

Wprowadzenie do tomografii geometrycznej

Arkadiusz Męcel

Seminarium monograficzne: Wybrane zagadnienia geometrii

25 lutego 2009r.

Tomografia geometryczna jest dziedziną matematyki, w której staramy się rekonstruować informacje o obiektach geometrycznych na podstawie ich przekrojów lub/i rzutów. Przykładowym zagadnieniem tej teorii jest następujący problem:

Pytanie 1 *Jak najlepiej przybliżyć objętość trójwymiarowego ciała wypukłego znając pola powierzchni rzutów tego ciała na płaszczyzny (wszystkie)?¹*

Nazwa dziedziny jest jak najbardziej uzasadniona. Tomografia (gr. tome – przekrój i grafein – zapisywać) – w medycynie jest zbiorczą nazwą metod diagnostycznych mających na celu uzyskanie obrazu przedstawiającego przekrój przez ciało lub jego część. Wiadomo, że gęsty materiał, taki jak kość czy ząb ukaże się na obrazie roentgenowskim jako jasny obszar, ciemniejsze zaś regiony oznaczają będą mniej gęste tkanki ciała. Każdy promień z wiązki X podróżuje po linii prostej i jego intensywność po przebyciu naświetlanej części ciała zależy, intuicyjnie rzecz biorąc od tego, przez 'jak wiele' tkanki przeszedł. Jeśli promienie wiązki X są wzajemnie równoległe, wówczas obraz zawiera informację o ilości materiału w ciele, leżącego w przecięciu linii równoległych do kierunku wiązki.

Jak wygląda matematyczny obrazek tej sytuacji? Możemy sobie na przykład wyobrazić, że interesuje nas określenie funkcji f gęstości rozkładu prawdopodobieństwa na płaszczyźnie na podstawie rodziny funkcji f_u indeksowanej wszystkimi kierunkami wektorów jednostkowych $u \in S^1$ takich, że $f_u(t)$ jest całką z f po prostej prostopadłej do u w punkcie t . Innymi słowy: nasza wiązka promieni X_u to rodzina prostych prostopadłych do u . Jasne i ciemne obszary – to odpowiednie całki. To konkretne zagadnienie ma pozytywne rozstrzygnięcie w postaci twierdzenia Radona z 1917r.

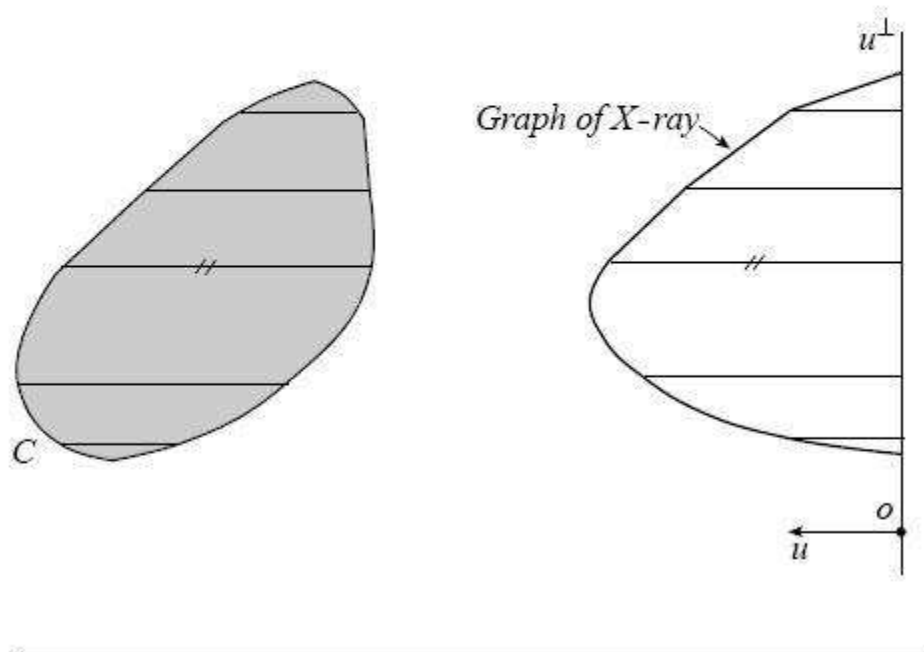
Pojawienie się pojęć: 'gęstość', 'rozkład', 'całka' – sugeruje, że objęcie zagadnienia tomografii modelem matematycznym może być w pełnej ogólności niezwykle skomplikowane. Dlatego też stosuje się szereg uproszczeń przytoczonej wyżej sytuacji. Po pierwsze: funkcja gęstości f może przyjmować wartości 0 lub 1. I tylko takie. To sprawia, mówiąc kolowialnie, że nasz model odróżnia fakt, że w pewnym punkcie \mathbb{R}^n punkt badanego przez nas obiektu K istnieje, lub nie. To jeszcze za mało, by uniknąć skomplikowanej analizy. Wygodnie jest dodatkowo założyć, że kształt K nie jest zbyt skomplikowany. Można to rozumieć na wiele sposobów. Dla nas punktem wyjścia będą tzw. ciała wypukłe, a więc zwarte i wypukłe zbiory $K \subset \mathbb{R}^n$ o niepustych wnętrzach. Zdecydowana większość zagadnień rozważana będzie na płaszczyźnie.

