Czy półgrupa może być niezmiennikiem?

Arkadiusz Męcel

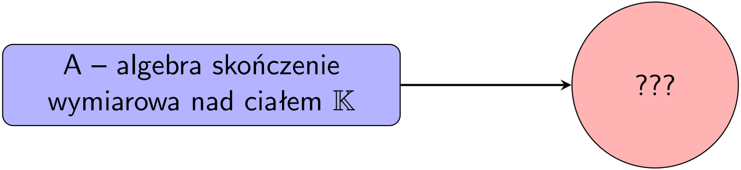
Uniwersytet Warszawski
a.mecel@mimuw.edu.pl

Konferencja „Oblicza Algebry”
Kraków, 30.05.2015

Kontekst zagadnienia

A – algebra skończenie wymiarowa nad ciałem $\mathbb{K}$

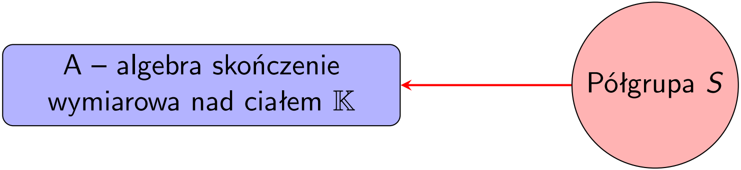
Kontekst zagadnienia



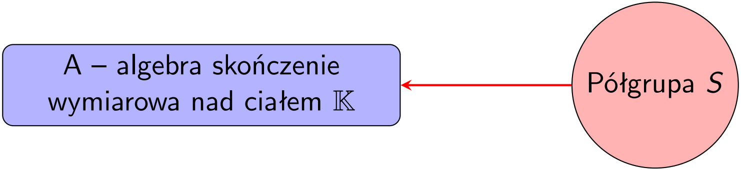
Przykłady półgrup pochodzących od algebry A:

- $(A, \cdot)$ – monoid multyplikatywny
- $I(A)$ – półgrupa ideałów dwustronnych
- $L(A)$ – półgrupa ideałów lewostronnych
- $S(A)$ – półgrupa podprzestrzeni liniowych
- $D(A)$ – półgrupa podzbiorów domkniętych

Kontekst zagadnienia



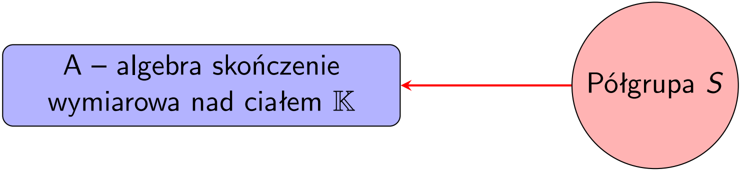
Kontekst zagadnienia



Definicja

Bazę $S = \{s_i \mid i \in I\}$ algebry A nad ciałem $\mathbb{K}$ nazwiemy **bazą multyplikatywną**, jeśli $s_i s_j \in S \cup \{0\}$, dla wszystkich $s_i, s_j \in S$.

Kontekst zagadnienia



Algebry mające bazę multyplikatywną:

- algebra macierzy nad ciałem – $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$
- algebry półproste
- algebry (pół)grupowe
- **algebry skończonego typu reprezentacyjnego nad ciałem algebraicznie domkniętym (!)**

Półgrupa klas sprzężoności ideałów

Definicja

Niech $C(A)$ będzie zbiorem $\{[L], L \in L(A)\}$ klas sprzężoności ideałów lewostronnych skończenie wymiarowej algebry A z jedynką. Wówczas definiując operację

$$[L_1][L_2] := [L_1 L_2],$$

gdzie $L_1, L_2 \in L(A)$, otrzymujemy strukturę półgrupy na $C(A)$.

