O charakteryzowaniu algebr skończonego typu reprezentacyjnego

3 grudzień 2015.

1 Definicje i motywacje

Podczas referatu wszystkie algebry będą skończenie wymiarowe, z jedynką, nad ciałem algebraicznie domkniętym K. Algebra skończonego typu reprezentacyjnego to taka algebra A, która ma skończenie wiele klas izomorfizmu lewostronnych A-modułów nierozkładalnych skończenie generowanych. Przy tym moduł nierozkładalny to taki, którego nie można przedstawić jako sumy prostej dwóch niezerowych A-modułów. Wiemy, że każda algebra skończenie wymiarowa jest, jako moduł nad sobą, sumą skończenie wielu swoich modułów nierozkładalnych i rozkład ten jest, z dokładnością do izomorfizmu, jednoznaczny (tw. Krulla-Schmidta). Niestety, w przeciwieństwie do algebr półprostych, gdzie każdy moduł nierozkładalny jest prosty i mamy jedynie skończony zbiór skończenie wymiarowych modułów prostych, z których zbudować można skończenie generowane A-moduły, w przypadku dowolnej algebry skończenie wymiarowej nie jest to dłużej prawda. Chciałbym dziś opowiedzieć trochę o algebrach, dla których taki skończony zbiór istnieje.

Tematyka związana z tym referatem jest mi bliska od dłuższego czasu, ponieważ algebry skończonego typu są klasą ściśle związaną z półgrupą klas sprzężoności ideałów lewostronnych, którą badałem w ramach rozprawy doktorskiej. Na jednym z poprzednich seminariów pokazywałem, że dla algebr skończonego typu półgrupa ta okazuje sie być skończona, ale implikacja przeciwna nie ma miejsca. Wprawdzie na referacie tym nie będę zasadniczo prezentował żadnych wyników odnoszących się do tej półgrupy, ale z uwagi na to, że tematyka algebr skończoznego typu jest bardzo szeroka chciałbym przedstawić kontekst, który mnie interesował. W 2013 roku, w ramach pracy nad rozprawą, udowodniliśmy z prof. Oknińskim następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (2013)**.** *Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym taką, że $J(A)^2 = 0$. Następujące warunki są równoważne:*

- *A jest skończonego typu reprezentacyjnego*
- *algebra $\mathrm{M}_6(A)$ ma skończenie wiele klas sprzężoności ideałów lewostronnych.*

O wyniku tym opowiadałem już trochę na tym seminarium. Oto pytania, jakie się z nim bezpośrednio wiążą.

- Czy wyniku nie da się uogólnić na przypadek $J(A)^2 \neq 0$? Przypadek $J(A)^2 = 0$ jest często jedynie pierwszym krokiem w dowodach rezultatów z teorii reprezentacji.
- Jaka jest właściwie rola liczby 6? Liczba ta odgrywa ważną rolę w teorii reprezentacji – nie tylko algebr. Jakie są związki naszego wyniku z tym, co już o liczbie 6 wiadomo? W artykule rezultat dowodzono metodami tzw. problemów macierzowych. Czy można je przetłumaczyć na język teorii reprezentacji? Czy wtedy nie okaże się, że ten fakt to coś dobrze wiadomego?

2 Algebry skończonego typu - do wyników Gabriela

Aby opowiedzieć coś o ogólniejszych wynikach i obejrzeć pewne przykłady algebr skończonego typu warto cofnąć się do początku rozważań nad tą tematyką. Skąd właściwie wzięło się zainteresowanie algebrami skończonego typu w matematyce? Jest to związane jeszcze z przedwojennymi wynikami dotyczącymi pierścieni przemiennych, niekoniecznie zaś samych algebr. Dlaczego? W przypadku przemiennym znamy kursowy wynik klasyfikujący skończenie generowane moduły nad dziedzinami ideałów głównych. Wynika z niego natychmiast, że każda taka dziedzina jest skończonego typu reprezentacyjnego. W szczególności, jeśli przejdziemy do algebr skończenie wymiarowych, to skończonego typu jest algebra postaci:

