O stopniu przestępnym

Wprowadzenie

Celem tego referatu jest opowiedzenie o kilku próbach uogólnienia pojęcia stopnia przestępnego rozszerzenia ciał na przypadek pierścieni nieprzemiennych; o pewnych motywacjach i nowych wynikach, które się z tym wiążą. W przypadku przemiennym przez stopień przestępny rozszerzenia ciał $K \subseteq L$, ozn. $trdeg_K(L)$, rozumieliśmy moc największego podzbioru elementów ciała L algebraicznie niezależnych nad $\mathbb{K}$. Pojęcie to ma mnóstwo zastosowań w świecie przemiennym, nie tylko w teorii pierścieni, ale w teorii liczb czy geometrii algebraicznej. Najbardziej podstawową motywacją, wspólną dla wielu ugólnień tego typu, jest zatem poszukiwanie odpowiedników tych faktów w świecie nieprzemiennym.

W przypadku nieprzemiennego stopnia przestępnego motywacje związane były od początku w dużej mierze z badaniem algebr z dzieleniem. Pierwszy nieprzemienny stopień przestępny pojawił się w pracy Gelfanda i Kiryłowa z lat 60', w której udowodnili, że algebry Weyla A_n są parami nieizomorficzne. Wprowadzono wówczas dwa niezmienniki algebr. Pierwszy, nazwany później wymiarem Gelfanda-Kiryłowa był dalekim odpowiednikiem przemiennego wymiaru Krulla. Drugi natomiast był dalekim odpowiednikiem stopnia przestępnego, definiowanym dla dowolnej algebry. Miał on tę zaletę, że w przeciwieństwie do wymiaru GK nie przyrastał gwałtownie przy niecentralnych lokalizacjach dzięki czemu za jego pomocą odróżniono pieścienie klasycznych ułamków algebr Weyla. Istotną tych ułaków jest to, że są nieskończenie wymiarowe nad swoim centrum, a więc nie są PI, a nawet więcej – można w nie włożyć algebrę wolną (tw. Makara-Limanova), a więc wymiar $Gkdim(D_n) = \infty$. Ułamki te są zatem dość sporym pierścieniem, choć z punktu widzenia współczesnej wiedzy o algebrach z dzieleniem nie jest to jeszcze pierścień zupełnie nieprzystępny badaniom. W 1979 roku, doktorant Smalla, Resco, opublikował następujący wynik:

Twierdzenie 1 (Resco) *Niech D będzie pierścieniem z dzieleniem nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz niech $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ będzie ciałem funkcji wymiernych n zmiennych nad $\mathbb{K}$. Jeśli D zawiera maksymalne podciało, którego stopień przestępny nad $\mathbb{K}$ wynosi przynajmniej n, wówczas $D \otimes_k k(x_1, \ldots, x_n)$ jest prostą noetherowską dziedziną, w której wymiar Krulla (modułowy) i wymiar globalny równe są n.*

Idea tego twierdzenia jest następująca. Jeśli chcemy dowiedzieć się czegoś o strukturze algebry z dzieleniem warto jest zwrócić uwagę na pewne pierścienie zawierające D. Dość zaskakującym wnioskiem z tego faktu była możliwość szacowania stopnia przestępnego podciał maksymalnych pewnych algebr z dzieleniem będących ułamkami znanych dziedzin noetherowskich. W szczególności z wyniku Resco wynikał następujący wniosek.

Wniosek 1 *W pierścieniu ułamków klasycznych D_n algebry Weyla A_n każde maksymalne podciało ma stopnień przestępny nad $Z(D_n)$ równy co najwyżej n, a więc równy co najwyżej $GKdim(A_n)$.*

Podobnego rodzaju rezultaty zaczęły pojawiać się innych algebr z dzieleniem, zwykle w następującym kontekście: bierzemy algebrę noetherowską skończonego wymiaru GK i i przyglądamy się ułamkom tych algebr i ich podciałom. Stafford w 1983 roku napisał sporą pracę o pierścieniach ułamków $D(G)$ algebr grupowych $\mathbb{K}G$ beztorsyjnych prawie policyklicznych grup, obliczając m.in. wymiary Krulla pierścienia $D(G)^{op} \otimes D(G)$ (równy randze Hirscha G).

Wracając do kontekstu podciał: rozmaite cząstkowe wyniki pokazywały, że wymiar GK tych algebr jest niemniejszy od stopni podciał ułamków nad centrum. Co więcej, jako że równości uzyskiwano tylko w przypadku gdy $Q(A)$ miało skończony wymiar nad swoim centrum, a więc jedynie dla PI-algebr.
W 1996 roku Small sformułował następującą hipotezę:

Problem 1 *Niech A będzie skończenie generowaną dziedziną Orego nie spełniającą tożsamości wielomianowych. Wówczas jeśli F jest przemienną podalgebrą w $Q(A)$, to*

$$GKdim(F) \leqslant GKdim(A) - 1.$$

Hipoteza ta odnosiła się jedynie do pierścieni, które nie spełniają tożsamości wielomianowej mówiąc między innymi, że ich ułamki nie mają za „dużych podciał'. Przypuszczenie to zostało potwierdzona przez Bella w poprzednim roku, po ponad 10 latach ataków.