Przykład. Półgrupa $C(A)$ dla $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy niezerowy ideał lewostronny L w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ jest sprzężony z jednym z ideałów

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})(e_{11} + \ldots + e_{jj}), \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

  przy czym e_{ij} są jedynkami macierzowymi w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,
- $C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ złożona jest z dokładnie $n+1$ elementów
- dla $0 \neq [X], [Y] \in C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ mamy $[X] \cdot [Y] = [Y]$.

Wniosek

Jeśli A jest skończenie wymiarową $\mathbb{K}$-**algebrą półprostą** z jedynką, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Co więcej, jeśli $\mathbb{K}$ jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, to $C(A)$ wyznacza strukturę A z dokładnością do izomorfizmu.

Algebry półproste

Przykład. Półgrupa $C(A)$ dla $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy niezerowy ideał lewostronny L w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ jest sprzężony z jednym z ideałów

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})(e_{11} + \ldots + e_{jj}), \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

przy czym e_{ij} są jedynkami macierzowymi w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

- $C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ złożona jest z dokładnie $n+1$ elementów
- dla $0 \neq [X], [Y] \in C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ mamy $[X] \cdot [Y] = [Y]$.

Wniosek

Jeśli A jest skończenie wymiarową $\mathbb{K}$-**algebrą półprostą** z jedynką, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Co więcej, jeśli $\mathbb{K}$ jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, to $C(A)$ wyznacza strukturę A z dokładnością do izomorfizmu.

Algebry półproste

Przykład. Półgrupa $C(A)$ dla $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy niezerowy ideał lewostronny L w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ jest sprzężony z jednym z ideałów

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})(e_{11} + \ldots + e_{jj}), \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

  przy czym e_{ij} są jedynkami macierzowymi w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,
- $C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ złożona jest z dokładnie $n+1$ elementów
- dla $0 \neq [X], [Y] \in C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ mamy $[X] \cdot [Y] = [Y]$.

Wniosek

Jeśli A jest skończenie wymiarową $\mathbb{K}$-**algebrą półprostą** z jedynką, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Co więcej, jeśli $\mathbb{K}$ jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, to $C(A)$ wyznacza strukturę A z dokładnością do izomorfizmu.

Algebry półproste

Przykład. Półgrupa $C(A)$ dla $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy niezerowy ideał lewostronny L w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ jest sprzężony z jednym z ideałów

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})(e_{11} + \ldots + e_{jj}), \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

  przy czym e_{ij} są jedynkami macierzowymi w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,
- $C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ złożona jest z dokładnie $n+1$ elementów
- dla $0 \neq [X], [Y] \in C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ mamy $[X] \cdot [Y] = [Y]$.

Wniosek

Jeśli A jest skończenie wymiarową $\mathbb{K}$-**algebrą półprostą** z jedynką, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Co więcej, jeśli $\mathbb{K}$ jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, to $C(A)$ wyznacza strukturę A z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład. Półgrupa $C(A)$ dla $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy niezerowy ideał lewostronny L w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ jest sprzężony z jednym z ideałów

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})(e_{11} + \ldots + e_{jj}), \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

  przy czym e_{ij} są jedynkami macierzowymi w $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,
- $C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ złożona jest z dokładnie $n+1$ elementów
- dla $0 \neq [X], [Y] \in C(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ mamy $[X] \cdot [Y] = [Y]$.

Wniosek

Jeśli A jest skończenie wymiarową $\mathbb{K}$-**algebrą półprostą** z jedynką, to półgrupa $C(A)$ jest skończona. Co więcej, jeśli $\mathbb{K}$ jest ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym, to $C(A)$ wyznacza strukturę A z dokładnością do izomorfizmu.

Twierdzenie (J. Okniński, L. Renner)

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką nad ciałem $\mathbb{K}$.

- jeśli A jest skończonego typu reprezentacyjnego, to $C(A)$ jest skończona,
- jeśli ciało $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte oraz $C(\mathbb{M}_n(A))$ są półgrupami skończonymi dla każdego $n > 1$, wówczas A jest skończonego typu reprezentacyjnego.