$$k[x]/(x^{n_1}) \oplus \ldots \oplus k[x]/(x^{n_s}).$$

Na marginesie możemy powiedzieć, że innych przemiennych skończonego typu nie ma.
W 1934 roku Kothe badał pierścienie przemienne, dla których każdy moduł jest sumą prostą modułów cyklicznych. Pokazał, że są to pierścienie łańcuchowe i postawił problem klasyfikacji wszystkich pierścieni artinowskich o tej własności (uczynili to na początku lat 50' Kaplanky i Cohen, dowodząc serię twierdzeń o pierścieniach przemiennych noetherowskich). Następnie, pod koniec lat 30' Nakayama opisał strukturę pierścieni będące sumami prostymi pierścieni łańcuchowych. Pokazał, między innymi, że moduł nad takim pierścieniem (niekoniecznie skończenie generowany!) jest skończoną sumą modułów nierozkładalnych (które są łańcuchowe). Co więcej, było wiadomo, że te moduły nierozkładalne te mają ograniczoną z góry długość. Nakayama odnotował jednak w swojej pracy, że istnieją pierścienie mające moduły nierozkładalne dowolnej długości i podał przykład pochodzący od Brummunda. Pokazał on, że dla niecykliczna p-grupy istnieją nierozkładalne reprezentacje p-modularne dowolnie dużej długości. W ten sposób Nakayama sformułował problem klasyfikacji pierścieni, które mają dowolnie długie moduły nierozkładalne. W języku współczenym wynik Brummunda można sformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 2. *Jeśli G jest p-grupą, a* K *jest ciałem charakterystyki p, wówczas $F[G]$ jest skończonego typu wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cykliczna.*

Wyjaśnienie tego, że dla niecyklicznej p-grupy G algebra $F(G)$ musi być nieskończonego typu nie jest w zasadzie bardzo trudne, ale opiera się na argumencie, którego Brummund nie znał, a który udowodnił Jans w latach 50' - mianowicie, że algebra skończonego typu reprezentacyjnego musi mieć rozdzielną kratę ideałów dwustronnych. Do tego warunku jeszcze wrócimy. Na razie warto, wychodząc nieco do przodu, powiedzieć, że problem skończonego typu dla algebr grupowych nad ciałem rozwiązał ostatecznie Higman, w swoim doktoracie z 1954 roku. Pokazał on następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 ((Higman))**.** *Niech G będzie grupą skończoną oraz F – ciałem. Wówczas $F[G]$ jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z dwóch możliwości:*

- *F jest charakterystyki* 0 *(tw. Maschke)*
- *F jest charakterystyki p oraz p-pogrupa Sylowa grupy G jest cykliczna.*

Wróćmy jednak do czasów przedwojennych i do problemu istnienia pierścieni o modułach nierozkładalnych dowolnej długości. Jest pewne, że obok Nakayamy o zagadnieniu tym wiedział także R. Brauer -

jedna z czołowych postaci teorii reprezentacji. M. Auslander twierdzi, że na początku Brauer problem ten uważał za zadanie dla doktorantów. Jednak na podstawie nieopublikowanej korespondencji można uważać, że zajmował się nim przez jakiś czas - być może niezbyt intensywnie. W drugiej połowie lat 40' do badań dołączył kolega wydziałowy Brauera z Michigan - Thrall, który również zostawił po sobie jedynie nieopublikowane materiały.

Dopiero doktorant Thralla o nazwisku Jans, opublikował w 1954 roku rozprawę, w której sformułował zagadnienie zwane później pierwszym problemem Brauera-Thralla. Mówiło ono, że algebra jest albo skończonego typu, albo jest nieograniczonego typu. Dodał również drugą hipotezę: pytanie czy jeśli założymy, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych k, dla których istnieje nieskończenie wiele modułów o długości k, to czy dostajemy coś więcej niż algebry nieograniczonego typu (nazywano je wówczas algebrami silnie nieograniczonego typu)? Te dwa problemy wydawały się stymulować początkowy rozwój teorii.

