Obóz Naukowy OMJ w Szczyrku, poziom OMJ
Arkadiusz Męcel 25 maja 2022 r.

Reszty z dzielenia kwadratów

Zadanie 1. *Wykaż, że równanie* $15x^2 - 7y^2 = 1$ *nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że niezależnie od wyboru liczb całkowitych x, y lewa strona rozważanego równania nie daje reszty 1 z dzielenia przez 3, co oznacza, że powyższe równanie nie ma rozwiązań. Rzeczywiście:

$$15x^2 - 7y^2 = (15x^2 - 9y^2) + 2y^2 = 3(5x^2 - 3y^2) + 2y^2.$$

Jak się okazuje, kwadrat n^2 liczby całkowitej n może przy dzieleniu przez 3 dawać jedynie reszty 0 lub 1. Udowodnimy to poniżej. Tymczasem oznacza to, że liczba $2y^2$ daje resztę 0 lub 2 z dzielenia przez 3, a zatem całe wyrażenie $15x^2 - 7y^2$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 2.

Zadanie jest rozwiązane, a my udowodnijmy fakt o resztach z dzielenia n^2 przez 3 rozważając przypadki $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą.

1. Dla $n = 3k$ liczba n^2 jest podzielna przez 3, czyli daje resztę 0.
2. Dla $n = 3k + 1$ liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, bowiem:
$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1.$$
3. Dla $n = 3k + 2$ liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, bowiem:
$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Zadanie 2. *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba* $2^n + 7^n$ *jest kwadratem.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $n = 1$ mamy $2^n + 7^n = 9$, co jest kwadratem. Pokażemy, że innych kwadratów postaci $2^n + 7^n$ nie ma. Niech $n > 1$. Rozważmy osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

- Gdy $n = 2k$, dla pewnego całkowitego k, wówczas:
$$2^n + 7^n = 4^k + 49^k.$$
Liczby 4 oraz 49 dają przy dzieleniu przez 3 reszty 1. Iloczyn liczb dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1 to również liczba dająca resztę 1. A zatem liczba n daje w tym przypadku resztę 2 z dzielenia przez 3, co oznacza, że nie może być kwadratem na mocy argumentu z poprzedniego zadania.
- Gdy $n = 2k + 1$, dla pewnego całkowitego $k > 0$, wówczas:
$$2^n + 7^n = 2^n + 7 \cdot 49^k.$$
Tym razem przyglądamy się resztom z dzielenia przez 4. Skoro $k > 0$, to liczba 2^n jest podzielna przez 4. Natomiast liczba $7 \cdot 49^k$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Rzeczywiście, sama liczba 7 daje resztę 3, zaś liczba 49 daje resztę 1. Zatem także 49^k daje resztę 1 z dzielenia przez 4.

  W rezultacie dla nieparzystych $n > 1$ liczba $2^n + 7^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Kwadrat jednak nie może dawać takiej reszty. Powtarzając prosty rachunek z zadania pierwszego przekonujemy się bowiem, że kwadraty liczb całkowitych mogą dawać reszty 0 lub 1 z dzielenia przez 4.

Wniosek: dla $n > 1$ liczba $2^n + 7^n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. A zatem liczba $2^n + 7^n$ jest kwadratem liczby całkowitej jedynie dla $n = 1$.

Zadanie 3. *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p^2 + 11$ ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że poza przypadkiem $p = 2$ liczba $p^2 + 11$ jest parzysta. Natomiast dla $p = 2$ liczba $p^2+11 = 15$ ma jedynie 4 dzielniki: $1, 3, 5, 15$. Załóżmy więc, że p^2+11 jest parzysta i ma dokładnie 6 dzielników. Na pewno są wśród nich dzielniki $1, 2$. Zastanówmy się czy mogą wśród nich występować także dzielniki 3 i 4, którymi się zajmujemy od początku naszych zajęć.

Jeśli chodzi o podzielność przez 3, to trzeba osobno rozważyć przypadek $p = 3$ oraz $p > 3$. Dla $p = 3$ mamy $p^2 + 11 = 20$, co jest liczbą niepodzielną przez 3, ale mającą 6 dzielników $1, 2, 4, 5, 10, 20$. Dla $p > 3$ liczba pierwsza daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3, a wiec zgodnie z rachunkiem z zadania pierwszego, liczba p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Stąd $p^2 + 11$ jest podzielna przez 3.