Dziedziny wymiaru 2 i pierścienie z dzieleniem

Droga do uzyskania tego wyniku wiedzie przez dwie modyfikacje wymiaru przestępnego Gelfanda-Kiryłowa, o których opowiemy dalej. Powiedzmy jeszcze o jednej ważnej sprawie motywującej ważność tej hipotezy.

Problem Smalla ma istotny związek z klasyfikacją skończenie generowanych dziedzin o niskich wymiarach Gelfanda-Kiryłowa nad ciałem algebraicznie domkniętym. Wiadomo jakie są takie dziedziny dla wymiarów 0 i 1(ciało, przemienne). Na podstawie tw. Bergmana następnym istotnym krokiem jest wymiar 2. I to jest bardzo trudne. Pytanie więc: czy możemy klasyfikować choćby ułamki (a więc pierścienie z dzieleniem) dziedzin wymiaru 2? I tu szybko dochodzimy do związków z hipotezą Smalla. Bardzo istotny przykład związany z tą hipotezą z pracy Artina i Stafforda z 1995 roku:

Twierdzenie 2 *Jeśli A jest skończenie generowaną dziedziną nad ciałem F oraz $GKdim(A) = 2$, to $Q(A) \simeq K(x, \sigma)$, gdzie K jest skończenie generowanym ciałem nad F oraz $trdeg_K(F) = 1$.*

Zhang pokazał, że jeśli wezmę pierscień z dzieleniem postaci $D = F(x, \sigma)$, to hipoteza Smalla jest dla niego spełniona. Trudność, mówiąc intuicyjnie leżała w tym, żeby bycie postaci $F(x, \sigma)$ zastąpić byciem nieskończenie wymiarową (np. z lewej strony) nad ciałem F i jednocześnie być skończenie generowanym jako algebra z dzieleniem. Subtelność polegała na tym, że trudno jest rozróżnić pojęcia bycia skończonego wymiaru nad ciałem i bycia algebraicznym nad cailem, tzn.

Definicja 1 *Niech D będzie algebrą z dzieleniem i niech K będzie podciałem D. Powiemy, że D jest algebraiczne nad K jeśli dla każdego $x \in D$ mamy równanie postaci:*

$$x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_0 = 0,$$

dla pewnych $\beta_i \in K$.

Twierdzenie 3 (Bell, Zhang?) *Jeśli A jest dziedziną wymiaru GK d skończenie generowaną nad ciałem K oraz F jest podciałem ułamków $Q(A)$ algebry A oraz $Q(A)$ nie jest lewostronnie algebraiczne nad F, to wymiar przestępny F wynosi co najwyżej $d - 1$.*

Pytanie brzmi: czy wiemy kiedy $Q(A)$ nie jest lewostronnie algebraiczne nad ciałem F? Odpowiedź przynosi tw. Poincare-Birkhoffa-Witta. Mówimy, ze algebra ma PWB bazę jeśli istnieją $x_1, \ldots, x_d \in A$ takie, że $\{x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d} \mid i_1, \ldots, i_d \geqslant 0\}$ jest bazą A.

Twierdzenie 4 *Jeśli A ma PWB bazę, to $Q(A)$ jest lewostronnie algebraiczne nad ciałem F wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(A)$ jest skończenie wymiarowa nad F.*

W szczególności hipoteza Smalla zachodzi dla takich algebr. W związku z tym jest też pytanie otwarte:

Problem 2 *Czy jeśli $Q(A)$ jest lewostronnie algebraiczne nad swoim podciałem K, to jest też algebraiczne nad swoim centrum?*

Definicja Tdeg. Podstawowe własności

Zacznijmy od stopnia przestępnego wprowadzonego przez Gelfanda-Kiryłowa. Ustalmy najpierw oznaczenia. Niech A będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$. Rozważać będziemy często skończenie wymiarowe podprzestrzenie liniowe algebr. Konwencja jest taka, że zakładamy, że zawierają one jedynkę algebry. Jeśli $S \subseteq A$, to przez $\mathbb{K}[S]$ rozumiemy najmniejszą $\mathbb{K}$-algebrę generowaną przez elementy zbioru S.

Definicja 2 *Wymiarem Gelfanda-Kiryłowa algebry A nazywamy liczbę:*

$$GKdim(A) = \sup_V \overline{\lim} \log_n \dim_{\mathbb{K}}(V^n),$$

gdzie V jest skończenie wymiarową podprzestrzenią w A oraz $\mathbb{K}[V] = 1$, zaś stopniem przestępnym GK algebry A nazywamy liczbę:

$$Tdeg(A) = \sup_V \inf_b GKdim(\mathbb{K}[bV]),$$

gdzie V jest, jak wyżej, skończenie wymiarową podprzestrzenią A, zaś b jest elementem regularnym w A. Jeśli A jest dziedziną to b przebiega przez wszystkie niezerowe elementy A.

