Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel 16-17 września 2022 r.

Reszty z dzielenia

Pojęcie reszty z dzielenia uczniowie poznają stosunkowo wcześnie, ale zwykle nie poruszamy go w szkole w kontekście algebraicznym. To właśnie ujęcie jest natomiast wykorzystywane na konkursach matematycznych. Występuje ono również w bardziej zaawansowanej szacie zwanej teorią kongruencji, którą się tu nie zajmujemy. Dla ustalenia uwagi przypomnijmy podstawowe definicje.

Definicja 1. *Mówimy, że niezerowa liczba całkowita m jest dzielnikiem liczby całkowitej n, jeśli istnieje liczba całkowita d taka, że*

$$n = d \cdot m.$$

Gdy liczba m jest dzielnikiem n mówimy też, że n dzieli się przez m, a czasem dodajemy nawet: dzieli się bez reszty przez m. Odnosimy się tu do następującego wyniku (ograniczamy go do liczb dodatnich).

Twierdzenie 1. *(O dzieleniu z resztą) Niech n, m będą liczbami całkowitymi, przy czym $m > 0$. Wówczas istnieją liczby naturalne d, r, przy czym $0 \leqslant r < m$ takie, że:*

$$n = d \cdot m + r.$$

Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia n przez m.

Twierdzenie brzmi dostojnie, ale w istocie zapisaliśmy tu jedynie równość[1]

$$\frac{n}{m} = d + \frac{r}{m}.$$

Dla nas szczególnie istotnym wnioskiem jest następująca obserwacja.

Obserwacja 1. *Liczba całkowita nie może dawać dwóch różnych reszt z dzielenia przez liczbę całkowitą dodatnią. W szczególności nie istnieje liczba całkowita, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta.*

Zobaczmy kilka prostych przykładów, gdzie zastosować można zapis algebraiczny, który pojawia się w Twierdzeniu 1. Poniższe zadania pochodzą z książki *Koło matematyczne w gimnazjum* autorstwa Z. Bobińskiego, P. Nodzyńskiego i M. Usckiego. Czytelnika zainteresowanego niebanalnymi zadaniami o resztach dla klas młodszych, odsyłam do pozycji J i J. Bednarczuków *Matematyczne gwiazdki* (wydanie z roku 2019, np. zad. 107-156).

Zadanie 1. *Czy istnieje taka liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2?*

Rozwiązanie. Odpowiedz brzmi: taka liczba nie istnieje. Będziemy rozumować nie wprost. Jest to jeden z bardzo często stosowanych rodzajów dowodów. Polega on na zaprzeczeniu tezy twierdzenia, a następnie wyciągnięciu z tego zaprzeczenia wniosku, który jest nieprawdziwy. Według zasad logiki z prawdy nie może wynikać nieprawda, co oznacza, że w istocie wnioskując z zaprzeczenia tezy, wnioskowaliśmy z nieprawdy. Zaprzeczeniem naszej tezy jest istnienie liczby całkowitej, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2. Nazwijmy tą liczbę n.

Zapiszmy algebraicznie dwa warunki, które miałaby spełniać n. Dzielimy n przez 6 i dostajemy pewien iloraz k oraz resztę 1. Możemy zapisać to za pomocą równania. $n = 6k + 1$. Dzielimy następnie n przez 8 i dostajemy nowy iloraz l oraz resztę 2. A zatem dostajemy warunek $n = 8l + 2$. Zauważmy jednak, że liczba $6k + 1$ jest nieparzysta, a liczba $8l+2 = 2(4l+1)$ jest parzysta. A zatem przedstawiliśmy n jednocześnie jako liczbę parzystą i nieparzystą:

$$n = 6k + 1 = 2(4l + 1).$$

Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem, że istnieją liczby całkowite k, l spełniające warunki $n = 6k + 1$ oraz $n = 8l + 2$. A zatem odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna. ■

[1] Nie należy natomiast stosować notacji ułamka mieszanego $d\frac{r}{m}$, bowiem w zapisie algebraicznym oznacza ona (w sposób mało elegancki) iloczyn d oraz $\frac{r}{m}$.

Zadanie 2. *Czy suma* 48 *kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez* 48*?*

Rozwiązanie. Weźmy dowolną liczbę naturalną n oraz 47 kolejnych liczb całkowitych:

$$n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad \ldots, \quad n+47.$$

Dodając liczby od n do $n+47$ uzyskujemy sumę dwóch składników: $48n$ oraz $1+2+3+\ldots+47$. Mamy też:

$$1+2+3+\ldots+47 = (1+47)+(2+46)+(3+45)+\ldots+(23+25)+24 = 23\cdot 48+24.$$

Zatem suma wszystkich liczb całkowitych od n do $n+47$ jest równa

$$48n+23\cdot 48+24 = 48(n+23)+24.$$

A zatem suma 48 kolejnych liczb naturalnych daje zawsze resztę 24 przy dzieleniu przez 48. Oznacza to, że odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.

Uwaga 1. Można nieco inaczej zapisać 48 kolejnych liczb naturalnych, zaczynając dla pewnego n naturalnego od liczby $n-23$, a kończąc na liczbie $n+24$. Suma tych liczb to $48n+24$.

Uwaga 2. Suma 3 kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3, a suma 4 kolejnych liczb naturalnych nie jest podzielna przez 4. Warto zadać sobie ogólne pytanie: jak zmienia się odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie, gdy zamiast 48 pojawi się inna dodatnia liczba całkowita? ■

Zadanie 3. *Przy dzieleniu liczb naturalnych* a,b,c *przez* 5 *otrzymujemy odpowiednio reszty* $1,2,3$. *Wyznacz resztę z dzielenia przez* 5 *sumy kwadratów liczb* a,b,c.