¹Choć dla ogólnego ciała wypukłego w \mathbb{R}^3 problem daleki jest jeszcze od rozstrzygnięcia, wiadomo jak odzyskiwać dokładną objętość elipsoidy na podstawie pól rzutów tej elipsy na płaszczyzny prostopadłe do wszystkich możliwych kierunków w \mathbb{R}^3 .

Przyjmujemy następujący zestaw oznaczeń: przez 0 rozumiemy początek układu współrzędnych. Okrąg jednostkowy to S^1 . Kierunki na płaszczyźnie utożsamiamy będziemy z wektorami jednostkowymi lub równoważnie z punktami $u \in S^1$. Prosta przechodzącą przez 0 o kierunku u oznaczamy jako l_u . Prosta prostopadłą do u przechodzącą przez 0 oznaczamy przez u^\perp . Podamy teraz ścisłą definicję tego, co będziemy w dalszym ciągu rozumieć jako wiązkę promieni X :

Definicja 1 (Wiązka X_u) Niech C będzie ciałem wypukłym w \mathbb{R}^2 , zaś $u \in S^1$. Funkcję $X_u C : u^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wiązką X ciała C w kierunku u jeśli $X_u(t) = |(t + l_u) \cap C|$.

Rysunek poniżej powinien rozwiązać wszelkie wątpliwości co do natury zdefiniowanego obiektu. Przedstawia on w sposób poglądowy wykres funkcji $X_u C$:



Przypomnijmy, że o C możemy tu myśleć dwojako – albo jako o zbiorze wypukłym, albo jak o funkcji charakterystycznej f zbioru C . Zgadza się to z wcześniejszymi, ogólniejszymi uwagami. Oczywiście dla $t \in u^\perp$ całka z funkcji f po prostej $t + l_u$ wynosi dokładnie długość odcinka C zawartego w prostej $t + l_u$. W ten sposób mamy też naturalną definicję $X_u f$ dla funkcji gęstości.

Naturalnym zagadnieniem jest następujące: czy istnieje zbiór $S \subset S^1$ kierunków taki, że dowolne ciało wypukłe C jest opisane jednoznacznie przy pomocy rodziny funkcji $X_s C, s \in S$? Dokładniej, czy jeśli dla pewnych dwóch ciał wypukłych C, C' mamy $X_s C = X_s C'$, dla każdego $s \in S$, to czy $C = C'$? Wypada tu odnotować, że położenie ciała wypukłego jest dla nas istotne. Tak więc np. ciało K i jego nietrywialne przesunięcie, obrót itd., a więc cała przystające doń, ale nie identyczne – chcemy rozróżniać. Ma to sens z punktu widzenia tomografii, interesuje przecież nie tylko to, jaki kształt ma guz pacjenta, ale także 'gdzie' i 'jak' jest on położony...

Jeśli S jest zbiorem nieskończonym, wówczas odpowiedź brzmi: tak. Jest to jeden z wyników Radona uzyskany przy okazji pracy nad ogólniejszymi zagadnieniami, opisanymi wyżej.