Warto krótko powiedzieć o podstawowych własnościach $Tdeg$ oraz wyjaśnić dlaczego niezmiennik nie został ostatecznie przyjęty jako satysfakcjonujący odpowiednik stopnia przestępnego w przypadku przemiennym. Z definicji jest jasne, że:

- $Tdeg$ przyjmuje wartości $0, 1 \geqslant 2$
- $Tdeg(A) \leqslant GKdim(A)$

Następne dwa rezultaty są również niemal oczywiste.

- $Tdeg(A) = Tdeg(A^{op})$
- Jeśli A jest algebrą przemienną to $Tdeg(A) = GKdim(A)$. (Ogólniej równość zachodzi dla pierwszych PI algebr).

Dowód. Obydwa punkty są jasne. Pierwszy w bezpośrednio z faktu, że $\mathbb{K}[bV] \simeq \mathbb{K}[Vb]$, dla dowolnej podprzestrzeni skończenie wymiarowej V algebry A. Jeśli $\{1, v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą V to przyporządkowanie $bv_i \mapsto v_i b$ rozszerza się do izomorfizmu $\mathbb{K}[bV] \to \mathbb{K}[Vb]$. W drugim punkcie należy dowieść tyle, że $GKdim(\mathbb{K}[bV]) \geqslant GKdim(\mathbb{K}[V])$, dla wszystkich elementów regularnych b w A. Z regularności b wiadomo jednak, że:

$$\dim((\mathbb{K} + bV)^n) \geqslant \dim((bV)^n) = dim(b^n V^n) = dim(V^n),$$

zatem $GKdim(\mathbb{K}[bV]) \geqslant GKdim(\mathbb{K}[V])$. W szczególności skoro $GKdim(A) = \sup_V GKdim(\mathbb{K}[V])$, to $Gkdim(A) = Tdeg(A)$. Gdy A jest ciałem, to wiadomo, że $GKdim(A) = trdeg_{\mathbb{K}}(A)$. ■

Można wskazać dość łatwo przykłady algebr, w których jest ostra nierówność $Tdeg(A) < GKdim(A)$ przykładem jest lokalizacja algebry $A_1 = \mathbb{K}\langle x, y\rangle/(xy - yx = 1)$ względem zbioru Orego generowanego przez elementy $\{yx - m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Można pokazać, że jest to zbiór Orego i $GKdim(S^{-1}A_1) = 3$, ale $Tdeg(S^{-1}A_1) = GKdim(A_1) = 2$. Fakt, że zachodzi druga równość pokażemy dalej.

Przejście do poalgebry

Jedną z podstawowych własności przemiennego stopnia przestępnego jest fakt, że jest on monotoniczny na branie podciał. Nie jest jednak wiadomo czy $Tdeg(B) \leqslant Tdeg(D)$ dla dowolnej podalgebry z dzieleniem B algebry z dzieleniem D. Łatwo pokazać, że nierówność taka nie zachodzi w przypadku przejścia do dowolnej podalgebry, ponieważ $Tdeg(\mathbb{K}\langle x, y\rangle) = \infty$, ponieważ jeśli wezmę $B = \mathbb{K} + \mathbb{K}\,x + \mathbb{K}\,y$, to dla każdego niezerowego elementu b w tym pierścieniu $\mathbb{K}[bV] \supseteq \mathbb{K}[bx, by]$. Ten ostatni pierścieni jest natomiast izomorficzny z $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, a więc $GKdim(\mathbb{K}[bV]) = \infty$, dla każdego niezerowego b.

Lokalizacja

Szczególnie ważnym aspektem pracy z wymiarem GK jest kwestia zmiany wymiaru przy przejściu do pierścienia ułamków. Wiadomo, ze wymiar GK może wybuchać przy niecentralnej lokalizacji. Ogólnie wiadomo, ze dla każdej algebry A i jej podzbioru Orego S mamy $GKdim(S^{-1}A) \geqslant GKdim(A)$. Równość zachodzi na przykład przy centralnej lokalizacji, w szczególności więc wymiar GK odpowiada wymiarowi Krulla w przypadku skończenie wymiarowych algebr przemiennych. Zachowanie stopnia przestępnego Tdeg jest natomiast, dokładnie odwrotnie. Zhang wykazał, że:

Twierdzenie 5 *Jeśli A jest algebrą i S zbiorem Orego w A to $Tdeg(S^{-1}A) \leqslant Tdeg(A)$.*

Dowód. Oznaczmy prze $I_V(A)$ liczbę $\inf_b GKdim(\mathbb{K}[bV])$, gdzie b przebiega elementy regularne algebry A. Innymi słowy $Tdeg(A) = \sup_V I_V(A)$. Łatwo widzieć, że jeśli $V \subseteq V'$, to $I_V(A) \leqslant I_{V'}(A)$. Aby pokazać tezę wystarczy stwierdzić, że:

$$Tdeg(S^{-1}A) = \sup_{V_0 \subseteq A} I_{V_0}(S^{-1}A), \tag{1}$$

gdzie V_0 przebiega wszystkie podprzestrzenie skończenie wymiarowe z 1 w A.