Jaki obraz wyłaniał się z wczesnej teorii oraz wyników Nakayamy, Brauera, Thralla i Jansa? Otóż mówił on, że algebry nieskończonego typu charakteryzują się pewnymi własnościami kombinatorycznymi. Nakayama zauważył już w latach 30' następującą własność:

Twierdzenie 4 (Nakayama)**.** *Jeśli $J(A)$ jest radykałem Jacobsona algebry A, zaś e prymitywnym idempotentem, zaś $J(A)^{i-1}/J(A)^i$, rozważany jako lewostronny A-moduł zawiera sumę prostą dwóch izomorficznych podmodułów, wówczas A jest nieograniczonego typu,*

Brauer, choć nieopublikował tego wyniku (a został on przekazany przez Jansa), zmodyfikował go pokazując, że $J(A)e/J(A)^2e$ musi być sumą trzech lub więcej podmodułów prostych, jeśli A ma być nieograniczonego typu. Jednocześnie Jans wspomina o tym, że jego promotor Thrall wprowadził pomysł graficznego prezentowania warunków na to, by algebra był silnie nieograniczonego typu, w przypadku, gdy kwadrat radykału jest zerowy, przyporządkowując algebrze pewien graf związany z ideałami. Opisywał to w sposób następujący. Zgodnie z tw. Wedderburna-Malceva A jest, jako przestrzeń liniowa, sumą prostą $A' \oplus J(A)$, gdzie A' jest półprosta. Dalej A' jest sumą prostą swoich dwustronnych ideałów $A_1, \ldots, A_n$. Każdy z tych ideałów to algebra i ma jedność e_i. Graf, który Thrall przyporządkował algebrze miał wierzchołki e_i, a strzałka wierzchołkami e_i oraz e_j istniała tylko wtedy, gdy $e_i J(A) e_j \neq 0$. Thrall uważał, że na podstawie tego grafu umie opisać algebry skończonego typu, gdy $J(A)^2 = 0$. Thrall pokazał, że wyniki Brauera w istocie oznaczają, że graf, który zdefiniował nie może zawierać pewnych diagramów, zwanych dziś diagramami $\widetilde{A_n}$ oraz $\widetilde{D_4}$. Thrall pokazał, że listę tę trzeba uzupełnić przez wyrzucenie diagramów postaci $\widetilde{D_n}$. Wyniki te zostały zebrane i udowodnione w doktoracie Jansa (i wiele innych). Dwa lata po doktoracie Jansa (czyli w 1956r), ukazała się praca Yoshiego z Japonii, który do listy tej dodał kolejne grafy twierdząc, że uzyskał już pełną klasyfikację algebr skończonego typu, dla $J(A)^2 = 0$. Dowód okazał się jednak niepoprawny. Wynik ten został ostatecznie poprawiony i udowodniony przez Gabriela, w 1972r. Użył one jednak zupełnie innych metod niż reprezentacje algebr w algebrach macierzy. Poszedł on za intuicją Thralla dotyczącą grafów, ale dodał do niej filozofie swojego nauczyciela - Grothendieka, który od dawna widział w grafach i ich reprezentacjach odpowiednie narzędzie do opisu głębokich pojęć, które wprowadzał do matematyki.

3 Twierdzenie Gabriela i twierdzenie o bazie multyplikatywnej

W latach 70' do badania algebr skończonego typu wykorzystano teorię reprezentacji kołczanów. Przez kołczan rozumiem parę $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$, gdzie Γ_0 to tzw. zbiór wierzchołków (zwykle skończony), zaś $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0 \times \Gamma_0$ to zbiór strzałek. Dla każdego takiego kołczanu można rozważać kategorię reprezentacji $\mathrm{Rep}_{\mathrm{K}}(\Gamma)$ tego kołczanu nad ciałem K. Obiektami są pary (V_i, ϕ_α), gdzie $i \in \Gamma_0, \alpha \in \Gamma_i$, przy czym V_i to pewna przestrzeń liniowa nad ciałem K, zaś ϕ_α to przekształcenie liniowe pomiędzy V_i a V_j, gdzie $\alpha = (i, j)$. Jest jasne jak wyglądają morfizmy i ich składanie. Jeśli założymy, że V_i są skończenie wymiarowe, to kategorię nazywamy kategorią skończenie wymiarowych reprezentacji kołczanu Γ.

