie jest ponad stuletnim klasykiem (Austro-Wegry, rok 1906, ale było także na I etapie XIX OM), bardzo pięknym. Zanim pójdziemy dalej odnotujmy tylko, że dopuszcza się w nim koncepcję ujemnych liczb parzystych. Nie jest to dalekie odejście od programu szkolnego. W zadaniach konkursowych trzeba niekiedy założyć, że dzielniki mogą być ujemne (i będziemy to robić, bo to jest w istocie „całkiem naturalne").

Jaki jest cel tego zadania? Chodzi (między innymi) o reklamę następującej, oczywistej obserwacji.

Obserwacja Jeśli liczby całkowite x, y spełniają warunek

$$x \cdot y \text{ jest liczbą parzystą}$$

to x jest liczbą parzystą lub y jest liczbą parzystą.

Czy umiemy pokazać, że jedna z liczb $a_1-1, \ldots, a_n-n$ jest parzysta? Okazuje się, że tak (i to na kilka sposobów), a poniższy pomysł jest zaskakujący i błyskotliwy (choć użyty po raz kolejny) – popatrzymy na sumę tych liczb:

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n) = (a_1+\ldots+a_n)-(1+2+\ldots+n) = (1+2+\ldots+n)-(1+2+\ldots+n) = 0.$$

Suma liczb $a_1-1, a_2-2, \ldots, a_n-n$ równa jest zero, niezależnie od kolejności w jakiej ustawiono liczby $1, 2, \ldots, n$, aby uzyskać liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$. To bardzo ładny niezmiennik. Za jego pomocą natychmiast znajdujemy rozwiązanie korzystając z następującej obserwacji.

Suma nieparzyście wielu składników jest parzysta tylko wtedy, gdy choć jeden składnik jest parzysty.

Oto i nasz przypadek: mamy nieparzyście wiele składników, których suma równa jest zero, czyli liczbie parzystej. A zatem jeden ze składników, czyli jeden z czynników wyjściowego iloczynu, jest liczbą parzystą. ■

W tym miejscu Czytelnik mógłby zapytać czy to zadanie ma coś wspólnego z Obserwacją 1 poczynioną na początku? Dlaczego nagle z zagadnień algebraicznych przenieśliśmy się do teorii liczb? Wystarczy, że przeformułujemy obserwację wyżej, a przekonamy się, że jest ona bliźniaczo podobna do Obserwacji 1.

Obserwacja 2. Jeśli **iloczyn** liczb całkowitych xy **daje resztę zero** przy dzieleniu przez 2, to jedna z liczb x lub y daje resztę zero z dzielenia przez 2. Ogólniej[2], jeśli iloczyn liczb całkowitych daje resztę zero przy dzieleniu przez liczbę pierwszą p to jeden z czynników daje resztę zero przy dzieleniu przez p.

Widzimy zatem, że „zero" występuje jakby w dwóch rolach: jako „liczba rzeczywista zero" oraz jako „reszta zerowa" (będzie jeszcze trzecia rola, nieco inna). Powyższa obserwacja nie jest oczywiście prawdziwa, jeśli liczbę pierwszą p zastąpimy dowolną liczbą złożoną. Istnieje wspólne algebraiczne wyjaśnienie wskazanej analogii, związane z pojęciem „ciała", co nie jest dla nas istotne. Samo istnienie wskazanego związku jest jednak istotne[3].

[2] Dowód jest np. w moim tekście „Początki z OMJ. Największy wspólny dzielnik" (`https://mimuw.edu.pl/~amecel/semNWD.pdf`).

[3] Warto przytoczyć jeszcze jeden przykład. W szkole ponadpodstawowej uczniowie zapoznają się z pojęciem funkcji i operacji na zbiorze funkcji (o ustalonej dziedzinie i przeciwdziedzinie), czyli dodawania funkcji i składania funkcji (o ile to drugie jest możliwe), wraz z pojęciem „funkcji stale równej zero". Warto odnotować, że żadna z powyższych obserwacji nie ma wówczas większego sensu. Zachęcam do wskazania dwóch niezerowych funkcji, których złożenie jest funkcją zerową. Sytuacja jest tu nieco inna niż przy rozważaniu reszt z dzielenia przez liczbę złożoną. Wynika to z tego, że dla dwóch funkcji f, g niekoniecznie mamy $f \circ g = g \circ f$. Wszystko to może brzmieć bardzo abstrakcyjnie, ale proszę sobie wyobrazić, że mówimy na przykład o zbiorze permutacji zbioru trzyelementowego $\{1, 2, 3\}$ (w tym zbiorze nie ma elementu zerowego). Nietrudno wskazać dwie permutacje tego zbioru takie, których złożenie w różnej kolejności da inne wyniki (będące znowu pewnymi permutacjami). Zachęcam do przemyślenia tej sprawy.