Rozwiązanie. To rutynowe zadanie wymaga niejakiej biegłości w posługiwaniu się wyrażeniami algebraicznymi. Z warunków zadania wynika, że istnieją liczby całkowite n,m,k takie, że:

$$a=5n+1, \quad b=5m+2, \quad c=5k+3.$$

Mamy zatem (używamy wzorów skróconego mnożenia, ale można wymnożyć nawiasy):

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (5n+1)^2+(5m+2)^2+(5k+3)^2 = \\ &= 25n^2+10n+1+25m^2+20m+4+25k^2+30k+9 = \\ &= 5(5n^2+5m^2+5k^2+2n+4m+6k+2)+4. \end{aligned}$$

Udało nam się przedstawić liczbę $a^2+b^2+c^2$ w postaci sumy $5d+r$, gdzie $0 \leqslant r < 5$. Dokładniej liczba r to 4 i jest to właśnie szukana reszta. ■

Zadanie 4. *Udowodnij, że kwadrat dowolnej liczby naturalnej daje przy dzieleniu przez* 3 *reszty* 0 *lub* 1.

Rozwiązanie. Rozważmy dowolną liczbę całkowitą n. Rozważamy trzy przypadki: $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Przypadki te mówią dokładnie, że liczba n daje odpowiednio resztę 0, 1, 2 z dzielenia przez 3. Teraz stosujemy technikę identyczną jak w poprzednim zadaniu.

1. Dla $n=3k$ liczba n^2 jest podzielna przez 3, czyli daje resztę 0.
2. Dla $n=3k+1$ liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, bowiem:

$$(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1.$$

3. Dla $n=3k+2$ liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, bowiem:

$$(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1.$$

■

Zadanie 5. *Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczby $12n+1$ oraz $30n+1$ są względnie pierwsze.*

Rozwiązanie. Pytamy o to jakie wspólne dzielniki dodatnie mogą mieć liczby $12n+1$ oraz $30n+1$? Nie wystarczy rozpatrzenie kilku pierwszych przypadków – trzeba uzasadnić tezę dla każdej liczby całkowitej n. Ponownie więc rozumujemy nie wprost. Tym razem zaprzeczenie tezy jest bardziej skomplikowane. Twierdzimy, że dla każdego n zachodzi pewna własność. Aby zaprzeczyć tej tezie wystarczy wskazać jakiekolwiek n, dla którego nie jest ona spełniona. Załóżmy, że takie n istnieje i liczba $m > 1$ jest wspólnym dzielnikiem liczb $12n+1$ oraz $30n+1$.

Skorzystamy z obserwacji, która często jest używana w zadaniach konkursowych.

Obserwacja 2. *Jeśli liczba całkowita dodatnia m jest dzielnikiem zarówno liczby a, jak i liczby b, to jest również dzielnikiem liczb $a-b$ oraz $a+b$.*

Zauważmy, że $30n+1-(12n+1) = 18n$. A zatem rzekomy wspólny dzielnik m liczb $12n+1$ oraz $30n+1$ musi być również dzielnikiem liczby $18n$. Czy to jest możliwe? Twierdzimy, że liczby $12n+1$ oraz $18n$ nie mogą mieć żadnych wspólnych dzielników pierwszych. Rzeczywiście:

- 2 jest dzielnikiem $18n$, ale $12n+1$ daje przy dzieleniu przez 2 resztę 1,
- 3 jest dzielnikiem $18n$, ale $12n+1$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2,
- jeśli $p > 3$ jest dzielnikiem pierwszym liczby n, to mamy $12n+1$ daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

Pokazaliśmy zatem, że $30n+1$ oraz $12n+1$ nie mają wspólnych dzielników większych od 1.

Zbytnio wyrafinowane być może rozważanie wyżej można znacznie uprościć sprytną obserwacją — wspólny dzielnik liczb $30n+1$ oraz $12n+1$ musiałby również być dzielnikiem liczby $5(12n+1)-2(30n+1) = 3$. ■

Czasem do rozwiązania zadania matematycznego wystarczy spojrzenie na nie przez właściwe „okulary", które skomplikowaną na pierwszy rzut oka sytuację upraszczają poprzez skupienie uwagi na pewnym jej aspekcie.

Zadanie 6. *Na tablicy zapisano dziesięć znaków „+" i piętnaście znaków „–". W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i zapisujemy na tablicy „+", jeśli znaki były takie same, oraz „–", jeśli były różne. Po 24 ruchach na tablicy zostaje jeden znak. Jaki?*

To zadanie, opisane przez Paulinę Domagalską w tekście *Metoda niezmienników i półniezmienników*, dostępnym na stronie OMJ pod adresem `https://omj.edu.pl/konferencje-sem`, jest jednym z wielu zadań o „wymazywaniu", „ścinaniu głów", „zmianie koloru" itd., w których wykorzystujemy tzw. metodę niezmienników, czyli wskazujemy własność, która nie ulega zmianie przy wykonywanej w zadaniu operacji. Reszty z dzielenia to typowe przykłady niezmienników. W naszym zadaniu niezmiennikiem jest reszta z dzielenia przez 2.

Rozwiązanie. Zauważmy, że mamy na początku parzyście wiele znaków „+" i nieparzyście wiele znaków „–". Co dzieje się z parzystością tych liczb, gdy wykonujemy naszą operację? Parzystość liczby znaków „+" może się zmienić, ponieważ w wyniku operacji zamiast dwóch plusów może pojawić się jeden plus. A co z minusami? Tu niezależnie od tego jakie znaki ścieramy, liczba minusów nie zmienia się lub zmniejsza się o 2. Istotnie:

- Jeśli zetrzemy dwa znaki „+", to liczba znaków „–" nie zmienia się.
- Jeśli wybierzemy znaki „+" oraz „-", to po ich starciu wpisujemy „–", więc znów liczba „–" się nie zmienia.
- Jeśli wybierzemy znaki „–" oraz „–", wówczas na ich miejsce wpisujemy „+", czyli liczba „–" maleje o 2.

Startowaliśmy od nieparzystej liczby znaków „–" i po dowolnej liczbie operacji liczba znaków „–" musi pozostać nieparzysta – również wtedy, gdy na tablicy pozostaje tylko jeden znak. A zatem jest to znak „–". ■

Można powiedzieć, że w powyższym zadaniu spojrzeliśmy na opisaną sytuację przez „okulary modulo 2", przyglądając się resztom z dzielenia przez 2. Słowo „modulo" pochodzi z łaciny i zostało do matematyki wprowadzone przez Gaussa – twórcę teorii kongruencji. Stwierdzenie, że pewne dwie liczby są równe modulo 2 oznacza właśnie, że mają one taką samą parzystość. Natomiast stwierdzenie, że liczby są równe modulo 3 oznacza, że reszty z dzielenia tych liczb przez 3 są równe, itd.

