Półgrupa klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry łącznej

Arkadiusz Męcel
Uniwersytet Warszawski

Promotor:

Prof. dr hab. **Jan Okniński**

Recenzenci:

Prof. dr hab. **Jan Krempa**
Prof. dr hab. **Daniel Simson**

Warszawa, 20.11.2014r.

Podstawowe pojęcia i oznaczenia

- **półgrupa** – zbiór z dwuargumentowym działaniem łącznym (może nie posiadać elementu neutralnego),
- **algebra** nad ciałem $\mathbb{K}$ – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ z kompatybilną strukturą pierścienia z jedynką,
- **ideał lewostronny** algebry A: podprzestrzeń $V \subseteq A$ taka, że $AV \subseteq V$.

Podstawowe pojęcia i oznaczenia

- **półgrupa** – zbiór z dwuargumentowym działaniem łącznym (może nie posiadać elementu neutralnego),
- **algebra** nad ciałem $\mathbb{K}$ – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ z kompatybilną strukturą pierścienia z jedynką,
- **ideał lewostronny** algebry A: podprzestrzeń $V \subseteq A$ taka, że $AV \subseteq V$.

- $\boldsymbol{A}$ – skończenie wymiarowa algebra z jedynką nad ciałem $\mathbb{K}$.
- $\boldsymbol{U(A)}$ – grupa elementów odwracalnych w A,
- $\boldsymbol{L(A)}$ – zbiór ideałów lewostronnych w A,
- $\boldsymbol{I(A)}$ – zbiór ideałów dwustronnych w A,
- $\boldsymbol{J(A)}$ – maksymalny ideał nilpotentny w A.

Klasy sprzężoności ideałów lewostronnych

Definicja

Rozważmy działanie $U(A) \times A \to A$ grupy $U(A)$ na algebrę A zadane wzorem:

$$(u, a) \mapsto uau^{-1}, \qquad \text{dla } u \in U(A), a \in A.$$

Orbity tego działania nazywamy **klasami sprzężoności** w A.

Przyjmujemy przy tym następujace oznaczenia:

- $[L]$ – klasa sprzężoności ideału lewostronnego L w A,
- **$C(A)$ – zbiór wszystkich klas sprzężonosci ideałów lewostronnych w A.**

Struktura półgrupowa na $C(A)$

Definicja

Na $C(A)$ określić można następujące mnożenie półgrupowe:

$$[L_1][L_2] := [L_1 L_2], \qquad \text{gdzie } L_1, L_2 \in L(A).$$

Przykład: $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy ideał lewostronny jest generowany przez idempotent,
- jest $n+1$ klas sprzężoności ideałów lewostronnych,
- $[M][N] = [N]$, dla niezerowych elementów $C(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$.

Struktura półgrupowa na $C(A)$

Definicja

Na $C(A)$ określić można następujące mnożenie półgrupowe:

$$[L_1][L_2] := [L_1 L_2], \qquad \text{gdzie } L_1, L_2 \in L(A).$$

Przykład: $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

- każdy ideał lewostronny jest generowany przez idempotent,
- jest $n+1$ klas sprzężoności ideałów lewostronnych,
- $[M][N] = [N]$, dla niezerowych elementów $C(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$.

Zagadnienia badawcze

1. Zbadać strukturę półgrupy $C(A)$.
2. Zbadać warunki, przy których $C(A)$ jest półgrupą skończoną.
3. Zbadać związki między własnościami A i $C(A)$.

Twierdzenie strukturalne dla $C(A)$

Twierdzenie

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas istnieje skończony łańcuch ideałów półgrupy $C(A)$:

$$0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots \subsetneq I_n = C(A)$$

taki, że każdy jego faktor I_{k+1}/I_k jest albo półgrupą **nilpotentną**, albo **całkowicie 0-prostą**, dla $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Półgrupy posiadające skończony łańcuch ideałów z faktorami nilpotentnymi i całkowicie 0-prostymi:

1. każda **półgrupa skończona**,
2. **półgrupa multyplikatywna** $(A, \cdot)$.