Istotnie, każdy element regularny w A jest regularny w $S^{-1}A$. Zatem skoro mnożenie przez element regularny nie pomniejsza wymiaru przestrzeni, to dla każdej $V \subseteq A$ mamy $I_V(S^{-1}(A)) \leqslant I_V(A)$. Dowodziny zatem (1).

Dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej V w $S^{-1}A$ istnieje $s \in S$ taki, że $V' := sV$ jest podprzestrzenią A. Zatem $V \subseteq s^{-1}(V' + \mathbb{K})$. Dla każdego elementu regularnego r algebry $S^{-1}A$, element rs jest regularny w $S^{-1}A$. Stąd:

$$I_V(S^{-1}A) = \inf_b GKdim(\mathbb{K}[bV]) \leqslant \inf_{rs} GKdim(\mathbb{K}[rss^{-1}(V' + \mathbb{K})]) = I_{V'+\mathbb{K}}(S^{-1}A).$$

Skoro V jest dowolna oraz $V' + \mathbb{K} \subseteq A$, to $Tdeg(S^{-1}A) = \sup_{V_0 \subseteq A} I_{V_0}(S^{-1}A)$. ■

Wyliczanie Tdeg

Poza wspomnianym wcześniej rezultatem Gelfanda-Kiryłowa, aż do połowy lat 90' wartości Tdeg znane były właściwie jedynie dla dość nielicznych przykładów i wąskich klas algebr, np.:

- ułamki algebr Weyla (Gelfand i Kiryłow)
- ułamki algebr prawie przemienne[1] (np. algebry Weyla, algebry obwiednie skończenie wymiarowych grup Liego, algebry grupowe grup z funkcją długości) (Borho i Kraft)
- ułamki pewnych skręconych algebr grupowych (Lorenz)

Poważniejsze rezutalty pojawiły się w artykule Zhanga w połowie lat 90', gdzie rozważał algebry mające następującą własność:

$$Tdeg(Q(A)) = Tdeg(A) = GKdim(A).$$

Mają one tę oczywistą zaletę, że wymiar GK łatwiej jest dla wielu klas policzyć. Zhang wskazał ważne klasy algebr, gdzie własność ta ma miejsce, m.in.

- półpierwsze algebry Goldiego wymiaru GK nie większego niż 2
- półpierwsze algebry PI Goldiego
- algebry kwantowe dla szeregu istotnych przykładów (macierze M_n, Gl, algebry Weyla, algebra $U_q(sl_2)$)
- $A[x], A[x, x^{-1}]$ o ile A ma tę własność

Ogólne wyniki

Jeśli chodzi o ogólne własności wymiaru $Tdeg$, istotne dla dalszych rozważań, to można wymienić

- $Tdeg(A \oplus B) = max\{Tdeg(A), Tdeg(B)\}$,
- $Tdeg(A) \geqslant Tdeg(M_n(A))$ oraz $Tdeg(A[x]) \geqslant Tdeg(A) + 1$, przy czym równości zachodzą jeśli A jest dziedziną.

[1] Algebra A z filtracją $\{F_i\}$ jest prawie przemienna, jeśli stowarzyszona z nią algebra z gradacją $\mathcal{G}(A)$ jest przemienna. Ta algebra to jest suma prosta G_n, gdzie $G_0 = F_0$ oraz $G_i = F_i/F_{i-1}$. Mnożenie na warstwach pochodzi od filtracji

- Jeśli algebra jest półpierwsza Goldiego i PI, to $Tdeg(A) = Tdeg(S^{-1}A)$, dla dowolnego zbioru Orego S elementów regularnych w A.

Faktom tym odpowiadają natomiast hipotezy, które potencjalnie je ogólniają.

- Czy jeśli σ jest automorfizmem algebry z dzieleniem D to $Tdeg(D)(x,\sigma) \geqslant Tdeg(D) + 1$? Pewne wyniki są oczywiscie znane. Wiadomo, że fakt ten zachodzi jeśli A jest dziedziną, a σ jest skończonego rzędu. Możemy wtedy dodać różniczkowanie δ. Ogólnie wiadomo, że $Tdeg(A[x,\sigma,\delta] \geqslant Tdeg(A[x,\sigma])$.
- Czy jeśli $D \subseteq Q$ są algebrami z dzieleniem oraz $Q = Q_D$ jest skończenie generowanym modułem prawostonnym to czy $Tdeg(D) = Tdeg(Q)$? To pytanie Stafforda. Wiadomo, że taka własność zachodzi dla klasycznego wymiaru oraz dla wymiaru Gelfanda-Kiryłowa (dla dowolnych algebr).
- Czy jeśli A jest dziedziną Orego to czy $Tdeg(A) = Tdeg(Q^r_{cl}(A))$?