Zobaczmy przykład zadania, na które wygodnie jest spojrzeć tym razem przez „okulary modulo 3".

Zadanie 7. *Na wyspie Mua żyją trzy rodzaje kameleonów: błękitne, granatowe i purpurowe. Po spotkaniu się dwóch osobników tego samego koloru nie dzieje się nic. Spotkanie dwóch osobników różnych kolorów powoduje zmianę koloru na ten trzeci. Na wyspie żyje 56 kameleonów błękitnych, 34 granatowe i 66 purpurowych. Czy jest możliwe, ze w pewnym momencie na wyspie będą kameleony tylko jednego koloru?*

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczby 56, 34, 66 dają różne reszty z dzielenia przez 3: pierwsza daje resztę 2, druga resztę 1, a trzecia – resztę 0. Operacja zmiany koloru powoduje, że zmienia się liczba kameleonów każdego koloru. W jaki sposób to się odbywa? Dwie liczby zmniejszają się o 1 (kameleony różnych kolorów pozbywają się tego koloru), a jedna rośnie o 2 (to jest kolor, który przyjmują różne kameleony). Co się nie zmienia? Fakt, że liczba kameleonów różnych kolorów w dalszym ciągu daje trzy różne reszty z dzielenia przez 3.

Sformułujmy fakt, który stoi za powyższym stwierdzeniem. Uzasadnienie pozostawiam Czytelnikowi. Jesli liczby a, b, c dają przy dzieleniu przez 3 reszty równe odpowiednio $0, 1, 2$, to:

- liczby $a-1, b-1, c+2$ dają przy dzieleniu przez 3 reszty $2, 0, 1$,
- liczby $a-1, b+2, c-1$ dają przy dzieleniu przez 3 reszty $2, 0, 1$,
- liczby $a+2, b-1, c-1$ dają przy dzieleniu przez 3 reszty $2, 0, 1$.

Jaka jest konkluzja? Gdyby w pewnym momencie wszystkie kameleony były jednego koloru, to by oznaczało, że liczby kameleonów w dwóch pozostałych kolorach (równe zero) – dawałyby takie same reszty z dzielenia przez 3. To jest niemożliwe. ■

To było proste i znane zadanie, ale istnieje jego nieco bardziej skomplikowana wersja, bardzo pouczająca.

Zadanie 8. *Wierzchołki siedmiokąta foremnego pokolorowane są na czerwono, niebiesko i zielono. Dysponujemy następującą operacją zmiany koloru: jeśli pewne dwa sąsiednie wierzchołki siedmiokąta są różnych kolorów, możemy zamienić ich kolor na ten sam – różny jednak od tego, którym były pokolorowane. Pokaż, że jesteśmy w stanie za pomocą pewnej liczby powyższych operacji zmienić kolory wszystkich wierzchołków siedmiokąta na jednakowy kolor. Czy możemy określić ten jednakowy kolor bez wykonywania opisanych wyżej operacji?*

Rozwiązanie. Zacznijmy od kilku obserwacji. Jeśli kolory oznaczymy w skrócie przez $C, N.Z$, to przyglądając się różnym konfiguracjom czterech kolejnych wierzchołków możemy bez trudu wskazać operacje, które zamienią pierwsze trzy na ten sam kolor. Rzeczywiście, jeśli trzy kolejne wierzchołki pomalowano na różne kolory, to jedną operacją można je zmienić na te same, np.

$$CNZ \mapsto CCC.$$

Jeśli pierwsze trzy wierzchołki mają tylko dwa kolory, wtedy jest kilka przypadków do rozważenia (z dokładnością do kolejności kolorów):

- $NCCN \mapsto NCZZ \mapsto NNNZ$;
- $ZCCN \mapsto ZCZZ \mapsto ZNNZ \mapsto CCCC$;
- $NCNC \mapsto ZZZZ$;
- $NCCC \mapsto ZZCC \mapsto ZNNC \mapsto ZNZZ \mapsto ZCCZ \mapsto NNNN$,
- $ZCCN \mapsto ZCZZ \mapsto ZNNZ \mapsto CCCC$.

A zatem możemy kolejno przekolorować wierzchołki tak, że mamy kolejne trójki wierzchołków tego samego koloru oraz jeden wierzchołek nieznanego koloru, nazwijmy go X. Okazuje się, że możemy przekolorować cały siedmiokąt na ten kolor. Istotnie, mamy np.

$$CCCN \mapsto CCZZ \mapsto CNNZ \mapsto ZZNZ \mapsto ZCCZ \mapsto NNNN.$$

Nietrudno widzieć, że zamiast C oraz N mogą stać inne kolory. A zatem pokazaliśmy, że można przekolorować w ten sposób cały siedmiokąt.

Problem pojawia się przy drugim pytaniu. Nasza procedura wskazuje sposób przekolorowania, ale nie wskazuje jednoznacznie koloru, na który przekolorowaliśmy wierzchołki siedmiokąta. Tu już przydatna jest matematyka. Potraktujemy kolorowe wierzchołki tak jak kameleony w poprzednim zadaniu. Zobaczymy ile ich jest i jakie są reszty z dzielenia przez 3 tych liczb. Problem jest niestety taki, że tym razem jednak nie wiemy ile jest owych kameleonów. Wiemy tylko, że jest ich w sumie 7. Zapiszmy liczby niebieskich, czerwonych i zielonych wierzchołków w pierwotnym kolorowaniu jako x, y, z i spójrzmy na równanie:

$$x + y + z = 7.$$

Gdyby interesowały nas reszty z dzielenia przez 3 widzimy, że wykluczone są dwie możliwości:

- reszty z dzielenia przez 3 liczb x, y, z są różne,
- reszty z dzielenia przez 3 liczb x, y, z są równe.