Zajmijmy się teraz resztami z dzielenia przez 4. Liczba p jest pierwsza i większa od 2, czyli jest nieparzysta. A zatem p daje resztę 1 lub 3 z dzielenia przez 4. Liczba p^2 daje więc resztę 1 z dzielenia przez 4. Ponownie więc, liczba $p^2 + 11$ jest podzielna przez 4.

Pokazaliśmy, że dla $p > 3$ liczba $p^2 + 11$ ma dzielniki $1, 2, 3, 4$, a wiec także 6 oraz 12. Skoro liczba $p^2 + 11$ ma mieć dokładnie 6 dzielników, to musimy mieć $p^2+11 = 12$, czyli $p = 1$, co oczywiście jest sprzeczne z założeniem $p > 3$. A zatem jedynie dla $p = 3$ liczba $p^2 + 11$ ma sześć dzielników.

Zadanie 4. *Wykaż, że nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że 2^n jest dzielnikiem $3^n + 1$.*

Rozwiązanie. Czasami w zadaniach powyższego typu warto pamiętać o zasadzie: dzielnik dzielnika jest dzielnikiem i zastanawiać się czy potencjalny dzielnik 2^n liczby $3^n + 1$ nie ma przypadkiem dzielnika, którego $3^n + 1$ mieć nie może? Liczby 2^n mają dzielniki będące jedynie potęgami liczby 2. Jak się okazuje $3^n + 1$ takich dzielników za wielu nie ma.

Dla $n > 2$ liczba 2^n jest podzielna przez 8. Natomiast liczba 3^n daje przy dzieleniu przez 8 reszty 1 lub 3. To oznacza, że liczba $3^n + 1$ daje przy dzieleniu przez 8 resztę 2 lub 4, nie zaś 0. W rezultacie dla $n > 2$ liczba 2^n nie jest dzielnikiem $3^n + 1$. Wystarczy teraz dodać, że dla $n = 2$ liczba 2^n wynosi 4, a liczba $3^n + 1$ wynosi 10. A zatem także dla $n = 2$ liczba 2^n nie jest dzielnikiem $3^n + 1$.

Zadanie 5. *Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2 + 1$ oraz $6p^2 + 1$ są również liczbami pierwszymi.*

Rozwiązanie. Tym razem interesować nas będą reszty z dzielenia przez 5. Zacznijmy od wypisania tabeli z resztami z dzielenia przez 5 liczby n^2 w zależności od reszty z dzielenia przez 5 liczby n:

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1

Dołączmy teraz do tabeli reszty z dzielenia $4n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$, w zależności od reszty z dzielenia n przez 5:

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1
$4n^2 + 1$	1	0	2	2	0
$6n^2 + 1$	1	2	0	0	2

Zauważmy, że skutek jest następujący: niezależnie od reszty z dzielenia n przez 5 jedna z liczb n, $4n^2+1$, $6n^2+1$ jest podzielna przez 5. Zatem te trzy liczby mogą być pierwsze wyłącznie wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą nie większą niż 5.

- Dla $p = 2$ mamy $6p^2 + 1 = 25$,
- Dla $p = 3$ mamy $6p^2 + 1 = 55$,
- Dla $p = 5$ mamy $4p^2 + 1 = 101$, $6p^2 + 1 = 151$ i są to liczby pierwsze. To jedyne rozwiązanie zadania.

Zadanie 6. *Niech p będzie iloczynem pierwszych $n > 1$ liczb pierwszych. Pokaż, że $p - 1$ nie jest kwadratem.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to kolejne liczby pierwsze, wówczas $p_1 = 2, p_2 = 3$, czyli $p - 1 = 6p_3p_4 \ldots p_n$ daje resztę 5 z dzielenia przez 6. Tymczasem kwadraty dają jedynie reszty 0, 1, 3, 4 z dzielenia przez 6. W konsekwencji liczba $p - 1$ nie może być kwadratem.