Twierdzenie 1 (Radon) *Niech f będzie ograniczoną funkcją mierzalną w \mathbb{R}^n , znikającą poza pewnym zbiorem ograniczonym. Załóżmy, że $S \subset S^{n-1}$ jest zbiorem nieskończonym. Jeśli $X_u f = 0$ dla wszystkich $u \in S$, wówczas $f = 0$, γ_n – prawie wszędzie.*

Jeśli więc za f przyjmiemy różnicę funkcji charakterystycznych zbiorów C i C' , wówczas spełni ona założenia twierdzenia powyżej. Zatem $C = C'$.

Może więc wystarczy skończenie wiele kierunków? Czy istnieje n , że dla dowolnego $S \in S^1$ mocy nie mniejszej od n mamy własność opisaną wyżej? Okazuje się, że nie. Jest jasne, że jeden kierunek nie wystarczy. Dla ciał wypukłych K, K' równoważne są bowiem warunki: $X_u K = X_u K' \Leftrightarrow S_u(K) = S_u(K')$, gdzie S_u jest symetryzacją Steinera względem u . Pokażemy, że dla dowolnej liczby $n \geq 2$ istnieje zbiór $S_n \in S^1$ mocy $2n$ oraz ciała wypukłe W_n, U_n , których zbiór ten nie rozróżnia.

Lemat 1 *Dany jest trójkąt ABC . Niech C' będzie dowolnym punktem prostej równoległej do AB przechodzącej przez C . Wówczas jeśli u jest kierunkiem prostej zawierającej AB , to $X_u(ABC) = X_u(ABC')$.*

Dowód wynika natychmiast z twierdzenia Talesa. Rozważmy teraz n – kąt foremny W_n o środku w początku układu współrzędnych. Niech U_n będzie obrazem W_n przy obrocie wokół 0 o kąt π/n . Łatwo widzieć, że $W = \text{conv}(W_n \cup U_n)$ jest $2n$ – kątem foremnym. Niech u będzie kierunkiem równoległym do jednego z boków W . Wtedy $X_u(W_n) = X_u(U_n)$.

Z przytoczonego argumentu wynika już jeden istotny wniosek: poszukiwany zbiór $S \subset S^1$ nie może być podzbiorem kierunków wyznaczonych przez boki wielokąta foremnego. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym nieosobliwym przekształceniem afinicznym.² Jeśli dla pewnego $u \in S^1$ mamy $X_u K = X_u K'$, to także $X_{\phi u}(\phi(K)) = X_{\phi u}(\phi(K'))$. Istotnie – nieosobliwe przekształcenia afiniczne zachowują równoległość oraz stosunek równoległych do siebie odcinków. Zatem S nie może być w istocie podzbiorem kierunków pochodzących od boków obrazu wielokąta foremnego przy nieosobliwym przekształceniu afinicznym (takie wielokąty nazywamy afinicznie foremnymi). Odnotujmy w tym miejscu jeszcze, że każdy trójkąt jest afinicznie foremny, więc poszukiwany zbiór S jest co najmniej czteroelementowy.

Wydaje się, że nie zdziałaliśmy wiele, wykluczając co najwyżej trywialne przypadki. Tymczasem, niemal nic więcej wykluczyć się nie da.

Twierdzenie 2 *Ciała wypukłe są wyznaczone jednoznacznie przez rodziny $X_s, s \in S \subset S^1$ wtedy i tylko wtedy, gdy S nie jest podzbiorem kierunków wyznaczonych przez boki wielokąta afinicznie foremnego.*

Nie przedstawimy tu pełnego dowodu, a jedynie drogę do niego prowadzącą. Zanim to zrobimy przypomnimy krótko istotne dla dalszych rozważań pojęcia:

Definicja 2 (S – foremny wielokąt) *Niech S będzie skończonym zbiorem kierunków. Wielokąt W jest S – foremny jeśli ma następującą własność: dla każdego wierzchołka v tego wielokąta i dla dowolnego $u \in S$ prosta $l_u + v$, przechodząca przez v i równoległa do u przechodzi przez pewien inny wierzchołek v' tego wielokąta. Mówimy, że jeśli W jest słabo S – foremny, jeśli dopuszczamy możliwość $v = v'$.*