Dla każdego kołczanu można rozważać algebrę $\mathrm{K}(\Gamma)$ – tzw. algebrę dróg kołczanu. Jako przestrzeń liniowa jest to algebra o bazie w_i, gdzie w_i są wszystkimi możliwymi drogami w kołczanie Γ (definicja drogi jest jasna). Okazuje się, że istnieje izomorfizm pomiędzy $\mathrm{Rep}(\mathrm{K}(\Gamma))$ oraz $\mathrm{Rep}(\Gamma)$. Tak więc reprezentacje pewnych algebr można opisywać przy pomocy reprezentacji kołczanów. Można pokazać, że algebry postaci $\mathrm{K}(\Gamma)$ dla pewnego skończonego kołczanu Γ to dokładnie algebry dziedziczne, a więc takie, których wymiar globalny jest nie większy niż 1. Gabriel pokazał w 1972 roku, że algebry tej postaci są skończonego typu wtedy i tylko wtedy, jeśli Γ, po zaniedbaniu orientacji, jest sumą rozłączną następujących diagramów Dynkina.

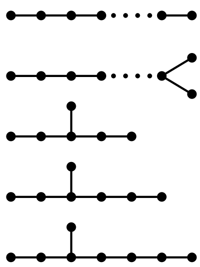
A_n n wierzchołków, $n \geqslant 1$

D_n n wierzchołków, $n \geqslant 4$

E_6

E_7

E_8



Chciałbym zwrócić uwagę na tylko jeden aspekt dowodu tego twierdzenia, który przyda się do opowiedzenia co można powiedzieć o algebrach skończonego typu w przypadku, gdy A nie jest dziedziczna. W dowodzie tego faktu zasadniczą rolę odegrała teoria form kwadratowych. Dla każdego kołczanu Γ o n wierzchołkach można zdefiniować formę kwadratową $q_\Gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ o współczynnikach całkowitych daną przy pomocy wzoru:

$$q_\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i^2 - \sum_{\alpha=(i,j)\in Q_1} x_i x_j.$$

Co opisuje taka forma? Okazuje się, że ma ona sens geometryczny. Załóżmy, że wektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ o współrzędnych całkowitych dodatnich i rozważymy zbiór wszystkich reprezentacji kołczanu Γ, gdzie w wierzchołkach stoją przestrzenie liniowe $V_i = \mathrm{K}^{x_i}$. Okazuje się, że klasy izomorfizmu tych reprezentacji można opisywać w języku geometrii algebraicznej. Rozważmy przestrzeń

$$A(x) = \bigoplus_{(i,j)\in\Gamma_1} \mathrm{M}_{x_j \times x_i}(\mathrm{K}).$$

Weźmy następnie działanie grupy $G(x) = \mathrm{Gl}_{x_1}(\mathrm{K}) \times \mathrm{Gl}_{x_2}(\mathrm{K}) \times \ldots \times \mathrm{Gl}_{x_n}(\mathrm{K})$ na $A(x)$ dane wzorem:

$$g \circ (a_\alpha)_{\alpha\in Q_1} = (g_j^{-1} a_\alpha g_i)_{(i,j)=\alpha\in Q_1}, \tag{1}$$

gdzie $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_i \in \mathrm{Gl}_{x_i}(\mathrm{K})$. Okazuje się, że orbity tego działania są w bijekcji z klasami izomorfizmu w reprezentacji kołczanu Γ o wektorze wymiaru x. Wówczas także wartość $q_\Gamma(x)$ jest jasna. Jest to różnica pomiędzy wymiarem grupy $G(x)$ traktowanej jako grupa algebraiczna, a wymiarem $A(x)$ traktowanego jako rozmaitość. Zauważmy zatem, że jeśli $q_\Gamma(x) = 0$, to $\mathrm{K}(\Gamma)$ jest nieskończonego typu. Istotnie, przy działaniu (1) podzbiór $G(x)$ postaci $F = \{a(Id_{x_1}, \ldots, Id_{x_n}), a \in \mathrm{K}^*\}$ działa trywialnie na $A(x)$. Zatem jeśli $q_\Gamma(x) = 0$, to wymiar grupy $G(x)/F$ działającej na $A(x)$ jest mniejszy niż wymiar $A(x)$, a zatem orbit tego działania musi być nieskończenie wiele. Ten klasyczny argument, pochodzący od Titsa jest kluczowy w wielu rozważaniach teorii reprezentacji. Pozwala on, przy dokonaniu pewnych dodatkowych obserwacji (jak wykazanie, że orientacja krawędzi kołczanu nie ma znaczenia dla typu reprezentacyjnego, czy jak wykazanie, że jeśli podkołczan kołczanu Γ „ma nieskończony typ", to on też) na wyeliminowanie niedynkinowskich kołczanów Γ i pokazanie, że dziedziczna algebra skończonego typu musi mieć kołczan, który jest sumą rozłączną grafów Dynkina. To, dlaczego dla każdego grafu Dynkina algebra $\mathrm{K}(\Gamma)$ jest skończonego typu wymaga osobnych rozważań. Mówiąc najkrócej jak to możliwe pokazuje się, że dla form kwadratowych pochodzących od takich grafów istnieje bijekcja pomiędzy minimalnymi pierwsziastkami formy kwadratowej kołczanu, a klasami izomorfizmu nierozkładalnych reprezentacji.