W obydwu wymienionych wyżej przypadkach, suma liczb x, y, z jest podzielna przez 3. Jaki stąd wniosek? Okazuje się, że **dokładnie dwie** z reszt z dzielenia liczb x, y, z przez 3 są równe! Jak się okazuje, to liczba o unikatowej reszcie z dzielenia przez 3 reprezentuje kolor, który pozostaje pod koniec. Dlaczego? Wykażemy, że równość reszt z dzielenia przez 3 nie zmienia się przy przekolorowaniu.

Załóżmy, że w pierwotnym kolorowaniu reszty z dzielenia y oraz z przez 3 były równe. Pokażemy, że po wykonaniu przez nas operacji zmiany koloru wierzchołków na jednakowy kolor – tym kolorem musi być C. Rzeczywiście, dowolna zmiana kolorów nie zmienia tego, że liczba niebieskich i zielonych wierzchołków daje taką samą resztę z dzielenia przez 3. Argumentujemy analogicznie, jak w zadaniu o kameleonach.

- Zmiana $NZ \mapsto CC$ sprawia, że ubywa po jednym wierzchołku niebieskim i jednym zielonym. A zatem reszta z dzielenia przez 3 liczb wierzchołków niebieskich i zielonych jest dalej taka sama.
- Zmiana $CN \mapsto ZZ$ sprawia, że ubywa jeden wierzchołek niebieski, przybyły natomiast dwa zielone. Skoro jednak y, z dawały te same reszty z dzielenia przez 3, to również $y - 1$ oraz $z + 2$ dają te same reszty.
- Zmiana $CZ \mapsto NN$ działa analogicznie jak w poprzednim przypadku. Tym razem zabieramy jeden wierzchołek zielony, ale dodajemy dwa niebieskie, więc liczba zielonych i niebieskich wierzchołków dalej jest „równa modulo 3".

Dlaczego więc to kolor C pozostaje, gdy wszystkie wierzchołki siedmiokąta są tego samego koloru? Gdybyśmy bowiem śledzili jak zmieniają się liczby x, y, z, to na końcu dostaniemy w pewnej kolejności liczby $7, 0, 0$. Skoro reszty z dzielenia przez 3 liczb y, z się nie zmieniły i są równe, to obydwie muszą być równe 0, co kończy dowód. ■

Czytelnik zechce zauważyć, że w rozwiązaniu zadania nie korzystamy z żadnej innej własności liczby 7 poza tą, że nie jest ona podzielna przez 3.

Zadanie 9. *Kasia wpisała liczby* $1, 2, 3, \ldots, 9$ *do tabelki rozmiarów* 3×3 *złożonej z dziewięciu pól, umieszczając w każdym polu inną liczbę. Następnie wykonała serię operacji polegających na wyborze dowolnego kwadratu* 2×2 *w tabelce i zwiększeniu lub zmniejszeniu o* 1 *wszystkich liczb wpisanych w pola tego kwadratu. Czy po wykonaniu pewnej liczby opisanych operacji możliwe jest, aby wszystkie liczby w tabelce* 3×3 *były równe* 11*?*

Rozwiązanie. Okazuje się, że odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna. Kluczowym niezmiennikiem jest tu suma wszystkich pól znajdujących się na szachownicy. Zauważmy, że na początku suma ta wynosi $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$. Każda operacja wykonywana przez Kasię, zwiększa lub zmniejsza ową sumę o 4. A zatem niezależnie od wykonywanej operacji, reszta z dzielenia przez 4 sumy liczb wpisanych w poszczególne pola jest taka sama. Skoro początkowo wynosi ona 1, to również w momencie, w którym wszystkie pola byłyby równe 11, suma ta musiałaby dawać resztę 1. Wówczas wynosi ona jednak $11 + 11 + 11 + \ldots + 11 = 99$. Liczba 99 daje natomiast resztę 3 z dzielenia przez 4. ■

Problem aż się prosi o dalsze rozważenie. Czy jest możliwe, aby zamiast 11 jakaś inna liczba pojawiła się jako jedyna w powyższej tabeli? Gdyby taka liczba była równa n, to wiemy już, że n musi dawać resztę 1 z dzielenia przez 4. Używając pewnych dodatkowych sprytnych obserwacji można łatwo oszacować wartość n.

Zauważmy, że jeśli pokolorujemy tablicę jak szachownicę (naprzemiennie na biało i czarno), wówczas oznaczając przez C sumę pól w polach czarnych oraz przez S sumę pól w polach białych widzimy, że przy wykonywanej przez nas operacji liczba $C - S$ nie ulega zmianie. Nie wiemy jak wpisane zostały liczby, ale mamy taki sprytny niezmiennik. Wiemy też, że mamy 4 pola jednego koloru i 5 pól drugiego koloru. Możemy zatem wykonać szacowanie:

$$C - S \leqslant 9 + 8 + 7 + 6 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 25.$$

Zauważmy, że jeśli w pewnym momencie w tabeli pojawi się jedynie liczba n, to mamy $C - S = 5n - 4n = n$. A zatem widzimy, że n może być (nie musi) jedną z liczb $5, 9, 13, 17, 21, 25$. Dobierając odpowiednio kolorowanie można jeszcze to szacowanie poprawić. Gdyby natomiast liczby $1, 2, \ldots, 9$ były wpisane w tabelę „po kolei", wówczas od razu uzyskujemy $C - S = \pm 5$. Czy n może być równe 5? To pytanie zostawiam Czytelnikowi.

Przyjrzymy się teraz zadaniu, w którym będzie jasne, że konieczne jest wykorzystanie reszt z dzielenia przez 4, ale potrzeba będzie sprytnej operacji podziału większego problemu na mniejsze, pozwalającej na ich policzenie.

Zadanie 10. *Pola szachownicy rozmiaru 10×10 wypełniono liczbami naturalnymi od 1 do 100, przy czym w każde pole wpisano inną liczbę. Powiemy, że dwa pola szachownicy są sąsiadujące, jeżeli posiadają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Wykaż, że suma liczb wpisanych w pewną parę sąsiadujących pól jest podzielna przez 4.*

Rozwiązanie. Załóżmy przeciwnie. Dzielimy szachownicę na 25 kwadratów 2×2. Zauważmy, że jeśli warunek zadania nie jest spełniony, to:

- każdy z tych kwadratów zawiera co najwyżej jedną liczbę podzielną przez 4,
- każdy z tych kwadratów zawiera co najwyżej jedną liczbę dającą przy dzieleniu przez 4 resztę 2.