²Macierz części liniowej tego przekształcenia ma niezerowy wyznacznik

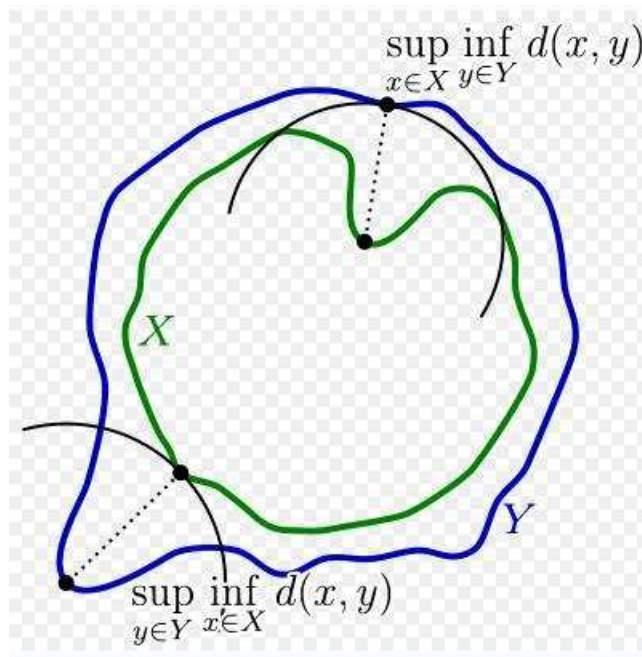
Definicja 3 (Środek ciężkości) Niech μ będzie miarą w \mathbb{R}^n , E zaś – zbiorem ograniczonym dodatniej miary. Wówczas środek ciężkości (centroid) zbioru E względem μ to punkt:

$$c = \frac{1}{\mu(E)} \int_E x d\mu(x).$$

Definicja 4 (Metryka Hausdorffa) Na rodzinie zbiorów zwartych przestrzeni \mathbb{R}^n z metryką euklidesową $|\cdot|$ można wprowadzić metrykę, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\rho(E, F) = \max\{\sup_{x \in E} \inf_{y \in F} |x, y|, \sup_{x \in F} \inf_{y \in E} |x, y|\}.$$

Metryka Hausdorffa wydaje się na pierwszy rzut oka skomplikowanym pojęciem. Intuicyjnie mówi ona – jak bardzo należy poszerzyć (przez otoczki wypukłe) zbiory E, F do \bar{E}, \bar{F} , by $E \subseteq \bar{F}$ i odwrotnie. Na przykład – współśrodkowe koła odległe są od siebie o różnicę ich promieni. Poniższy rysunek powinien służyć za dobrą ilustrację:



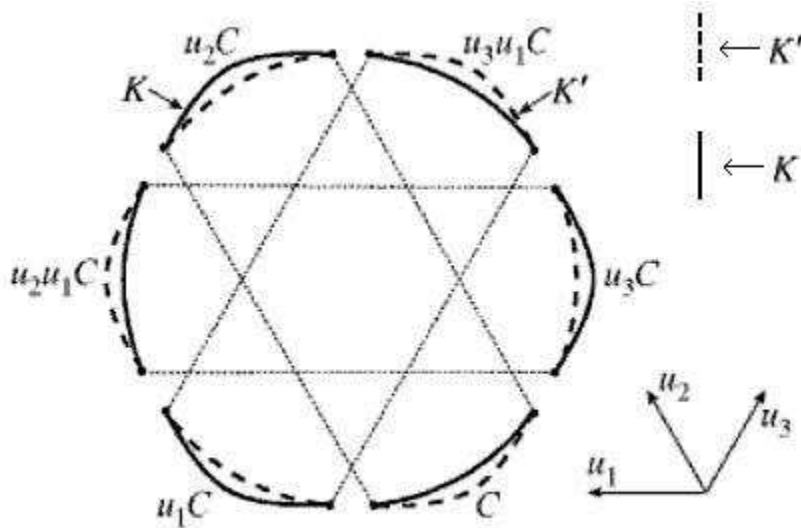
Idea dowodu jest następująca: jeśli pewnie dwa ciała wypukłe K, K' są różne, aczkolwiek nierozróżnialne przez pewien skończony zbiór kierunków $S \subset S^1$, wówczas istnieje wielokąt S – foremny związany z układem K, K' . Aby zrozumieć, że jest to fakt fundamentalny należy zobaczyć, że nie każdy układ kierunków S prowadzi do istnienia wielokąta S – foremnego. Jak się okaże – jedynie kierunki pochodzące od kierunków wielokątów afinicznie foremnych mogą być kierunkami wielokątów S – foremnych. Do tego potrzeba będzie zbieżności w metryce Hausdorffa...