Zadanie 7. *Czy suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych może być kwadratem?*

Rozwiązanie. Przyjrzymy się resztom z dzielenia przez 8. Zróbmy tabelkę reszt z dzielenia n^2 przez 8 w zależności od reszty z dzielenia n przez 8:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Zauważmy, że jeśli dodamy do siebie trzy kolejne liczby znajdujące się w dolnym wierszu, to uzyskać możemy jedynie wyniki 2, 5 lub 6. Tymczasem żadna z tych liczb nie jest resztą, jaką kwadrat może dawać przy dzieleniu przez 8. A zatem kwadrat nie może być sumą trzech kwadratów kolejnych liczb całkowitych.

Zadanie 8. *Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania $a^2 + b^2 = c^2$ w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a oraz c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że skoro a jest liczbą pierwszą, to a^2 ma niewiele dzielników dodatnich: jedynie $1, a$ oraz a^2. Tymczasem mamy

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b).$$

Skoro $b - c \neq b + c$ (inaczej $c = 0$), to musimy mieć

$$c - b = 1.$$

A zatem uzyskujemy:

$$a^2 = 2b + 1,$$

co oznacza, że a jest liczbą nieparzystą. Wykorzystaliśmy założenie o pierwszości a. Teraz wykorzystamy założenie o pierwszości c. Oznaczmy $a = 2n + 1$. Mamy wówczas:

$$(2n + 1)^2 = 2b + 1 \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 2b + 1 \Rightarrow b = 2n^2 + 2n = 2n(n + 1),$$

a skoro $b = c - 1$, to

$$c = 2n^2 + 2n + 1.$$

Zauważmy, że założenie zadania wymaga, aby liczba $2n(n + 1)$ miała nie więcej niż 4 dzielniki pierwsze. Ale przecież $n(n + 1)$ jest liczbą parzystą, a zatem nasza liczba z pewnością ma dzielniki:

$$1, 2, 4, n, n + 1.$$

Zauważmy, że liczby n oraz $n+1$ są względnie pierwsze. Skoro zatem iloczyn $2n(n+1)$ ma mieć w rozkładzie na czynniki pierwsze nie więcej niż 4 czynniki pierwsze, to $n(n+1)$ musi mieć co najwyżej dwa nieparzyste dzielniki pierwsze. Pokażemy, że jeśli te czynniki występują, to muszą być liczbami 3 lub 5. W tym celu popatrzymy na reszty z dzielenia.

Popatrzy na reszty z dzielenia przez 5:

n	0	1	2	3	4
$a = 2n + 1$	1	3	0	2	4
$c = 2n^2 + 2n + 1$	1	0	3	0	1

A zatem jeśli n daje resztę 1 lub 3 z dzielenia przez 5, to liczba $2n^2 + 2n + 1$ jest podzielna przez 5. Skoro ma to być liczba pierwsza, to musimy mieć $2n^2 + 2n + 1 = 5$, czyli $n = 1$. To nam daje znane już rozwiązanie

$$(a, b, c) = (3, 4, 5).$$

Jeśli liczba n daje resztę 2 z dzielenia przez 5, wówczas $2n + 1$ jest podzielne przez 5. Czyli musi być $n = 2$ i dostajemy rozwiązanie

$$(a, b, c) = (5, 12, 13).$$

Pozostają nam przypadki, gdy n daje resztę 0 lub 4 z dzielenia przez 5. Zauważmy, że w obydwu przypadkach, liczba $b = 2n(n + 1)$ jest podzielna przez 5. Twierdzimy, że teraz jest również podzielna przez 3. Rzeczywiście jedyna sytuacja, gdzie nie widać tego od razu jest, gdy n daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Wtedy jednak $2n+1$ daje resztę 0 i musielibyśmy mieć $2n + 1 = 3$, czyli $n = 1$, co już wykluczyliśmy. A zatem dostaliśmy, że jeśli $b = 2n(n + 1)$ jest podzielne przez $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, czyli musi być równe tej liczbie. A zatem $b = 60$, czyli dostajemy ostatnią trójkę:

$$(a, b, c) = (11, 60, 61).$$

Zadanie 9. *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, których cztery najmniejsze dzielniki dodatnie $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ spełniają*