Definicja Ld

W związku w tymi pytaniami, a także w oparciu o motywacje podane wcześniej, Zhang zaproponował w [3] wprowadzenie innego niezmiennika, który nazwał dolnym stopniem przestępnym algebry A i oznaczył przez $Ld(A)$. Definicja jest, przy pierwszym kontakcie, nieco techniczna:

Definicja 3 *Niech A będzie algebrą nad ciałem k. Wówczas:*

- *Jeśli dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni V algebry A istnieje skończenie wymiarowa podprzestrzeń $W \subseteq A$ taka, że:*
$$\dim(VW) = \dim(W),$$
to $Ld(A) := 0$.
- *Jeśli poprzedni punkt nie jest spełniony to mówimy, że V spełnia $VDI(A)_d$ jeśli:*
$$\dim VW \geqslant \dim W + c \dim W^{(d-1)/d}, \tag{2}$$
dla pewnej stałej $c > 0$ oraz dowolnej podprzestrzeni skończenie wymiarowej $W \subseteq A$. Określamy $VDI(A|V)$ jako supremum po wszystkich liczbach $d > 0$ takich, że V spełnia $VDI(A)_d$ Wówczas
$$Ld(A) = \sup_V \{VDI(A|V)\},$$
gdzie V przebiega wszystkie skończenie wymiarowe podprzestrzenie w A.
- *Jeśli dla wszystkich skończenie wymiarowych podprzestrzeni $W \subseteq A$ mamy nierówność:*
$$\dim(VW) \geqslant \dim(W) + c \dim(W),$$
dla pewnej stałej $c > 0$, to $Ld(A) := \infty$.

Związek z hipotezą Smalla

Zanim opowiem o przykładach i własnościach stoppnia Ld, warto powiedzieć jaki odcinek drogi do hipotezy Smalla udało się pokonać Zhangowi przy pomocy tego niezmiennika. Wykazał on następujące fakty:

- Jeśli K jest ciałem, to $Ld(K) = trdeg(K)$
- $Ld(K) \leqslant Ld(D)$, dla podciała algebry z dzieleniem D
- Jeśli $D = Q(A)$, to $Ld(D) = GKdim(A)$

Głównym rezultatem było następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6 *Niech A będzie dziedziną Orego z klasycznym pierścieniem ułamków Q. Wówczas jeśli F jest przemienną podalgebrą Q, wówczas $Gkdim(F) \leqslant GKdim(A)$.*

W twierdzeniu tym nie ma odniesienia do skończonego generowania algebry A, ale widać wyraźnie posmak hipotezy Smalla. Twierdzenie powyższe mówi, że jeśli wezmę skończenie generowaną dziedzinę o skończonym wymiarze Gelfanda-Kiryłowa i dowolne podciało jej pierścienia ułamków klasycznych, to jego stopień przestępny nad centrum tych ułamków jest nie większy niż wymiar $GKdim(A)$. Jest to więc uogólnienie wyniku Resco. Hipoteza Smalla mówi tyle, że jeśli pierścień A nie jest PI, to zachodzi nierówność $GKdim(F) \leqslant GKdim(A) - 1$. Dojście o tego wyniku wymaga dodatkowych pojęć, skupimy się więc na podstawowych informacjach o stopniu Ld.

Ld w przypadku przemiennym. Związek z Tdeg.

Zobaczmy przykład. Weźmy wielomiany $\mathbb{K}[x,y,z]$ i rozważmy podprzestrzenie

$$W_n = \sum_{0 \leqslant p_i < n} \mathbb{K}\, x^{p_1} y^{p_2} z^{p_3}.$$

Niech $V = W_2$. Przestrzenie W_n możemy traktować jak kostki w R^3 o krawędzi n, a więc ich objętość to n^3. Mamy też $VW_n = W_{n+1}$. Łatwo zatem sprawdzimy, że:

$$\dim(VW_n) - \dim(W_n) \geqslant 3(\dim(W_n))^{2/3}.$$

Nietrudno dowieść, że dla dowolnych innych $W \subseteq A$ zachodzi nierówność:

$$\dim(VW) - \dim(W) \geqslant (\dim(W)^{2/3}.$$

Nierówność, którą uzyskaliśmy oznacza zatem, że $Ld(\mathbb{K}[x,y,z]) \geqslant 3$. Okazuje się, że prawdziwy jest następujący, niełatwy rezultat.

Twierdzenie 7 (Zhang) *Niech A będzie przemienną dziedziną oraz $F = (A)$ niech będzie ciałem ułamków w A. Wówczas*

$$Ld(A) = Ld(F) = trdeg_{\mathbb{K}}(F).$$

Nie będziemy dowodzić tego rezultatu, choć zachodzi on także w ogólniejszym wydaniu - dla algebr pierwszych będących PI, ale dla zobaczenia choćby podstawowego rachunku związanego z tym wymiarem wykażemy, że jego nazwa jest trafna, tzn dla dowolnej algebry A zachodzą nierówności:

$$Ld(A) \leqslant Tdeg(A) \leqslant GKdim(A). \tag{3}$$

Do wykazania jest tylko nierówność po lewej. Korzystamy z następującego lematu

Lemat 1 *Załóżmy, że $V \subseteq A$ jest przestrzenią skończenie wymiarową spełniającą $VDI(A)_d$, dla pewnego $d \geqslant 1$. Istnieje wówczas stała $c > 0$ taka, że dla każdego ciągu regularnych elementów $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ oraz każdego ciągu automorfizmów algebry A postaci $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$, mamy:*

$$\dim(b_1 V^{\sigma_1} b_2 V^{\sigma_2} \dots b_n V^{\sigma_n} b_{n+1}) \geqslant cn^d,$$

dla każdego $n \geqslant 1$. W szczególności:

$$\dim(bV)^n \geqslant cn^d \tag{4}$$

dla wszystkich elementów regularnych b oraz wszystkich $n \geqslant 1$.

Zobaczmy jak z lematu wynika (3). Jeśli V spełnia $VDI(A)_d \geqslant 1$, to V spełnia (4), a więc:

$$\begin{aligned} Tdeg(A) &= \sup_V \inf_b \overline{\lim} \log_n \dim(k + bV)^n \\ &\geqslant \sup_V \inf_b \overline{\lim} \log_n \dim(bV)^n \geqslant d. \end{aligned}$$

Przechodząc do supremum dostajemy tezę. Dowodzimy teraz sam lemat.

Dowód. Jest jasne, że V spełnia $VDI(A)_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c' > 0$ takie, że:

$$(\dim(VW))^{1/d} \geqslant (\dim(W))^{1/d} + c'. \tag{5}$$

Niech b będzie elementem regularnym A oraz σ automorfizmem A. Dla każdej podprzestrzeni W mamy $\dim(W^{\sigma^{-1}}) = \dim(W)$. Skoro V spełnia (5) to:

$$(\dim(bV^\sigma W))^{1/d} = (\dim(VW^{\sigma^{-1}}))^{1/d} \geqslant (\dim(W^{\sigma^{-1}}))^{1/d} + c' = (\dim(W))^{1/d} + c'.$$

Stosując indukcję dostaniemy zatem, że:

$$\dim(b_1V^{\sigma_1}b_2V^{\sigma_2}\dots b_nV^{\sigma_n}b_{n+1})^{1/d} \geqslant c'n.$$

■

Ld i podalgebry. Stopien algebry wolnej.

Drugi przykład dotyczy wymiaru algebry wolnej i pokazuje, że Ld nie jest monotoniczny ze względu na branie podalgebr. Zachodzi następujący fakt:

Stwierdzenie 1 *Jeśli A jest dziedziną i $LD(A) < \infty$, to A jest prawostronnie Orego.*

Dowód. Jeśli A nie jest prawostronnie Orego, to istnieją dwa elementy $x, y \in A$ takie, że $xA + yA = xA \oplus yA$. Stąd $\dim(\mathbb{K} + \mathbb{K}\,x + \mathbb{K}\,y)W \geqslant 2\dim(W)$ dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni W w A. Zatem V spełnia $VDI(A)_\infty$, czyli $Ld(A) = \infty$. ■

Wniosek 2 *Niech $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ będzie algebrą wolną o dwóch generatorach x, y. Wówczas $Ld(\mathbb{K}\langle x, y\rangle) = \infty$.*

Wiadomo, że ułamki pierwszej algebry Weyla D_1 zawierają podalgebrę wolną, a jednocześnie na mocy poprzednich obserwacji $Ld(D_1) \leqslant Tdeg(D_1) = 2$. Zatem algebra stopnia Ld równego 2 zawiera podalgebrę nieskończonego stopnia. W tym kontekście wymiar Ld nie nadaje się do badania dziedzin. Wiadomo jednak, że monotoniczność na podalgebry zachodzi dla algebr z dzieleniem.
Wymieńmy pewne rezultaty o wymiarze Ld, które korespondują z brakami stwierdzonymi dla wymiaru $Tdeg$. Zacznijmy od kwestii lokalizacji.

Twierdzenie 8 *Niech $B \subseteq A$ będą algebrami. Wówczas jeśli zachodzi zachodzi jeden z trzech warunków:*

- *jeśli A jest wolnym lewostronnym B-modułem,*
- *jeśli B jest z dzieleniem,*
- *jeśli $B \subseteq A$ są dziedzinami i B jest prawostronnie Orego,*

to

$$Ld(B) \leqslant Ld(A).$$

Lokalizacja

Stwierdzenie 2 *Niech A będzie algebrą i S zbiorem prawostronnie Orego elementów regularnych w A. Wówczas $Ld(AS^{-1}) = Ld(A)$. Nie wiadomo natomiast czy $Ld(S^{-1}(A)) = Ld(A)$?*

Dowód. Nich $V \subseteq AS^{-1}$ będzie przestrzenią skończenie wymiarową z 1 spełniającą $VDI(AS^{-1})_d$. Skoro V jest skończenie wymiarowa nad $\mathbb{K}$, to istnieje $s \in S$, że $Vs \subseteq A$. Zatem $\mathbb{K} + Vs \subseteq A$ i $\mathbb{K} + Vs$ spełnia również $VDI(AS^{-1})_d$. W szczególności $\mathbb{K} + Vs$ spełnia także $VDI(A)_d$. Stąd $Ld(AS^{-1}) \leqslant Ld(A)$.