Zadanie 7. *(Gazetka OMJ „Kwadrat” nr 5) Dana jest liczba pierwsza p. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

Rozwiązanie. Zadanie pochodzi z artykułu Michała Kiezy „Sztuczka z iloczynem” z Gazetki OMJ „Kwadrat”, dostępnej na stronie OMJ (`https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-05-nieb.pdf`). Rozwiązanie opierać się będzie o Obserwację 2. Zanim jednak zaczniemy, kolejna drobna uwaga: warto zacząć (albo ograniczyć się do) od przypadków $p = 2, 3, 5$. Co chcemy zauważyć? Chcemy zobaczyć, że jest jakaś regularność w rozwiązaniach, mianowicie – pomniejszone o p mają wspólny iloczyn (oraz, że mogą mieć one różne znaki).

Zacznijmy od przekształcenia wyjściowego równania do postaci, która mamy szansę zwinąć do iloczynu. Innymi słowy mnożymy obydwie strony przez xyp i przenosimy wszystko na jedną stronę. Dostajemy $yp + xp = xy$, czyli:

$$-yp - xp + xy = 0.$$

Tym razem nie bardzo widać w jaki sposób trzy składniki występujące po lewej stronie miałyby stać się iloczynem. Pomysł polega jednak na „wyobrażeniu sobie” oczekiwanego iloczynu. Składniki $-yp, -xp, xy$ pochodzą z iloczynu $(x - p)(y - p)$. Dodajmy zatem do obydwu strony powyższej równości liczbę p^2. Uzyskamy wtedy:

$$(x - p)(y - p) = p^2.$$

Zauważmy, że liczby $x - p$ oraz $y - p$ muszą być dzielnikami liczby p^2, a więc muszą być tego samego znaku i równe $\pm 1, \pm p$ lub $\pm p^2$. Dostajemy zatem kilka możliwych układów warunków:

$$\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases}, \quad \begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - p = -1 \\ y - p = -p^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - p = -p \\ y - p = -p \end{cases}, \quad \begin{cases} x - p = -p^2 \\ y - p = -1 \end{cases}.$$

Pamiętamy jednak, że $x, y \neq 0$, a zatem układ piąty nie ma rozwiązań (układy czwarty i szósty mają, bowiem dla żadnej liczby pierwszej nie mamy $p^2 = p$). Rozwiązania to pary niezerowych liczb całkowitych (x, y) postaci $(p + 1, p^2 + p), (2p, 2p), (p^2 + p, p + 1), (p - 1, p - p^2), (p - p^2, p - 1)$. ■

Zadanie 8. *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ będą takie, że*

$$\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \ldots + \epsilon_n\epsilon_1 = 0.$$

Pokaż, że n jest liczbą podzielną przez 4.

Rozwiązanie. To klasyczne zadanie jest związane z wcześniejszymi, choćby dlatego, że mamy już intuicję, że „zero” odgrywać może (przy odpowiedniej interpretacji) rolę „reszty zerowej”. Dla uczniów może być ono jednak trudne, bo występuje sporo oznaczeń i mamy dość abstrakcyjną tezę. Zacznijmy jednak od pokazania kroku pośredniego: wykażmy, że n jest liczbą podzielną przez 2. Warto zacząć (na kółku) omawianie Zadania 9 właśnie od tej, uproszczonej wersji. Uproszczenie nie zawsze (a nawet nieczęsto) prowadzi do rozwiązania zadania konkursowego, ale może dać intuicję na temat rozważanej sytuacji. Tak jest w naszym przypadku.

Zauważmy, że każdy z n iloczynów $\epsilon_1\epsilon_2, \epsilon_2\epsilon_3, \ldots, \epsilon_n\epsilon_1$ będących składnikami sumy znajdującej się po lewej stronie warunku zadania jest liczbą równą -1 lub 1, czyli liczbą nieparzystą (zaskoczenie? – badamy w końcu parzystość). Na mocy zasady, którą przywołaliśmy w rozwiązaniu poprzedniego zadania widzimy, że suma liczb nieparzystych może być równa liczbie zero (czyli parzystej) tylko wtedy, gdy liczba składników jest parzysta. Zatem n jest parzysta.