Rezultat Gabriela, i analogiczny wynik uzyskany przez niego dla algebr, w których $J(A)^2 = 0$, wydawał się drogą do niezwykle bogatego świata. Już podstawowy przypadek łączył ze sobą wiele różnych teorii i należało się spodziewać, że badanie dowolnych algebr skończonego typu przyniesie jeszcze więcej ciekawych rezultatów. Tak się rzeczywiście stało. Na kluczowe do dziś wyniki teorii reprezentacji trzeba było poczekać jeszcze 10 lat. Ich historia jest sama w sobie dość ciekawa, wiąże się zresztą z badaniem bardzo ciekawych hipotez Brauera-Thralla, związanych z algebrami nieskończonego typu. Niemniej jednak – pomijając zawiłości historyczne i pewne początkowe niejasności odnośnie autorstwa rezultatów cząstkowych (które uzyskiwano niezależnie na dwóch półkulach) – w 1985 roku w Inventiones Mathematicae ukazała się praca czwórki autorów: R.Bautisty, P.Gabriela, A.V.Roitera i L.Salmerona, uważana za kolejny punkt przełomu w teorii reprezentacji. Niestety, nie tylko z powodu rezultatów. Praca ta była bardzo skomplikowana. Rezultaty, o których nieco za chwilę powiem, uwikłane zostały w specjalnie stworzony język, oparty głównie o teorię kategorii (co miało oczywiscie swoje uzasadnienie). Co więcej, nawet przebrnąwszy przez terminologię czytelnik odkrywał, że praca jest niezwykle skondensowana tak, że rozpracowanie szczegółów dowodów, pewne uproszczenia czy wyjaśnienia pojawiły się dopiero po latach (w postaci osobnej książki Kostrikina i serii artykułów Bongartza) Co naturalne – dla czytelnika nie znającego blisko teorii reprezentacji, tekst z 1985 roku był właściwie nie do przejścia (na co zresztą zwraca uwagę wielu specjalistów z samej teorii reprezentacji, np. Ringel, Gabriel czy Bongartz). W ten sposób, jak się wydaje, szerokie grono osób śledzących wyniki teorii reprezentacji, ale nie będących specjalistami, nie było w stanie od tej pory śledzić (bez wytężonego wysiłku) dalszego ciekawego rozwoju tej teorii.

Główny wynik z pracy w 1985 roku był zaskakujacy. Każda bazowa algebra A skończonego typu reprezentacyjnego nad ciałem algebraicznie domkniętym posiada tak zwaną unormowaną bazę multyplikatywną. To znaczy, istnieje baza B algebry A, która spełnia trzy warunki:

(1) Jeśli $b_1, b_2 \in B$, to $b_1 b_2$ jest równy 0 lub należy do B,

(2) B zawiera pełen zbiór prymitywnych idempotentów ortogonalnych w A,

(3) Elementy nieidempotentne w B generują $J(A)$.

Już pierwszy warunek jest bardzo ważny, ponieważ mówi, że algebry skończonego typu są (ściągniętymi) algebrami półgrupowymi pewnych skończonych półgrup, a więc w zasadzie ich opis jest kombinatoryczny. Jednak także pozostałe dwa warunki okazują się istotne i wyróżniają w sposób zdecydowany algebry skończonego typu spośród wszystkich algebr półgrupowych.