Zauważmy jednak, że wśród liczb całkowitych od 1 do 16 mamy 25 liczb podzielnych przez 4 oraz 4 liczby, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 2. To oznacza, że w każdym z 25 kwadratów 2×2 mamy dokładnie po jednej takiej liczbie. Aby pozostałe dwie liczby w każdym z kwadratów nie sumowały się do liczby podzielnej przez 4 konieczne jest, aby w każdym kwadracie 2×2 były dwie liczby dające resztę 1 lub dwie liczby dające resztę 3 z dzielenia przez 4. To by jednak oznaczało, że wśród liczb całkowitych od 1 do 100 jest parzyście wiele liczb dających resztę 1 (lub 3 z dzielenia przez 4), co jest nieprawdą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że warunek zadania jest spełniony.
■

Po zapoznaniu się z przykładami zadań, w których reszty z dzielenia występuję w charakterze niezmienników przejdziemy do reszt z dzielenia sum i iloczynów. Następujące stwierdzenie przyjmujemy za znane, przy czym dowód zamieszczony jest na końcu referatu.

Twierdzenie 2. *Niech r, s będą resztami z dzielenia liczb n oraz m przez liczbę całkowitą dodatnią k. Wówczas:*

(i) liczba $n - m$ jest podzielna przez k wtedy i tylko wtedy, gdy reszty r oraz s są równe,

(ii) reszta z dzielenia liczby $n + m$ przez k jest taka sama jak reszta z dzielenia liczby $r + s$ przez k,

(iii) reszta z dzielenia liczby $n \cdot m$ przez k jest taka sama, jak reszta z dzielenia liczby $r \cdot s$ przez k.

Fakt ten, będący podstawą teorii kongruencji, wykorzystamy w rozumowaniach, gdzie stosuje się go w sposób niemal intuicyjny (do tego stopnia, że nie jest konieczne wprowadzanie osobnej notacji).

Zadanie 11. *Uzasadnij, że liczba $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2022}$ nie jest podzielna przez 10.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30.$$

Co więcej, dla każdego n naturalnego mamy:

$$2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4} = 2^n(2 + 4 + 8 + 16) = 30 \cdot 2^n.$$

A zatem dowolne cztery kolejne składniki rozważanej przez nas sumy są zawsze podzielne przez 10. Możemy całą sumę podzielić na składniki zawierające sumy czterech składników, poza pierwszymi dwoma składnikami:

$$2+2^2+(2^3+2^4+2^5+2^6)+(2^7+2^8+2^9+2^{10})+\ldots+(2^{2019}+2^{2020}+2^{2021}+2^{2022}).$$

Składniki występujące w nawiasach są liczbami podzielnymi przez 10. A zatem cyfra jedności rozważanej sumy jest taka sama, jak cyfra jedności liczby $2+2^2=6$. Zgodnie z cechą dzielenia przez 10, wyjściowa suma nie jest podzielna przez 10. ■

Powyższe zadanie reprezentuje szeroką listę intuicyjnych dla uczniów zagadnień związanych ze znajdowaniem cyfry jedności liczby naturalnej, w szczególności związanych ze znajdowaniem cyfr jedności potęg liczb naturalnych. Korzystamy w tych zadaniach z obserwacji, które w zasadzie sprowadzają się do stosowania algorytmów dodawania i mnożenia pisemnego. Biorąc jednak pod uwagę, że cyfra jedności liczby naturalnej jest jednocześnie resztą z dzielenia tej liczby przez 10, a także fakt, że nie zajmujemy się w naszych rozważaniach szerszej kongruencjami, warto uwzględnić to zadanie w naszym zestawie. Czytelnika zainteresowanego elementarnym przykładami tego rodzaju odsyłam ponownie do książki *Matematyczne gwiazdki*, tym razem do zadań 159-173.

Zadanie 12. *Wykaż, że spośród pięciu dowolnych liczb naturalnych można wskazać trzy o sumie podzielnej przez* 3.

Rozwiązanie. Zauważmy, że zachodzi jedna z dwóch sytuacji:

- pewne trzy z pięciu rozważanych liczb dają taką resztę z dzielenia przez 3,
- pewne trzy z pięciu rozważanych liczb dają parami różne reszty z dzielenia przez 3.

Co by się bowiem stało, gdyby żadna z tych sytuacji nie miała miejsca? Wówczas wszystkie z pięciu liczb musiałyby dawać jedną z dwóch reszt z dzielenia przez 3. Przy pięciu liczbach co najmniej 3 musiałyby wówczas dawać taką samą resztę, co jest wykluczone.

W pierwszym przypadku suma trzech jednakowych reszt jest po prostu trzykrotnością tej reszty i jest podzielna przez 3. A zatem także suma trzech liczb dających jednakową resztę z dzielenia przez 3 jest podzielna przez 3. W drugim przypadku mamy liczby dające trzy różne reszty z dzielenia przez 3, czyli reszty $0, 1, 2$. Suma tych reszt jest również podzielna przez 3. ■

Powyższe zadanie było prostym przykładem użycia tzw. zasady szufladkowej Dirichleta w kontekście reszt z dzielenia. Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu, pochodzącemu z pierwszej OMG.

Zadanie 13. *Danych jest* 111 *liczb naturalnych. Wykaż, że spośród nich można wybrać* 11 *takich liczb, których suma jest podzielna przez* 11.

Rozwiązanie. Jak wiemy przy dzieleniu przez 11 mamy 11 możliwych reszt. Patrząc więc na nasze 111 liczb przez „okulary modulo 11” widzimy, że wśród reszt z dzielenia tych liczb przez 11 pewna reszta musi wystąpić 11 razy. Gdyby bowiem każda reszta występowała mniej niż 11 razy, wówczas wszystkich liczb byłoby nie więcej niż $11 \cdot 10 = 110$.