Najbardziej delikatnym fragmentem rozumowania jest przyporządkowanie parze różnych K, K' odpowiadającego im wielokąta S – regularnego. Kluczem jest tu wykorzystanie środków ciężkości. Zaczniemy od prostej uwagi, wywodzącej się wprost z definicji tychże obiektów:

Lemat 2 Niech E oraz E' – spójne ciała takie, że dla ustalonego kierunku $u \in S^1$ mamy $X_u E = X_u E'$. Wtedy środki ciężkości E oraz E' leżą na tej samej prostej. Co więcej, kierunek tej prostej to u .

Natychmiastowy skutek tego lematu jest taki, że jeśli różne ciała wypukłe są nierozróżnialne przez X_u, X_v , $u, v \in S$, wówczas środki ciężkości tych ciał pokrywają się. W szczególności, skoro środek ciężkości ciała wypukłego należy do jego wnętrza, to $\text{int}K \cap \text{int}K' \neq \emptyset$. Skoro ciała te są różne, to w istocie także

$int(K \setminus K')$ oraz $int(K' \setminus K)$ muszą być niepuste. Niech C będzie składową spójną zbioru $int(K \setminus K')$. Spójrzmy na następujący rysunek:



Niech $u_1 C$ oznacza zbiór punktów $x \in int(K' \setminus K)$, że $l_{u_1} + x$ (prosta przechodząca przez x o kierunku u_1) przecina C . Oczywiście zbiór taki istnieje na mocy zasady Cavalieriego. Jest on rozłączny z C i jest on składową spójną $int(K' \setminus K)$. Można definiować kolejne iteracje i otrzymać tzw. system składowych spójnych związanych z C postaci:

$$\mathcal{C} = \{u_{i_m} \cdots u_{i_1} C : m \in \mathbb{N}, u_{i_j} \in S\}.$$

Okazuje się, i to postaramy się tu uzasadnić, że prawdziwe są dwie własności tego systemu. Po pierwsze jest to zawsze zbiór skończony, moc którego ogranicza z dołu podwojenie mocy S : $|\mathcal{C}| \geq 2|S|$. Co ważniejsze jednak, zbiór środków ciężkości składowych spójnych należących do \mathcal{C} związanych ze składową spójną C zbioru $K \Delta K'$, układa się w wierzchołki S – regularnego wielokąta.

Elementy \mathcal{C} są z definicji rozłączne. Co więcej, na mocy zasady Cavalieriego mają one równe i niezerowe pola. Skoro każdy z nich zawarty jest w zbiorze zwartym $K \cup K'$, to jest ich skończenie wiele. Niech więc $m = |\mathcal{C}|$ i \mathcal{C} składa się z C_1, C_2, \dots, C_m , zorientowanych zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara. Jeśli $u \in S$, to $uC_1 = C_k$ dla pewnego $k \neq 1$, parzystego. Dlaczego? Łatwo widzieć, że jeśli C jest komponentem $K \setminus K'$, to najbliżej 'na lewo' i najbliżej 'na prawo' od niego znajdują się komponenty z $K' \setminus K$. Istotnie, wszystkie elementy \mathcal{C} widać z C pod kierunkami będącymi sumami kierunków z S . Jeśli więc ponumerujemy kierunki z S jako u_1, u_2, \dots, u_n , to jeśli na lewo od C leży zbiór $u_{i_1} \cdots u_{i_m} C$, to leży też zbiór $u_{\min(i_j)} C$. Zatem wśród elementów C_1, C_2, \dots, C_m są na przemian komponenty z $K \setminus K'$ oraz z $K' \setminus K$. Zatem $uC_1 = C_k$ dla pewnego k parzystego. Co więcej, jeśli dla pewnego $u' \in C$ mamy $u'C_1 = C_{k'}$, to $k \neq k'$, bo te muszą mieć różne środki ciężkości. Liczb parzystych k jest co najwyżej $[m/2]$ zatem $m \geq 2n$. Notabene pokazaliśmy też istnienie górnego ograniczenia m .