Półgrupa $C(A)$ jako niezmiennik

Twierdzenie

Niech A, B będą skończenie wymiarowymi algebrami nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$. Jeśli $|C(A)| < \infty$ oraz zachodzi izomorfizm półgrup $C(A) \simeq C(B)$, to

- algebry $A/J(A)$ oraz $B/J(B)$ są izomorficzne,
- kołczany algebr A oraz B są izomorficzne.

Jeśli dodatkowo $J(A)^2 = 0$, to $A \simeq B$.

Problem

Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, przy czym $|I(A)| < \infty$ i $J(A)^2 = 0$. **Kiedy półgrupa $C(A)$ jest skończona?**

Problem został rozstrzygnięty, gdy:

- $A/J(A)$ jest sumą prostą skończenie wielu kopii $\mathbb{K}$,
- $A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{K})$, dla $n_i \geqslant 6$,
- $A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{K})$, dla $n_i \leqslant 2$.

Problem skończoności $C(A)$

Problem

Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, przy czym $|I(A)| < \infty$ i $J(A)^2 = 0$.
Kiedy półgrupa $C(A)$ jest skończona?

Problem został rozstrzygnięty, gdy:

- $A/J(A)$ jest sumą prostą skończenie wielu kopii $\mathbb{K}$,
- $A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{K})$, dla $n_i \geqslant 6$,
- $A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{K})$, dla $n_i \leqslant 2$.

Niech A będzie algebrą spełniającą założenia Problemu, oraz:

$$A/J(A) \simeq \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{M}_{n_2}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{K}).$$

Rozważmy zbiór $\mathcal{M}_A$ macierzy blokowych postaci:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \ldots & a_{tt} \end{bmatrix},$$

gdzie:

- $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow e_i J(A) e_j \neq 0$,
- $a_{ij} \in \mathbb{M}_{k_i \times n_j}(\mathbb{K})$, przy czym $k_i = \sum_{j: e_i J(A) e_j \neq 0} n_j$.

Redukcja do problemu macierzowego

Rozważamy działanie $(\star)$ zbioru $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^o$ na $\mathcal{M}_A$ grup

$$\mathfrak{H} := \mathrm{Gl}_{k_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{k_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Gl}_{k_t}(\mathbb{K}),$$

$$\mathfrak{G} := \mathrm{Gl}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{n_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Gl}_{n_t}(\mathbb{K}) :$$

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} = \begin{bmatrix} h_1 a_{11} g_1^{-1} & h_1 a_{12} g_2^{-1} & \ldots & h_1 a_{1t} g_t^{-1} \\ h_2 a_{21} g_1^{-1} & h_2 a_{22} g_2^{-1} & \ldots & h_2 a_{2t} g_t^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_t a_{t1} g_1^{-1} & h_t a_{t2} g_2^{-1} & \ldots & h_t a_{tt} g_t^{-1} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_t), \quad \mathfrak{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_t).$$

Lemat

Niech A będzie skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, przy czym $|I(A)| < \infty$ oraz $J(A)^2 = 0$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- półgrupa $C(A)$ jest skończona,
- zbiór orbit działania $(\star)$ na $\mathcal{M}_A$ jest skończony.

Problem izomorfizmu

Problem

Weźmy dwie algebry A, B, skończenie wymiarowe nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, z jedynkami, takie że $C(A) \simeq C(B)$ jako **półgrupy skończone**. Kiedy $A \simeq B$?

Źródła

1. Męcel A., *Półgrupa sprzężoności ideałów lewostronnych algebry łącznej,* Rozprawa doktorska, Uniwersytet Warszawski, 2014.
2. Męcel A., Okniński J.: Conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra, Publ. Mat. 57 (2013), 477–496.
3. Okniński J., Renner L.: Algebras with finitely many orbits, J. Algebra 264 (2003), 479–495.