Nazwijmy przez r resztę z dzielenia przez jedenastu pewnych 11 ze 111 rozważanych liczb. Twierdzimy, że suma tych 11 liczb jest podzielna przez 11. Wobec drugiego punktu Twierdzenia 2 widzimy, że reszta z dzielenia przez 11 sumy jedenastu liczb dających powyższą resztę r równa jest reszcie, jaką suma ich reszt, czyli $11r$ daje przy dzieleniu przez 11. Jest to oczywiście reszta 0, więc suma wskazanych jedenaście liczb o reszcie r jest podzielna przez 11. ■

Zadanie 14. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr* 0 *i* 1.

Rozwiązanie. To zadanie z dość zaskakującą tezą to następny klasyk, tym razem jednak związany z podzielnością przez dowolną liczbę całkowitą dodatnią. Przyjmijmy, że liczba, której wielokrotności szukamy jest równa n. Rozważmy reszty z dzielenia przez n liczb:

$$1, \quad 11, \quad 111, \quad 1111, \quad \ldots, \quad \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ cyfr}}.$$

Zauważmy, że wśród $n+1$ tych liczb pewne dwie muszą dawać tą samą resztę z dzielenia przez n. Które dwie? Nie ma to w istocie znaczenia. Interesuje nas jednak po prostu skorzystanie z pierwszego punktu Twierdzenia 2. Mianowicie skoro dwie liczby dają taką samą resztę z dzielenia przez n, to ich różnica jest podzielna przez n. Patrząc na liczby wymienione wyżej widzimy tymczasem, że różnica tych liczb („większa – mniejsza”), jest liczbą, w której rozwinięciu dziesiętnym są jedynie jedynki i zera.

Dla przykładu, dla $n = 7$ liczby 1 oraz 1111111 dają resztę 1 z dzielenia przez 7, a ich różnica: 1111110 jest podzielna przez 7. ■

Zobaczymy później jeszcze jedno zadanie tego typu, a po wiele niezwykle ciekawych przykładów typu podobnego do dwóch powyższych zadań, odsyłam do artykułu Joanny Jaszuńskiej pt. *Szufladki i reszty z dzielenia* z Gazetki OMJ „Kwadrat”, dostępnego pod adresem `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-06-kolor.pdf`.

Zadanie 15. *Wykaż, że co najmniej jedna z liczb naturalnych $a, b, a+b$ jest liczbą nieparzystą lub jest podzielna przez 4.*

Rozwiązanie. Jeśli którąś z liczb $a, b, a+b$ jest nieparzysta, to zadanie jest rozwiązane. Załóżmy, że wszystkie liczby $a, b, a+b$ są parzyste. Wówczas liczby te dają jedynie reszty 0 lub 2 z dzielenia przez 4. Jedna z nich musi jednak dawać resztę 0 z dzielenia przez 4. Jeśli bowiem ani a, ani b nie jest podzielna przez 4, to $a+b$ daje taką samą resztę z dzielenia przez 4, co suma reszt $2+2$ z dzielenia a oraz b przez 4, co kończy rozwiązanie. ■

Zadanie 16. *Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n(n^2+5)$ jest podzielna przez 6.*

Rozwiązanie. Badamy tym razem podzielność przez liczbę złożoną. Trzeba zatem wykazać, że $n(n^2+5)$ jest podzielna zarówno przez 2, jak i przez 3.

Parzystość rozważanego iloczynu nie powinna budzić wątpliwości. Rozważamy dwa przypadki.

- Gdy n jest parzysta, wówczas oczywiście $n(n^2+5)$ również jest parzysta, bo iloczyn liczby parzystej przez dowolną liczbą całkowitą jest liczbą parzystą.
- Gdy n jest liczbą nieparzystą, wówczas jej kwadrat – też. Liczba n^2+5 jest zatem parzysta. Stąd iloczyn $n(n^2+5)$ również w tym przypadku jest liczbą parzystą.

Aby zbadać podzielność przez 3 postąpimy bardzo podobnie: problem sprowadzi się do określenia jaką resztę z dzielenia przez 3 daje wyrażenie n^2+5. Znowu mamy dwa przypadki.

- Gdy n jest podzielne przez 3, wtedy oczywiście także iloczyn $n(n^2+5)$ jest podzielny przez 3.
- Gdy zaś n nie jest podzielne przez 3, wówczas (Zadanie 4) liczba n^2 daje resztę 1 z dzielenie przez 3. Liczba n^2+5 jest zawsze podzielna przez 3.

■

Zadanie 17. *Wykaż, że równanie $15x^2 - 7y^2 = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że niezależnie od wyboru liczb całkowitych x, y lewa strona rozważanego równania nie daje reszty 1 z dzielenia przez 3, co oznacza, że powyższe równanie nie ma rozwiązań. Rzeczywiście:

$$15x^2 - 7y^2 = (15x^2 - 9y^2) + 2y^2 = 3(5x^2 - 3y^2) + 2y^2.$$

Ponownie korzystamy z Zadania 4 i stwierdzamy, że liczba $2y^2$ daje resztę 0 lub 2 z dzielenia przez 3, a zatem całe wyrażenie $15x^2 - 7y^2$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 2. Nie może być ono zatem równe 1. ■

Zadań bardzo podobnych do powyższego, stosujących podobną technikę, jest bardzo wiele. Zainteresowanego Czytelnika odsyłam do tekstu Łukasza Bożyka z Gazetki OMJ „Kwadrat” pt. *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta.*

Kolejne zadanie dotyczy popularnej własności liczb pierwszych. Jest ona na pierwszy rzut oka nieco dziwna, jednak w świetle rozważań wyżej jej uzasadnienie nie powinno być problemem.

Zadanie 18. *Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, ze liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.*

Rozwiązanie. Podzielność przez 24 wymaga jednoczesnej podzielności przez 3 i przez 8.

Zacznijmy od podzielności przez 3. Wiemy, że $p > 3$ jest liczbą pierwszą, a zatem nie jest to liczba podzielna przez 3, ale daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 lub 2. Reszta z dzielenia p^2 przez 3 musi być zatem równa 1 (Zadanie 4). Różnica $p^2 - 1$ jest zatem podzielna przez 3.