Dowodzimy przeciwną nierówność. Niech $V \subseteq A$ będzie skończenie wymiarowa i spełnia $VDI(A)_d$. Twierdzimy, że V spełnia też $VDI(AS^{-1})_d$. Niech $W = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i\,\mathbb{K}$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią AS^{-1}. Wówczas istnieje $s \in S$, ze $x_is \in A$, dla każdego i. Skoro $s\,\mathbb{K} = \mathbb{K}\,s$, to $Ws = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i\,\mathbb{K} = W$. Stąd skoro

$$(\dim(VW))^{1/d} = (\dim(VWs))^{1/d} \geqslant (\dim(Ws))^{1/d} + c = (\dim(W))^{1/d} + c.$$

Zatem V spełnia $VDI(AS^{-1})_d$, skąd wynika, że $Ld(AS^{-1}) \geqslant Ld(A)$. ■

Symetryzacja i definicja Bella

Istotną wadą dolnego stopnia przestępnego jest fakt, że nie wiadomo, czy zachodzi równość $Ld(A) = Ld(A^{op})$. Nie ma wprawdzie żadnego kontrprzykładu, ale niemożność korzystania z tej własności skłoniła Bella do następującego przeformułowania definicji Zhanga.

Podobnie jak wcześniej rozważamy $\mathbb{K}$-algebrę A i jej skończenie wymiarową podprzestrzeń V. Jako $VDI^*(V)$ określamy supremum po wszystkich liczbach nieujemnych d takich, że istnieje $c > 0$, że:

$$\max\{\dim(VW), \dim(WV)\} \geqslant \dim(W) + c\dim(W)^{d-1/d},$$

dla każdej podprzestrzeni skończenie wymiarowej $W \subseteq A$. Wówczas dla dziedziny A określamy:

$$Ld^*(A) = \sup_V \{VDI^*(V)\}.$$

Jest jasne, że:

$$Ld^*(A) \geqslant \max\{Ld(A), Ld(A^{op})\},$$

a z konstrukcji wynika, że:

$$Ld^*(A) = Ld^*(A^{op}).$$

Własności wymiaru Bella

W swojej pracy Bell dowodzi następujące własności stopnia Ld^*.

(i) Jeśli D jest algebrą z dzieleniem oraz E jest podalgebrą z dzieleniem algebry D, to $Ld(E) \leqslant Ld^*(D)$.

(i) Jeśli D jest algebrą z dzieleniem oraz E jest podalgebrą z dzieleniem algebry D taką, że D jest skończenie wymiarowym lewostronnym lub prawostronnym E-modułem, to $Ld^*(E) \leqslant Ld^*(D)$ (podobny wynik był dla Ld).

(iii) (Kluczowy fakt) Jeśli D jest skończenie generowaną algebrą z dzieleniem oraz E jest podalgebrą z dzieleniem algebry D taką, że D jest nieskończenie wymiarowym lewostronnym E-modułem, to $Ld(E) + 1 \leqslant Ld^*(D)$.

(iv) Jeśli $Ld^*(D) < 1$ wówczas $Ld^*(D) = 0$. Co więcej, $Ld^*(D) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda skończenie generowana podalgebra w D jest skończenie wymiarowa.

(v) Jeśli $\mathbb{K}$ jest ciałem oraz A jest skończenie generowaną $\mathbb{K}$-algebrą będącą dziedziną Orego i D jest jej pierścieniem ułamków klasycznych, to

$$Ld^*(D) \leqslant GKdim(A).$$

(vi) Jeśli $\mathbb{K}$ jest ciałem oraz K jest rozszerzeniem ciała $\mathbb{K}$ stopnia przestępnego d, to $Ld^*(K) = d$.

Hipoteza Smalla. Wybrane własności

Stwierdzenie 3 *Niech A będzie dziedziną. Wówczas:*

$$Ld^*(A) \leqslant GKdim(A),$$

przy czym jeśli $A = K$ jest ciałem zawierającym $\mathbb{K}$ jako podciało to zachodzi równość.