Możemy powiedzieć więcej o rozważanej sumie: mamy pewną liczbę jedynek i pewną liczbę minus jedynek, które dają w sumie zero. Jest więc jasne, że dodatnich i ujemnych składników powyższej sumy musi być tyle samo. Niech będzie to liczba k (mamy $2k = n$). Zależy nam na pokazaniu, że k jest liczbą parzystą (wtedy n będzie podzielna przez 4).

Wykonamy teraz „negatyw” rozumowania z Zadania 6 (bardziej elegancko: rozumowanie dualne), gdzie badaliśmy sumę czynników. Tu policzymy iloczyn składników. Dokładnie – ten iloczyn można policzyć! Mamy:

$$(-1)^k \cdot 1^k = (\epsilon_1\epsilon_2) \cdot (\epsilon_2\epsilon_3) \cdot \ldots \cdot (\epsilon_n\epsilon_1) = \epsilon_1^2\epsilon_2^2 \ldots \epsilon_n^2 = 1.$$

A zatem $(-1)^k \cdot 1^k = 1$, czyli k jest parzysta. W szczególności $n = 2k$ jest podzielna przez 4. ■

Warto po przeprowadzeniu całego rozumowania wypunktować kroki prowadzące do rozwiązania, by późniejsza redakcja była czytelna i nie posiadała luk. „Pisanie w punktach” jest przydatne dla uczniów na tym etapie.

Kolejne zadanie pokazuje inne zaskakujące „przyrównanie do zera”, tym razem związane z zapisem dziesiętnym.

Zadanie 9. *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, które są równe sumie swoich cyfr powiększonej o iloczyn swoich cyfr.*

ROZWIĄZANIE. Niech $n = \overline{a_1a_2\ldots a_m}$ będzie zapisem dziesiętnym liczby całkowitej m-cyfrowej n o cyfrze jedności a_m, cyfrze dziesiątek a_{m-1} itd., przy czym $a_1 \neq 0$. Załóżmy też, że liczba n spełnia warunki zadania, czyli:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_m} = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_1a_2\ldots a_m.$$

W tym rozwiązaniu pojawia się dość głęboka myśl (która zaraz okaże się czymś całkowicie oczywistym): wyrażenie po prawej stronie „nie jest zbyt duże" w porównaniu z wyrażeniem po lewej. Jak to zobaczyć? Trzeba nieco poeksperymentować. Zachęcam, aby przed rozwiązaniem ogólnego problemu spróbować ograniczyć się np. do liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych. Korzyści będzie kilka. Po pierwsze uczniowie znajdą jakieś rozwiązania (jak się okaże – wszystkie), a po drugie zobaczą, że to abstrakcyjne równanie zapisane wyżej mówi o jakiejś bardzo nienaturalnej sytuacji. Inaczej mówiąc – uchwycą sedno sprawy. To jest ważniejsze niż formalizmy.

Eksperyment 1. Szukamy takich cyfr a, b, gdzie $a \neq 0$, że:

$$\overline{ab} = 10a + b = a + b + ab.$$

Od razu widzimy, że $9a = ab$, czyli $b = 9$. Mamy 9 rozwiązań dwucyfrowych (jednocyfrowych nie ma).

Eksperyment 2. Proszę wykazać, że dla dowolnych cyfr a, b, c $(a \neq 0)$ mamy:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = a + b + c + 99a + 9b > a + b + c + abc.$$

To jest oczywiste. Przecież $99a > abc$, bo $99 > ab$. Składnik $100a$ był kluczowy.

Proszę powtórzyć to rozumowanie dla liczb czterocyfrowych $\overline{abcd}$ i zobaczyć, że składnik $999a$ pełni analogiczną rolę – szacuje z góry iloczyn $abcd$. Wszystko robi się jasne. Nie ma innych rozwiązań niż dwucyfrowe. Dowód to uważnie dobrane narzędzia i redakcja. To wszystko jest w zasięgu naszych uczniów i gwarantuję – to się spodoba!