Aby rozwiązać problem podzielności przez 8 możemy przyjrzeć się jakie reszty dają kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8: Zróbmy tabelkę reszt z dzielenia n^2 przez 8 w zależności od reszty z dzielenia n przez 8:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Który z powyższych przypadków możemy zaaplikować w sytuacji, gdy $p > 3$ jest liczbą pierwszą? Tylko ten, gdy jest to liczba nieparzysta. Oznacza to, że p^2 daje (jako liczba nieparzysta) resztę 1 przy dzieleniu przez 8. Zatem $p^2 - 1$ jest liczbą podzielną przez 8. ∎

Alternatywne i być może bardziej naturalne rozwiązanie korzysta ze wzorów skróconego mnożenia. Mamy

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1).$$

Wiedząc, że p jest liczbą nieparzystą i niepodzielną przez 3 widzimy, że jedna z liczb $p-1$ lub $p+1$ jest podzielna przez 3 oraz, że obydwie liczby $p-1$ oraz $p+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi. Ich iloczyn jest więc podzielny przez 8, bo jedna z nich musi być wielokrotnością liczby 4.

Zadanie 19. *Liczby pierwsze a, b, c są większe od 3. Wykaż, że liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest podzielna przez 48.*

Rozwiązanie. To klasyczne zadanie z OMJ jest pięknym przykładem zastosowania zasady szufladkowej w połączeniu z wykorzystaniem warunku mówiącego, że liczba pierwsza jest nieparzysta i niepodzielna przez 3.

Z warunków zadania wynika, że liczby a, b, c są nieparzyste i niepodzielne przez 3. W szczególności liczby te mogą dawać tylko reszty 1 i 3 przy dzieleniu przez 4 oraz tylko reszty 1 i 2 przy dzieleniu przez 3. Ponieważ pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, więc co najmniej jedna z liczb $a-b, b-c, c-a$ jest podzielna przez 3. To oznacza, że iloczyn $(a - b)(b - c)(c - a)$ jest liczbą podzielną przez 3.

Podobnie, ponieważ pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4, więc pewna spośród liczb $a - b, b - c, c - a$ jest podzielna przez 4. Ponadto wszystkie te liczby są parzyste, więc każda z pozostałych dwóch liczb jest podzielna przez 2. W konsekwencji iloczyn $(a - b)(b - c)(c - a)$ jest liczbą podzielną przez $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Ponieważ liczby 3 i 16 są względnie pierwsze, więc łącząc uzyskane wnioski, otrzymujemy, że liczba $(a - b)(b - c)(c - a)$ jest podzielna przez 48. ∎

Zadanie 20. *Wykaż, że nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że liczba 2^n jest dzielnikiem liczby $3^n + 1$.*

Rozwiązanie. Czasami w zadaniach powyższego typu warto pamiętać o zasadzie: dzielnik dzielnika jest dzielnikiem i zastanawiać się czy potencjalny dzielnik 2^n liczby $3^n + 1$ nie ma przypadkiem dzielnika, którego $3^n + 1$ mieć nie może? Liczby 2^n mają dzielniki będące jedynie potęgami liczby 2. Jak się okazuje $3^n + 1$ takich dzielników za wielu nie ma.

Dla $n > 2$ liczba 2^n jest podzielna przez 8. Natomiast liczba 3^n daje przy dzieleniu przez 8 reszty 1 lub 3. Czy umiemy to pokazać? Wystarczy zauważyć, że dla $n \geqslant 2$ mamy $3^n = 3^{n-2} \cdot 9 = 8 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-2}$. Liczba 9 daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1. Zgodnie więc z Twierdzeniem 2, liczby 3^n oraz 3^{n-2} dają takie same reszty z dzielenia przez 8. Oznacza to, że dla n parzystego liczba 3^n daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1, natomiast dla n nieparzystego liczba 3^n daje przy dzieleniu przez 8 resztę 3.

Dla naszego zadania wynika stąd następujący wniosek: $3^n + 1$ daje przy dzieleniu przez 8 resztę 2 lub 4, nie zaś 0. W rezultacie dla $n > 2$ liczba 2^n nie jest dzielnikiem $3^n + 1$. Wystarczy teraz dodać, że dla $n = 2$ liczba 2^n wynosi 4, a liczba $3^n + 1$ wynosi 10. A zatem także dla $n = 2$ liczba 2^n nie jest dzielnikiem $3^n + 1$. ∎

Zadanie 21. *Danych jest sześć kolejnych liczb naturalnych, przy czym najmniejsza z nich nie jest podzielna przez* 5. *Czy można wskazać w tym zbiorze trzy liczby takie, że ich iloczyn równy jest iloczynowi pozostałych trzech?*

Rozwiązanie. Rozważane zadanie jest szczególnym przypadkiem problemu postawionego na jednej z pierwszych międzynarodowych olimpiad matematycznych. Oryginalne zadanie nie zawiera założenia, że najmniejsza z sześciu kolejnych liczb całkowitych nie jest podzielna przez 5. Zacznijmy od rozwiązania tego wariantu.

Nazwijmy nasze liczby $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$. Zauważmy, że wśród nich jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 5. Rzeczywiście, co najmniej jedna z kolejnych sześciu liczb całkowitych musi być podzielna przez 5. Gdyby jednak były w tym zbiorze aż dwie kolejne wielokrotności 5, to ich różnica byłaby równa 5. A zatem byłyby to liczby n oraz $n+5$. Wykluczyliśmy jednak, że n jest podzielne przez 5, co dowodzi prawdziwości naszej obserwacji.

Niech jedyna z liczb $n+1, n+2, n+3, n+4$, która jest podzielna przez 5, będzie nazwana x. Odpowiedź na pytanie postawione w naszym zadaniu była pozytywna i mielibyśmy równość $abc = def$, gdzie a, b, c, d, e, f to po uporządkowaniu liczby $n, n+1, \ldots, n+5$, wówczas x byłby jedną z tych liczb i iloczyn trzech liczb, wśród których jest x, byłby podzielny przez 5, zaś iloczyn pozostałych trzech liczb – niepodzielnych przez 5 – sam byłby przez 5 niepodzielny. Rzeczywiście, rozkład na czynniki pierwsze iloczynu trzech liczb niepodzielnych przez 5 zawiera jedynie dzielniki pierwsze tych czynników, wśród których nie ma 5. Dostajemy sprzeczność.