Dowód. Pokażemy, że zachodzi nierówność, a w przypadku ciał powołamy się na wynik Zhanga. Jeśli $Ld^*(A) = \infty$ lub $GKdim(A) = \infty$ to nie ma czego dowodzić. Zakładamy więc, że $Ld^*(A) > 0$ oraz $GKdim(A) < \infty$. Niech d będzie liczbą dodatnią mniejszą od $Ld^*(A)$. Wówczas, zgodnie z założeniem istnieje podprzestrzeń skończenie wymiarowa w V w A oraz dodatnia stała C takie, że:

$$\max\{\dim(VW), \dim(WV)\} \geqslant \dim(W) + c\dim(W)^{d-1/d},$$

dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni W w A. Kładąc $W = V^n$ dostajemy:

$$\dim(V^{n+1}) \geqslant \dim(V^n) + c\dim(V^n)^{d-1-\epsilon/d-\epsilon},$$

dla pewnego $\epsilon > 0$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}\dim(V^{2n}) &\geqslant \dim(V^{2n}) - \dim(V^n)\\ &\geqslant C\sum_{j=n}^{2n-1}\left(\dim(V^j)\right)^{d-1-\epsilon/d-\epsilon}\\ &\geqslant Cn(\dim(V^n))^{d-1-\epsilon/d-\epsilon}.\end{aligned}$$

Niech $e = GKdim(A)$ oraz niech $\epsilon > 0$. Istnieje nieskończenie wiele takich n, że: $\dim(V^n) \geqslant n^{e-\epsilon}$, ale dla dostatecznie dużych n mamy $\dim(V^n) < n^{e+\epsilon}$. Zatem istnieje nieskończenie wiele n takich, że:

$$(2n)^{e+\epsilon} > \dim(V^{2n}) \geqslant Cn \cdot \left(n^{e-\epsilon}\right)^{d-1/d}.$$

Stąd:

$$e + \epsilon \geqslant 1 + (e-\epsilon)(d-1/d),$$

dla każdego $\epsilon > 0$. Zbiegając z ϵ do zera dostajemy:

$$e \geqslant 1 + e(d-1)/d \Leftrightarrow e \geqslant d.$$

Stąd wynika już jasno rezultat dla ciał. Na mocy wspomnianego wcześniej (niełatwego wyniku) Zhanga wiemy, że $Gkdim(K) = Ld(K)$. Skoro $Ld(K) \leqslant Ld^*(K)$, to reszta wynika z oszacowania pokazanego w pierwszej części dowodu.

■

Wniosek 3 (Własność (v)) *Jeśli $\mathbb{K}$ jest ciałem oraz A jest skończenie generowaną $\mathbb{K}$-algebrą będącą dziedziną Orego i D jest jej pierścieniem ułamków klasycznych, to*

$$Ld^*(D) \leqslant GKdim(A).$$

Dowód. Jest jasne, że $Ld^*(D) \leqslant Ld^*(A)$. ■

Dowodzimy hipotezę Smalla korzystając z własności (iii). Bierzemy skończenie generowaną algebrę A nie będącą PI i zakładamy, że $GKdim(A) < \infty$. Niech D będzie pierścieniem klasycznych ułamków w A oraz niech K będzie podciałem D, które zawiera $\mathbb{K}$.Gdyby $GKdim(K) > GKdim(A) - 1$, to na mocy poprzedniego stwierdzenia mielibyśmy:

$$Ld(K) = GKdim(K) > GKdim(A) - 1 \overset{(v)}{\geqslant} Ld^*(D) - 1.$$

Zgodnie z własnością (iii) oznacza to, że D jest skończenie wymiarowym K-modułem lewostronnym, a więc A spełnia równanie wielomianowe, sprzeczność.

Wnioski z hipotezy Smalla

Jakie uwagi warto tu odnotować? Korespondując z kluczową dla dowodu własnością (iii) moglibyśmy zapytać co by się stało, gydbyśmy przy jej założeniach mieli nierówność:

$$Ld^*(E) + 1 \leqslant Ld^*(D)?$$

Według Bella miałoby to poważne konsekwencje. Wykazalibśmy wówczas, ze istnieje łańcuch skończenie generowanych podalgebr z dzieleniem algebry D taki, że:

$$k = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_n = D,$$

taki, że D_i jest nieskończenie generowanym D_{i-1}-modułem. Zgodnie z wynikami Zhanga mielibyśmy wówczas nierówność nierówność $n \leqslant Ld(D)$, która implikuje trudny nierozwiązany dotąd problem Artina mówiący, że jeśli D jest algebrą z dzieleniem nad ciałem algebraicznie domkniętym, to

$$Gkdim(D) \geqslant 2 \Rightarrow Ld(D) \geqslant 2.$$

Zhang dowodzi, że stąd mielibyśmy inny dowód hipotezy Artina-Stafforda mówiącej, że mając skończenie generowaną spójną algebrę A z gradają nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, wówczas:

$$GKdim(A) > 2 \Rightarrow GKdim(A) \geqslant 3.$$

Pierwszy dowód tego twierdzenia podała A. Smoktunowicz.

Bibliografia

[1] BELL J.P.: *Transcendence degree of division algebras*, Israel Journal of Mathematics (2012), 1-17.

[2] GELFAND I.M., KIRILLOV A.A.: *Sur les corps lies aux algebres enveloppantes des algebres de Lie*, Publicacions Mathematiques. Institus de Hautes Etudes Scientifiques 31 (1976), 1-24.

[3] ZHANG J.J.: *On Gelfand-Kirillov transcendence degree*, Transactions of the American Mathematical Society 348 (1996), 2867-2899.

[4] ZHANG J.J.: *On Lower Transcendence Degree*, Advances in Mathematics 139 (1998). 157-193.