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Rozwiązanie. Z warunków zadania będziemy wyprowadzać kolejne informacje o dzielnikach d_1, d_2, d_3, d_4. Niewątpliwie $d_1 = 1$. A zatem

$$n = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Zauważmy, że n nie może być liczbą nieparzystą, bo wtedy liczby d_2, d_3, d_4 jako dzielniki n byłyby nieparzyste, a zatem w sumie powyżej po lewej stronie mielibyśmy liczbę nieparzystą, a po prawej – liczbę parzystą. Wniosek jest taki, że n jest liczbą parzystą. A zatem $d_2 = 2$. Stąd:

$$n = 5 + d_3^2 + d_4^2 \quad \Rightarrow \quad n - 5 = d_3^2 + d_4^2.$$

Zauważmy teraz, że skoro n jest parzyste, to znaczy, że $n - 5$ jest nieparzysta. A zatem $d_3^2 + d_4^2$ jest nieparzysta. Oznacza to, że liczby d_3, d_4 są różnej parzystości. Jakie mamy możliwości?

- Jeśli d_3 jest parzyste, to musi to być 4. Inaczej bowiem d_3 będzie miało dzielnik pierwszy większy od 2 i mniejszy od siebie, co nie jest możliwe.
- Jeśli d_3 jest nieparzystą liczbą pierwszą, to d_4 musi być równe $2d_3$ lub ewentualnie $d_3 = 3$, $d_4 = 4$.

Wykluczymy niektóre z powyższych możliwości pokazując, że n nie jest podzielna przez 4. Po prostu jedna z liczb d_3^2, d_4^2 jest podzielna przez 4, a druga daje resztę 1 z dzielenia przez 4. A zatem suma $5 + d_3^2 + d_4^2$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4.

W konsekwencji $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = p, d_4 = 2p$, gdzie $p > 3$ jest nieparzystą liczbą pierwszą. Mamy zatem:

$$n = 5 + p^2 + 4p^2 = 5(1 + p^2).$$

Stąd także 5 jest dzielnikiem n, a więc $p = 5$ i ostatecznie uzyskujemy szukaną wartość $n = 130$.

Reszty z dzielenia liczb pierwszych

Zadanie 10. *Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, ze liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.*

Rozwiązanie. Podzielność przez 24 wymaga jednoczesnej podzielności przez 3 i przez 8. Mamy

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1).$$

Liczba p jest większa od 3 i jest liczbą pierwszą, a zatem daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3 i powyższy iloczyn zawiera czynnik podzielny przez 3.

Jeśli chodzi o podzielność przez 8 to wracając do rozwiązania zadania 7 widzimy, że kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8. To ważny i godny zapamiętania fakt. Oznacza on oczywiście, że dla liczby nieparzystej n liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 11. *Niech $p, q > 3$ będą liczbami pierwszymi. Wykaż, ze liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 24.*

Rozwiązanie. To zadanie jest wariacją powyższego i natychmiastowym wnioskiem. Skoro każda z liczb p^2, q^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 24, to oczywiście ich różnica jest przez 24 podzielna. Można to oczywiście udowodnić zupełnie niezależnie od wcześniejszego zadania. Zrobimy to korzystając z następującej fundamentalnej obserwacji.

Jeśli liczba pierwsza p jest większa od 3 to daje resztę 1 lub 5 z dzielenia przez 6. Sprawa jest oczywista, bo liczba pierwsza większa od 3 nie jest parzysta, ani nie jest dzielnikiem 3. Fakt ten ma jednak wiele pięknych zastosowań. W tym zadaniu możemy zauważyć, że

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$$

Z przytoczonego faktu od razu widać, że jeden z czynników wyżej jest podzielny przez 6. Obydwa czynniki są natomiast liczbami parzystymi i jeden musi być podzielny przez 4 (dlaczego?). To daje nam alternatywne rozwiązanie.

Zadanie 12. *Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że p^2 jest liczbą nieparzystą, więc i p jest nieparzyste. Dla $q \leqslant 3$ mamy rozwiązania

$$(p, q) = (3, 2), \quad (p, q) = (5, 3).$$

Jeśli $p, q > 3$ to korzystamy z tezy pierwszego zadania. Liczby p^2, q^2 dają reszty 1 z dzielenia przez 24, a więc $p^2 - 2q^2$ daje resztę 23. Natomiast zgodnie z równaniem potencjalne rozwiązanie powinno prowadzić do tego, że $p^2 - 2q^2$ daje resztę 1 z dzielenia przez 24. A zatem wypisane wyżej dwa rozwiązania są jedyne.