Alternatywną drogą jest skorzystanie z trzeciej części Twierdzenia 2 i zauważenie, że zamiast rozważać iloczyny trzech liczb i sprawdzać, że nie mogą być równe, możemy sprawdzać iloczyny reszt z dzielenia tych trójek liczb przez 5. Są to reszty $0, 1, 2, 3, 4, r$, gdzie r jest różna od zera, bo n nie jest podzielne przez 5. Nietrudno widzieć, że w tym zbiorze iloczyn trzech niezerowych liczb nie może być podzielny przez 5. ■

Czy Czytelnik widzi teraz jak wygląda rozwiązanie oryginalnego zadania? Jest ono nieco trudniejsze, gdy n jest podzielne przez 5. Oto jedna z dróg jego rozwiązania. Zauważmy, że wśród wypisanych liczb są dokładnie trzy liczby nieparzyste, niezależnie od parzystości n. Przyjrzyjmy się tym liczbom. Wśród tych liczb nieparzystych jest co najwyżej jedna podzielna przez 3 (dwie nieparzyste liczby podzielne przez 3 są odległe o 6) i co najwyżej jedna podzielna przez 5. A zatem jedna z trzech wypisanych liczb nieparzystych nie jest podzielna ani przez 3, ani przez 5. Nazwijmy tą liczbę x. Twierdzimy, że jeśli warunek zadania ma być spełniony, musimy mieć $x = 1$.

Przypuśćmy, wbrew naszym podejrzeniom, że jako liczba nieparzysta x ma dzielnik pierwszy p większy od 5. Rozważmy dla przykładu liczbę $p = 7$. Rozumowanie dla większych liczb pierwszych jest analogiczne. Poza x żadna z liczb $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ nie jest podzielna przez 7, bo dwie liczby podzielne przez 7 są odległe o nie mniej niż 7. A zatem iloczyn trzech z powyższych liczb, wśród których nie ma liczby x, nie posiada w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 7, bo żaden jego czynnik nie jest podzielny przez 7. Natomiast iloczyn trzech liczb, które zawierają x jest podzielny przez 7. Liczba całkowita podzielna przez 7 nie może być równa liczbie niepodzielnej przez 7, więc widzimy, że jeśli ma być spełniony warunek o równości iloczynów – żadna z liczb $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ nie może być podzielna przez 7. Podobnie jest dla każdej liczby pierwszej $p > 7$ (to jest dokładnie argument, który używaliśmy w rozwiązaniu wyżej).

W rezultacie, jeśli spełnione mają być warunki zadania, to liczba x jest nieparzysta i niepodzielna przez żadną liczbę pierwszą. Stąd $x = 1$ i cały rozważany zbiór to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jednak ten zbiór nie spełnia warunków zadania, ponieważ posiada tylko jedną liczbę podzielną przez 5.

* * *

Na zakończenie podamy uzasadnienie Twierdzenia 2. Musimy wysłowić warunek zadania w algebraicznej postaci $n = xk + r, m = yk + s$, gdzie x, y są całkowite oraz $0 \leqslant r, s < k$. Zwróćmy uwagę na strukturę logiczną zdania w punkcie (i). Mamy w nim do czynienia z równoważnością, Aby ją uzasadnić trzeba wykazać dwie obserwacje:

- jeśli $r = s$, to $n - m$ jest podzielne przez k,
- jeśli $n - m$ jest podzielna przez k, to reszty z dzielenia n oraz m przez k są równe.

Przechodzimy do dowodu.

- Zacznijmy od założenia, że $r = s$. Wówczas:

$$n - m = xk + r - (yk + r) = (x - y)k,$$

a zatem różnica $n - m$ jest wielokrotnością liczby k.

- Odwrotnie, załóżmy, że $n - m$ jest liczbą podzielną przez k. Mamy $r \geqslant s$ lub $r \leqslant s$. Załóżmy, że $r \geqslant s$ (bez straty ogólności). Wówczas:

$$n - m = (x - y)k + r - s,$$

gdzie $k > r - s \geqslant 0$. Liczba $r - s$ jest zatem resztą z dzielenia $n - m$ przez k. Korzystamy tu z Twierdzenia 1 o dzieleniu z resztą – tu leży „delikatność" tego rozumowania – liczba jest $r - s$ jest nieujemna i mniejsza od k, więc jest resztą. A zatem w naszej sytuacji $r - s = 0$, bo zakładaliśmy, że $n - m$ jest podzielne przez k. Analogicznie rozumujemy dla $r \leqslant s$.

- Dowodzimy pozostałe punkty. Mamy:

$$n + m = (x + y)k + r + s, \quad n \cdot m = (xk + r)(yk + s) = (xy + x + y)k + rs.$$

Widzimy, że $n + m - r - s$ oraz $nm - rs$ są liczbami podzielnymi przez k. Zatem korzystając z poprzedniego punktu (implikacji odwrotnej!) dostajemy tezę.

Literatura

1. J. Bednarczuk,. J. Bednarczuk, *Matematyczne gwiazdki*, Wydawnictwo „Aksjomat" 2019.
2. Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Koło matematyczne w gimnazjum*, Wydawnictwo „Aksjomat" 2010.
3. Ł. Bożyk, *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta*, Gazetka OMJ „Kwadrat" nr 7, `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-07-kolor.pdf`.
4. B. Bzdęga, *Gdy zadaniu nie podołasz, to załatwi je niezmiennik*, czasopismo „Delta", sierpień 2019, `http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2019/07/31/2019-08-delta-kpo.pdf`.
5. P. Domagalska, *Metoda niezmienników i półniezmienników*, Konferencja SEM 2009, `https://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-2009/materialy/domagalska.pdf`.
6. J. Jaszuńska, *Szufladki i reszty z dzielenia*, Gazetka OMJ „Kwadrat" nr 6, `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-06-kolor.pdf`.