Dodatkową trudnością w interpretacji tego wyniku jest fakt, że nie tylko algebry skończonego typu mają unormowaną bazę multyplikatywną. Własność ta przysługuje tzw. minimalnym algebrom nieskończonego typu. Są to takie algebry nieskończonego typu, których każdy nietrywialny iloraz jest skończonego typu. Badanie tych algebr było jednym z centralnych motywów lat 80', a i w ostatnich latach zostało podjęte na nowo (prace Bongartza i Ringela). Chciałbym opowiedzieć bardzo pobieżnie o jednym aspekcie tej pracy, który dostarczył później pewnych wyników klasyfikacyjnych.

4 Kołczany algebr i formy dodatno określone

W pracy czwórki autorów jednym z ważnych narzędzi jest badanie nakryć kołczanów. Są to nakrycia w topologicznym sensie, gdzie kołczan traktujemy jak obiekt geometryczny na płaszczyźnie (wymaga to oczywiście doprecyzowania). Przy tym trzeba powiedzieć o dwóch sprawach. Po pierwsze trzeba powiedzieć, że dla dowolnej algebry można zdefiniować kołczan. A po drugie, że można wprowadzić pewien rodzaj ograniczeń w tym kołczanie tak, by po ich uwzględnieniu teoria reprezentacji tego (ograniczonego) kołćzanu odzwierciedlała teorię reprezentacji algebry, z której wyszliśmy.

I tak mając (bazową) algebrę A i pełen zbiór prymitywnych idempotentów ortogonalnych $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tej algebry definiujemy kołczan $\Gamma(A)$ algebry A jako parę (Q_0, Q_1), gdzie Q_0 indeksowany jest elementami zbioru E, zaś istnieje strzałka z e_i do e_j wtedy i tylko wtedy, gdy $e_i J(A)/J(A)^2 e_j \neq 0$. Liczba strzałek pomiędzy dwoma wierzchołkami kołczanu to wymiar przestrzeni wymienionej wyżej. W ten sposób każdej algebrze przypisuje się kołczan. Jednak kategoria reprezentacji tego kołczanu jest „większa" niż kategoria lewostronnych A-modułów. Dowodzi się jednak, że istnieje ideał $I \subseteq J(\mathrm{K}(\Gamma(A)))^2$, zwany ideałem dopuszczalnym taki, że $A \simeq \mathrm{K}(\Gamma(A))/I$. Ten ideał jest skończenie generowany. Co więcej można tak dobrać zbiór jego generatorów postaci $\sum a_i w_i$, gdzie $a_i \in \mathrm{K}$, zaś w_i to drogi w $\Gamma(A)$, że początki i końce wszystkich dróg w_i są takie same. W ten sposób dowolna algebra bazowa otrzymuje opis kombinatoryczny w postaci tzw. ograniczonego kołczanu. Mając w ręku to narzędzie można mówić o związku kołczanu algebry ze skończonym typem reprezentacyjnym. Oczywiście wychodząc od algebry $\mathrm{K}(\Lambda)$, gdzie Λ jest kołczanem skończonym, mamy $\Gamma(\mathrm{K}(\Lambda)) = \Lambda$.

Zauważmy, że wprowadzone wcześniej pojęcie reprezentacji kołczanu można bez przeszkód zastosować także do kołczanów ograniczonych relacjami. Pary (V_i, ϕ_α) są reprezentacjami takiego kołczanu (Γ, I), o ile dla wybranego zbioru generatorów $\sum a_i w_i$ ideału I, przekstałcenia ϕ_{w_i} zdefiniowane jako odpowiednie złożenia przekształceń ϕ_α, zgodnie z postacią drogi w_i spełniają warunek $\sum a_i \phi_{w_i} = 0$. Podobnie jak wcześniej można rozważać rozmaitość algebraiczną $A(x)$ odpowiadającą reprezentacjom przy danym wektorze wymiaru. Podobnie jak wcześniej istnieje odpowiedniość pomiędzy orbitami działania odpowiednio zdefiniowanej grupy $G(x)$ na $A(x)$ z klasami izomorfimu reprezentacji o wektorze wymiaru x. Przez 10 lat po pracach Gabriela nie było jasne czy istnieje odpowiednik pojęcia formy kwadratowej dla tak określonych kołczanów. Oczywiście wciąż chcemy, by forma ta opisywała różnicę pomiędzy wymiarem grupy $G(x)$, a wymiarem $A(x)$. Ten jednak obecnie zależy (a priori) od wyboru generatorów ideału I.