Zapiszemy wyrażenie po lewej stronie w postaci sumy potęg dziesiątki przemnożonych przed odpowiednie cyfry:

$$a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + 10 \cdot a_{m-1} + a_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_1a_2\ldots a_m.$$

W tym przypadku, inaczej niż wcześniej, nie chcemy przenosić wszystkich wyrażeń na jedną stronę tak, by po drugiej dostać zero. Przeniesiemy jedynie sumę $a_1 + \ldots + a_m$ i odpowiednio pogrupujemy:

$$a_1(10^{m-1} - 1) + a_2(10^{m-2} - 1) + \ldots + 9a_{m-1} = a_1a_2\ldots a_m. \qquad (\dagger)$$

Co chcemy zobaczyć w tej równości? Otóż to, że:

$$a_1 \underbrace{a_2\ldots a_m}_{\text{m-1 cyfr}} \leqslant a_1(10^{m-1} - 1) = a_1 \cdot \underbrace{99\ldots 9}_{\text{m-1 cyfr}},$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $m = 2$ i $a_2 = 9$. Dlaczego tak jest? Otóż dla $m > 2$ mamy:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{m-1} < a_2 \cdot 10^{m-2} < 9 \cdot 10^{m-2} < \underbrace{99\ldots 9}_{\text{m-1 cyfr}}.$$

Po odjęciu od stron równości (†) liczby $a_1(10^{m-1} - 1)$ dostajemy równość:

$$a_2(10^{m-2} - 1) + \ldots + 9a_{m-1} = a_1 \cdot (a_2\ldots a_m - \underbrace{99\ldots 9}_{\text{m-1 cyfr}}), \qquad (\dagger\dagger)$$

przy czym wyrażenie po lewej stronie jest nieujemne, a wyrażenie po prawej – niedodatnie! Wniosek jest taki, że obydwie strony powyższej równości muszą być równe zero! To bardzo pomysłowe podejście. Zakończenie rozwiązania jest teraz bardzo proste. Możemy skorzystać z Obserwacji 1 dla prawej strony równości (††). Pamiętając, że $a_1 \neq 0$ musimy mieć $a_2\ldots a_m = \underbrace{99\ldots 9}_{\text{m-1 cyfr}}$. A zatem $m = 2$ oraz $a_2 = 9$. Szukanymi wartościami n są więc liczby:

$$19, \quad 29, \quad 39, \quad 49, \quad 59, \quad 69, \quad 79, \quad 89, \quad 99.$$

■

Wbrew zapowiedziom nie może zabraknąć choćby jednego zadania wykorzystującego dwa najbardziej podstawowe wzory skróconego mnożenia. Mam jednak dobry powód. Poniższy problem pojawiał się na wielu konkursach.

Zadanie 10. *Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami całkowitymi, przy czym $a \neq c$, spełniającymi warunek*

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

Udowodnij, że $a^2+b^2+c^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie. Bez trudu widzimy, że równość z treści zadania można przekształcić równoważnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}, \\ a(c^2+b^2) &= c(a^2+b^2), \\ ac^2 - ca^2 &= cb^2 - ab^2, \\ ac(c-a) &= b^2(c-a), \\ (c-a)(b^2-ac) &= 0. \end{aligned}$$

Do tej postaci powinien dojść każdy uczeń zaznajomiony z omawianą przez nas metodą. Korzystamy z Obserwacji 1 oraz założenia $a \neq c$ wnioskując, że

$$b^2 = ac.$$

Czas zająć się wyrażeniem sprawiającym problem, czyli $a^2+b^2+c^2$. Oczywiście problem stwierdzenia czy suma trzech kwadratów jest liczbą pierwszą wygląda na beznadziejny. Aby stwierdzić, że wartość tego wyrażania jest zawsze liczbą złożoną dobrze by było umieć rozłożyć to wyrażenie na czynniki. Dzięki uzyskanej przez nas równości jest to możliwe, ale potrzebny jest nieco zaskakujący krok, polegający na... umiejętnym dodaniu zera:

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+ac+c^2 = a^2+ac+\underbrace{ac-b^2}_{0}+c^2 = a^2+2ac+c^2-b^2 = (a+c)^2-b^2 = (a+c-b)(a+c+b).$$

Zwracam uwagę na niezwykle ważny moment. Oto trzecia rola zera, tak bardzo obecna zarówno w rozumowaniach szkolnych jak i konkursowych: czasem po prostu trzeba dodać zero, ale zero zapisane jako $-x^2+x^2$, lub jako $1-1$, lub jako b^2-ac, jeśli wiemy, że jest to zero! Bez trudu dało by się przygotować osobne seminarium olimpijskie w temacie „Dodaj zero”.

Tymczasem znaleźliśmy rozkład $a^2+b^2+c^2$ na czynniki. Czy to już oznacza, że nie jest to liczba pierwsza? Niestety może się zdarzyć, że jeden z czynników równy jest 0, 1 lub -1 (uwaga – znowu te czynniki ujemne!). Pierwsza z możliwości jest wykluczona, bowiem dla liczb całkowitych a, b, c (niezerowych, $a \neq c$) mamy

$$a^2+b^2+c^2 > 3.$$

Zostaje rozważenie czterech przypadków:

- $a+c+b=1$ oraz $a+c-b = a^2+b^2+c^2$,
- $a+c+b=1$ oraz $a+c-b = a^2+b^2+c^2$,
- $a+c-b=-1$ oraz $a+c+b = -(a^2+b^2+c^2)$,
- $a+c+b=-1$ oraz $a+c-b = -(a^2+b^2+c^2)$.