Łatwiej będzie już pokazać, że wierzchołki utworzone przez środki ciężkości tworzą wielokąt S – foremny. Niech V będzie zbiorem środków ciężkości komponentów rodziny \mathcal{C} . Niech środkiem ciężkości $C \in \mathcal{C}$ będzie $v \in V$. Zauważmy, że $v \in conv C$. Niech t będzie odcinkiem łączącym punkty przecięcia brzegów K oraz K' wyznaczające komponent C . Wtedy t oddziela $conv(C)$ od zbioru $V \setminus \{v\}$. Zatem elementy V układają się w wierzchołki wielokąta wypukłego niezdegenerowanego. Dlaczego S – foremny? Jeśli

v jest środkiem ciężkości C , to zgodnie z lematem środek ciężkości uC , $u \in S$ leży na prostej $v + l_u$.

Związaaliśmy więc z parą różnych, acz nierozróżnialnych przez S , ciał wypukłych pewien wielokąt S – foremny. Pozostaje więc pytanie: jakie $S \subset S^1$ mogą być kierunkami wielokątów S – foremnych? Okazuje się, jak wspomnieliśmy wyżej, że są to jedynie podzbiory kierunków pochodzących od kierunków boków wielokątów afinicznie foremnych – tych samych, które wyeliminowaliśmy jako potencjalnie interesujące. W celu pokazania tego faktu wykazuje się, że mając S – foremny wielokąt Q_0 umiemy skonstruować z niego ciąg Q_n , $n \geq 1$ wielokątów S – foremnych, które zbiegają w sensie Hausdorffa do wielokąta afinicznie foremnego. Tego faktu nie będziemy tutaj uzasadniać. Zauważmy jedynie, że granica Hausdorffa wielokątów S – foremnych sama jest wielokątem S – foremnym. Skoro tak, to S jest zbiorem kierunków wyznaczonych przez boki lub przekątne wielokąta granicznego W o n – bokach. Zauważmy jednak, że zbiór ten jest zbiorem kierunków wyznaczonych przez boki $2n$ – kąta afinicznie foremnego. Dostajemy go tak: jeśli mamy n – kąt foremny W_n i $\phi : W_n \rightarrow W$ – afiniczne niezdegenerowane, to nasz $2n$ – kąt to $\phi(W_{2n})$, a więc obraz $2n$ – kąta foremnego przy tym samym odwzorowaniu. W ten sposób S to podzbiór kierunków wyznaczonych przez boki $\phi(W_{2n})$. Zatem jeśli S nie jest podzbiorem kierunków wyznaczonych przez boki wielokąta afinicznie foremnego, to rodzina $X_u, u \in S$ rozróżnia dowolne dwa różne ciała wypukłe.

Twierdzenie 3 *Ciała wypukłe są rozróżniane przez odpowiednie zbiory kierunków złożone jedynie z czterech elementów.*

Idea dowodu jest następująca: chcemy pokazać, że istnieją cztery kierunki, które nie są podzbiorem kierunków wielokąta afinicznie foremnego. Weźmy dowolny n – kąt foremny. Jak wiadomo, jego wierzchołki znajdują się w punktach ω^i , gdzie ω to pierwiastek pierwotny stopnia n z 1 , zaś $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Niech s_1, s_2, s_3, s_4 to nachylenia dowolnych czterech boków (zakładamy, że nie pionowych). Są to tangensy kątów $\pi i/n$, gdzie i j.w. Wiadomo, że $\text{tg}(n\phi) = f(\text{tg } \phi)$ dla pewnej funkcji wymiernej f . Zatem $f(s) = 0$, czyli s jest liczbą algebraiczną. Rozważmy teraz dwustosunek s_1, s_2, s_3, s_4 . Jest to liczba algebraiczna. Przy przekształceniach afinicznych dwustosunek nie ulega zmianie. Zatem dwustosunek nachylenia czterech boków wielokąta afinicznie foremnego jest liczbą algebraiczną. Nie jest zaś problemem znaleźć cztery liczby rzeczywiste, których dwustosunek algebraiczny nie będzie. To kończy dowód.