Zadanie 13. *Wykaż, że jeśli liczby p oraz $p^2 + 2$ są pierwsze, to również liczba $p^3 + 2$ jest pierwsza.*

Rozwiązanie. Oczywiście p musi być liczbą nieparzystą. Dla $p = 3$ mamy

$$p^2 + 2 = 11, \quad p^3 + 2 = 29,$$

co jest rozwiązaniem.

Dla $p > 3$ wiemy, że $p = 6k \pm 1$, czyli $p^2 + 2$ jest podzielna przez 3. A zatem jedynym p spełniającym warunki zadania jest $p = 3$.

Zadanie 14. *Niech $n > 6$. Pokaż, że jeśli liczby $n-1$ oraz $n+1$ są pierwsze, to liczba*

$$n^2(n^2+16)$$

jest podzielna przez 720.

Rozwiązanie. Liczby $n-1$ oraz $n+1$ musza być postaci $6k-1$ oraz $6k+1$, dla pewnego k. Muszą bowiem obydwie dawać reszty 1 lub 5 z dzielenia przez 6 i być jednocześnie odległe o 2. Wstawiamy zatem $n = 6k$:

$$n^2(n^2+16) = 36k^2(36k^2+16).$$

Oczywiście rozważana liczba ma dzielnik $36 \cdot 4$, bo 36 mamy już wyciągnięte, a 4 jest dzielnikiem $36k^2+16$. A zatem pokazaliśmy, że $n^2(n^2+16)$ jest podzielne przez 144. Skoro $720 = 144 \cdot 5$, to pozostaje pokazać podzielność przez 5.

Zróbmy bardzo prostą tabelkę reszt z dzielenia przez 5:

n	0	1	2	3	4
$n-1$	4	0	1	2	3
$n+1$	1	2	3	4	0

Jeśli n jest podzielne przez 5 to mamy tezę i $n^2(n^2+16)$ jest podzielne przez 720. Odrzucamy też wszystkie sytuacje, gdy w drugim lub w trzecim wierszu jest 0.

Widzimy stąd, że jeśli n nie jest podzielne przez 5 i liczby $n-1$, $n+1$ są pierwsze, to należy rozpatrywać tylko sytuacje, gdy n daje reszty 2 lub 3 z dzielenia przez 5. Wtedy jednak n^2 daje resztę 4. To oznacza, że n^2+16 daje resztę 0, a zatem jest to czynnik podzielny przez 5, i dowód jest zakończony.

Zadanie 15. *Pokaż, że zbiór liczb postaci:*

$$\sqrt{24n+1}, \ \textit{gdzie } n \geqslant 1$$

zawiera wszystkie liczby pierwsze, poza 2 i 3.

Rozwiązanie. Sprawdźmy dla jakich wartości n liczby $\sqrt{24n+1}$ są naturalne. Oczywiście musi istnieć liczba całkowita dodatnia q taka, że

$$24n+1 = q^2,$$

lub zapisując równoważnie:

$$n = \frac{q^2-1}{24} = \frac{(q-1)(q+1)}{24}.$$

Skoro n jest naturalne, to mianownik musi się znosić. Stąd n musi być nieparzysta. W konsekwencji $q-1$ oraz $q+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi i jedna z nich jest dzielnikiem 4. Zatem iloczyn $(q-1)(q+1)$ jest podzielny przez 8.

Co więcej, jedna z liczb $(q-1)(q+1)$ musi być wielokrotnością 3. A zatem istnieje s naturalne takie, że

$$q \pm 1 = 6s \quad \text{czyli} \quad q = 6s \pm 1.$$

To oznacza, że:

$$n = \frac{s(3s \pm 1)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Stąd

$$\sqrt{24n+1} = 6s \pm 1, \qquad \text{dla } s = 1, 2, 3, \ldots,$$

co oznacza, że w tym ciągu znajduje się każda liczba pierwsza większa od 3.