I znowu potrzebne jest wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia i dodawanie zera! W pierwszym przypadku:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-a-c+b &= 0 \Rightarrow \\ a^2+b^2+c^2-a-c+b\underbrace{-a-c-b+1}_{0} &= 0 \Rightarrow \\ a^2-2a+1+b^2-2b+1-1 &= 0 \Rightarrow \\ (a-1)^2+(c-1)^2+b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Skoro liczby a, b, c są całkowite, to $a = c = 1$. To jednak przeczy założeniu, że $a \neq c$. Podobne wnioski wyciągamy w pozostałych przypadkach. ■

Na koniec pozostawiam kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Warto, w kontekście tych zadań, zajrzeć do artykułu Joanny Jaszuńskiej: ‚Różnica kwadratów” („Kwadrat” nr 18), dostępnego na stronie OMJ.

Zadania związane z tematyką seminarium, gdzie korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia

1. (XVI OMJ, III etap, Zad. 1) Dodatnie liczby całkowite a, b oraz n spełniają równość
$$\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$$
Wykaż, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

2. (XVI OMJ, II etap, Zad. 1) Liczby a, b spełniają warunek $2a + a^2 = 2b + b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

3. (XV OMJ, I etap, Zad. 1) Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

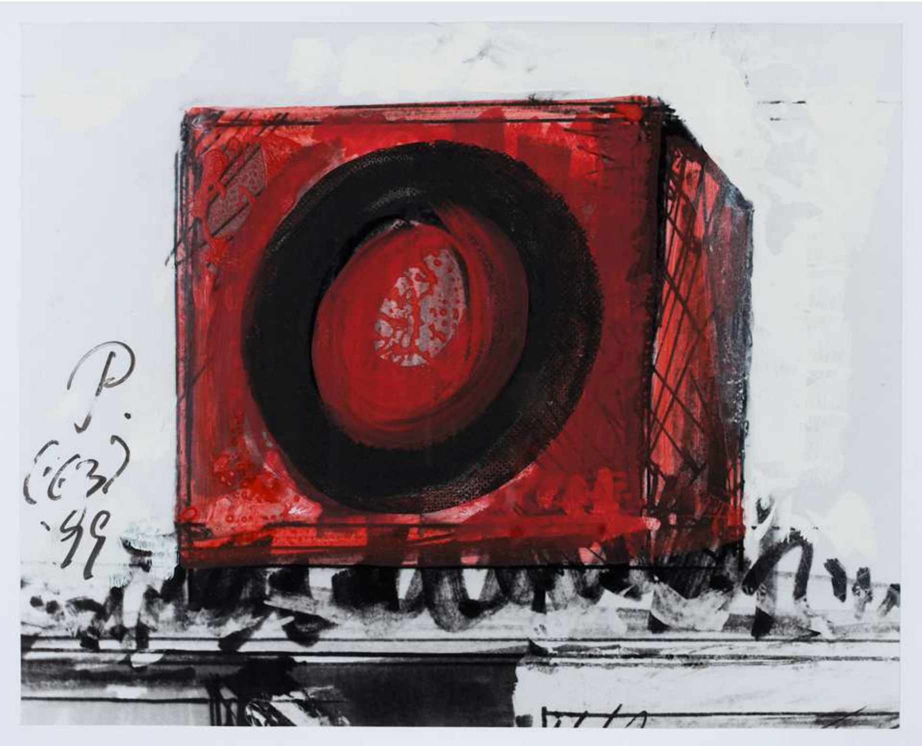
4. (XIII OMJ, III etap, Zad. 4) Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają układ równań
$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2 \end{cases}.$$
Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

5. (VI OMG, I etap, Zad. 1) Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2 \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}.$$

6. (IV OMG, I etap, Zad. 1) Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność:
$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

7. (III OM, II etap, Zad. 4) Dowieść, że jeżeli liczby a, b, c spełniają równanie
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{ab+bc+ca},$$
to dwie spośród nich są liczbami przeciwnymi.

*   *   *



Otto Piene, ZERO - muzeum. Źródło: https://zerofoundation.de/en/zero-museum-4/