Przypomnijmy, że trzy kierunki nie wystarczały do rozróżniania ciał wypukłych, ponieważ każdy zestaw trzech nierównoległych kierunków pochodzi od wielokąta afinicznie foremnego. Jako przykładów, których rozróżnić nie można używaliśmy figur przystających, obróconych co najwyżej o pewien kąt. Wydawać by się mogło, że jest to dość szczególny przypadek. Okazuje się jednak, że i nieprzystające figury mogą być nierozróżnialne przez trzy kierunki.

Twierdzenie 4 *Niech S będzie podzbiorem kierunków boków wielokąta afinicznie foremnego. Ilość parami nie przystających wypukłych n – kątów o takich samych $X_u, u \in S$ rośnie wykładniczo wraz z n .*

Intuicja podpowiadająca nam, że mimo wszystko większość zbiorów wypukłych powinno być rozróżnialnych przy pomocy dwóch kierunków jest właściwa, ale jej precyzyjne wyrażenie wymaga delikatności. Przestrzeń (\mathcal{K}_0^n, ρ) (ρ – metryka Hausdorffa) jest zupełna. Mówimy, że pewna własność jest spełniona w X prawie wszędzie w sensie Baire’a, jeśli podzbiór $Y \subset X$, na którym jest spełniona, jest przecięciem przeliczalnie wielu zbiorów o wnętrzach gęstych w X . Zbiory takie nazywamy zbiorami drugiej kategorii... Okazuje się, że własność rozróżniania zbiorów wypukłych przy pomocy dwóch kierunków (nie będących

afinicznie foremnymi...) zachodzi w tym sensie dla prawie wszystkich ciał wypukłych na płaszczyźnie.

Jak wygląda sytuacja dla zbiorów niewypukłych? Na przykład wielokątów prostych, albo zbiorów gwiaździstych? Okazuje się, że zbiorów gwiaździstych nie da się determinować przy pomocy żadnego skończonego zbioru kierunków. Dla każdego n istnieje n – kąt prosty, którego nie wyznaczymy jednoznacznie przy pomocy naświetleń wykonywanych z n – elementowego zbioru kierunków. Dowody tych faktów pochodzą z [4].

Problem, którego rozwiązanie jedynie tu naszkicowaliśmy, może występować w postaci różnych interesujących mutacji.

- Wyobraźmy sobie na przykład, że znamy kształt i orientację obiektu, który chcemy odszukać. Na tej podstawie próbujemy tak dobrać S , by **weryfikacja** była jednoznaczna. Nie wchodząc w szczegóły powiemy tylko, że wystarczą do tego trzy kierunki. (dobre do odpowiedniego kształtu). Nie można tej stałej polepszyć. Każdy sześciokąt wypukły o tej własności, że żadna z jego przekątnych nie jest równoległa do żadnego z boków jest tu kontrprzykładem.
- Można spróbować wyśrodkować dwa powyższe problemy. Załóżmy, że nie znamy kształtu poszukiwanego przez tomograf obiektu. Dobieramy więc jakiś kierunek u_1 , wykonujemy X_{u_1} , oglądamy zdjęcie i na jego podstawie dobieramy kolejny kierunek, robimy zdjęcie, itd... W takich procedurach ogólne algorytmy nie są opracowane. Wiadomo jednak, że jeśli poszukujemy wielokąta, trzy naświetlenia wystarczą. Nie wiadomo, czy dla dowolnych ciał wypukłych trzy to wystarczająco wiele.
- Można wreszcie nie wypuszczać równoległych wiązek promieni X . W tomografii komputerowej wiązki wypuszcza się tak naprawdę z pewnych ognisk. Mamy więc tu pewne uogólnienie. Wiązkę równoległą traktujemy jako naświetlanie z punktu w nieskończoności. Odpowiednikiem funkcji X_u , czy równoważnie – symetryzacji Steinera przy wiązce równoległej, jest tu obiekt $\Delta_p K$ zwany '**chordal symmetral**', co wydaje się trudne do przetłumaczenia. Jak tworzymy taki obiekt? Bieremy punkt p , z którego wypuściliśmy promień $l_u + p$ w kierunku $u \in S^1$. Przecięcie $(l_u + p) \cap K$ ma pewną miarę jednowymiarową μ . Tworzymy teraz odcinek K_u o środku w punkcie p i długości μ , którego kierunkiem jest u (gdy miara jest zerowa, odcinka nie tworzymy). Suma mnogościowa K_u , $u \in S^1$ jest obiektem naszego zainteresowania. Przykład mamy na rysunku poniżej:

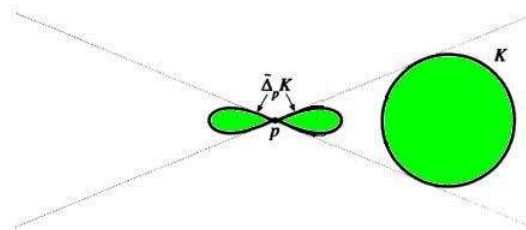


Figure 5.3. Chordal symmetral of a disk.

Mówimy więc, że zbiór P naświetleń z punktów $p \in \mathbb{R}^2, p \in P$ wyznacza jednoznacznie zbiór

mierzalny K jeśli dla każdego zbioru mierzalnego K' istnieje takie $p \in P$, że mamy $\Delta_p K \neq \Delta_p K'$. Wyniki dotyczące tej materii są już znacznie trudniejsze niż te przytoczone wyżej. Odnotujmy tutaj trzy z nich:

Twierdzenie 5 *Ciała wypukłe są wyznaczone jednoznacznie przez promienie X wypuszczone z dowolnego zbioru czterech punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Zadany kształt można zweryfikować (patrz def. wyżej) przy pomocy dowolnego zbioru trzech punktów.*

Twierdzenie 6 *Promienie X wypuszczone z trzech niewspółliniowych punktów A, B, C determinują wszystkie ciała wypukłe K takie, że $\text{int}K \subseteq \text{conv}\{A, B, C\}$.*

Twierdzenie 7 *Ciało wypukłe K jest wyznaczone jednoznacznie przez promienie wypuszczone z dwóch punktów A, B , jedynie w jednej z następujących sytuacji:*

- Prosta l przechodząca przez A, B przecina wnętrze K , do wnętrza tego nie należą jednak ani A , ani B , oraz składowa $l \setminus \{p_1, p_2\}$ przecinająca K jest określona.
- Prosta l podpira K .
- A, B należą do wnętrza K (a więc dwa punkty determinują wszystkie ciała wypukłe, które je zawierają).

Można też miksować pojęcia – punkty na płaszczyźnie i punkty w nieskończoności to razem płaszczyzna rzutowa. Czy jeśli wykonujemy naświetlania z punktów położonych ogólnie na płaszczyźnie rzutowej, sytuacja ulega drastycznej zmianie? Otóż nie, znowu wystarczą cztery kierunki, żadne trzy nie mogą być jednak współliniowe (załatwia to przypadek rozważany w tym referacie – nie wszystkie kierunki rzutowania mogą być równoległe, bo należałyby wszystkie do prostej w nieskończoności). Łatwo wskazać przykład dwóch zbiorów nierozróżnialnych przez dwa promienie X z płaszczyzny rzutowej. Jest to trójkąt równoramienny i jego kopia w symetrii względem dowolnej prostej równoległej do podstawy.

Referat ten porusza właściwie jedynie wierzchołek góry lodowej, jaką jest materia, którą zajmuje się opisywana dziedzina. Pominęliśmy całkowicie przypadki ciał wielowymiarowych, zagadnienia związane z rzutowaniami, a także niezwykle interesujące zagadnienia dotyczące tzw. dyskretnej tomografii geometrycznej, posmak których Czytelnik odnajdzie na przykład w prezentacji [1].

Literatura

- [1] DULIO P.: *Symmetries arising from X – rays*, Fourth International Workshop on Convex Geometry-Analytic Aspects, Cortona, Italy, June 3-9, 2007. Dostępny online pod adresem: <http://web.math.unifi.it/users/salani/cortona2007/talks/dulio.pdf>
- [2] GARDNER R.J.: *Geometric Tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 58, Cambridge University Press (1995).
- [3] GARDNER R.J.: *Geometric Tomography*, Notices of AMS, 42 (1995), 422 – 429.
- [4] GARDNER R.J.: *X - Rays of Polygons*, Discrete and Computational Geometry, 7 (1992), 281 – 293.