W 1983 roku Bongartz opublikował pracę, w której wprowadził stosowne pojęcie formy kwadratowej algebry, które działało zgodnie z podaną intuicją. Przy tym jednak zakładał, że kołczan algebry A nie zawiera cyklu. Każda algebra tego typu ma skończony wymiar globalny. Bazując na intuicjach znanych już od Titsa, i zaprzęgając do nich nowe silne metody, Bongartz pokazał, że forma kwadratowa q_A algebry skończonego typu reprezentacyjnego A musi mieć tę własność, że $q_A(x) > 0$, dla każdego $x > 0$, to jest wektora o wszystkich współrzędncych nieujemnych i nie wszystkich równych 0. Formy takie nazywa się słabo dodatnio określonymi. I powstało pytanie: czy implikację tę można odwrócić?

Niestety nie można. Już Bongartz pokazał algebry wymiaru globalnego 2, które są dzikie, a których forma kwadratowa jest słabo dodatnio określona. Z drugiej strony dla wielu ważnych klas algebr okazało się, że implikację tę można odwrócić. Więcej o tym można przeczytać w rozdziale XX.2 w [6].

Tu dochodzimy do pytania związanego z twierdzeniem cytowanym na początku tego referatu. Jak liczba 6 związana jest z problemem klasyfikacji algebr skończonego typu reprezentacyjnego? W dalszym ciągu wiąże się to z formami dodatnio określonymi. Klasyczne twierdzenie Ovsienki [2] mówi, że jeśli słabo dodatnio określona forma kwadratowa o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek, to jest taki x, że $q(x) = 1$, to wszystkie współrzędne x_i tej formy spełniać muszą nierówność $x_i \geqslant 6$. Tak zwana klasyfikacja krytycznych algebr minimalnych nieskończonego typu przeprowadzona przez Bongartza, Happela i Vossieka (patrz [5], XIV) opisuje algebry, których każda wypukła podalgebra właściwa (pochodząca od wypukłego podkołczanu) jest skończonego typu reprezentacyjnego. Lista tych algebr jest bardzo długa i są to algebry dróg kołczanów ograniczonych. Do listy algebr dołączone są wektory radykalne kwadratowej formy Titsa. Współrzędne tych wektorów wszystkie są mniejsze lub równe 6. To sugeruje, że być może w pewnej klasie algebr (tzw. jednospójne) możliwe jest uzyskanie listy wszystkich „zakazanych dodatnich wektorów wymiaru"' podobnie jak to się stało w przypadku, gdy kwadrat radykału Jacobsona był zerowy. Te przypuszczenia pozwoliły nam sformułować następujący problem.

Problem 1. *Rozważmy skończenie wymiarowe algebry rozdzielne A nad ciałem algebraicznie domkniętym takie, że wszystkie proste A-moduły mają wymiar przynajmniej 6. Wyznaczyć naturalne klasy algebr, dla których następujące warunki są równoważne:*

(1) algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego,

(2) półgrupa $C(A)$ jest skończona.

Bibliografia

[1] Assem I., Simson D., Skowroński A.: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society, Student Texts 65, Cambridge 2006.

[2] Ovsienko S.A., Integral weakly positive forms, in: Schur matrix problems, and quadratic forms, Kiev (1978), 3–17.

[3] Bongartz K.: *On representation-finite algebras and beyond*. Advances in representation theory of algebras, EMS Series of Congress Reports, 2014.

[4] Ringel C.: *Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojter's theorem and the theorem of Nazarova and Rojter (on algorithms for solving vectorspace problems. I)*, W: Representation Theory I: Proceedings of the Workshop on the Present Trends in Representation Theory, Ottawa, Carleton University, August 13-18, 1979: No. 1. Lecture notes in mathematics: representation theory; 831. Berlin, Heidelberg: Springer: 104-136.

[5] Simson D., Skowroński A., Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type, London Mathematical Society, Student Texts 72, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] Simson D., Skowroński A., Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 3: Representation-infinite Tilted Algebras, London Mathematical Society, Student Texts 72, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.