Połgrupa $C(A)$ ma związki z konstrukcjami półgrupowymi na podzbiorach $(A, \cdot)$, między innymi:

- półgrupą $L(A)$ **ideałów lewostronnych** algebry A,
- półgrupą $\mathcal{D}(A)$ **podzbiorów domkniętych** w $(A, \cdot)$,
- półgrupą $\mathcal{S}(A)$ **podprzestrzeni liniowych** w $(A, \cdot)$.

Algebry skończonego typu reprezentacyjnego

Definicja

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$. Powiemy, że A jest **skończonego typu (reprezentacyjnego)** jeśli istnieje jedynie skończenie wiele klas izomorfizmu skończenie wymiarowych nierozkładalnych A-modułów lewostronnych.

Algebry skończonego typu reprezentacyjnego

Definicja

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$. Powiemy, że A jest **skończonego typu (reprezentacyjnego)** jeśli istnieje jedynie skończenie wiele klas izomorfizmu skończenie wymiarowych nierozkładalnych A-modułów lewostronnych.

Twierdzenie (Okniński, Renner)

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas:

- jeśli A jest skończonego typu, to $C(A)$ jest skończona,
- jesli $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte i $C(\mathrm{M}_n(A))$ jest skończona, dla wszystkich $n > 1$, to A jest skończonego typu.

Twierdzenie

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}$. Następujące warunki są równoważne:

- $C(A)$ jest skończona,
- liczba klas sprzężoności ideałów lewostronnych nilpotentnych w A jest skończona.

Problem skończoności $C(A)$

Problem

Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym:

- ciało $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte,
- zbiór ideałów dwustronnych $I(A)$ algebry A jest skończony,
- $J(A)^2 = 0$.

Kiedy półgrupa $C(A)$ jest skończona?

Struktura radykału Jacobsona

Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, przy czym $|I(A)| < \infty$ oraz $J(A)^2 = 0$. Niech:

$$J(A) = \begin{bmatrix} e_1 J(A) e_1 & e_1 J(A) e_2 & \dots & e_1 J(A) e_t \\ e_2 J(A) e_1 & e_2 J(A) e_2 & \dots & e_2 J(A) e_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_t J(A) e_1 & e_t J(A) e_2 & \dots & e_t J(A) e_t \end{bmatrix},$$

Wówczas jeśli $e_i J(A) e_j \neq 0$, dla pewnych $1 \leqslant i, j \leqslant t$, to:

$$\boxed{e_i J(A) e_j \simeq \mathrm{M}_{n_i \times n_j}(\mathbb{K}).}$$

Redukcja do problemu macierzowego

Niech A będzie algebrą spełniającą założenia Problemu, oraz:

$$A/J(A) \simeq \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{M}_{n_2}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_{n_t}(\mathbb{K}).$$

Rozważmy zbiór $\mathcal{M}_A$ macierzy blokowych postaci:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \ldots & a_{tt} \end{bmatrix},$$

gdzie:

- $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow e_i J(A) e_j \neq 0$,
- $a_{ij} \in \mathrm{M}_{k_i \times n_j}(\mathbb{K})$, przy czym $k_i = \sum_{j: e_i J(A) e_j \neq 0} n_j$.

Redukcja do problemu macierzowego

Rozważmy działanie $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^o$ na $\mathcal{M}_A$ grup

$$\mathfrak{H} := \mathrm{Gl}_{k_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{k_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Gl}_{k_t}(\mathbb{K}),$$

$$\mathfrak{G} := \mathrm{Gl}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{n_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Gl}_{n_t}(\mathbb{K}) :$$

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} = \begin{bmatrix} h_1 a_{11} g_1^{-1} & h_1 a_{12} g_2^{-1} & \ldots & h_1 a_{1t} g_t^{-1} \\ h_2 a_{21} g_1^{-1} & h_2 a_{22} g_2^{-1} & \ldots & h_2 a_{2t} g_t^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_t a_{t1} g_1^{-1} & h_t a_{t2} g_2^{-1} & \ldots & h_t a_{tt} g_t^{-1} \end{bmatrix}, \qquad (\star)$$

gdzie:

$$\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_t), \quad \mathfrak{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_t).$$

Lemat

Niech A będzie skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, przy czym $|I(A)| < \infty$ oraz $J(A)^2 = 0$. Następujące warunki są równoważne:

- półgrupa $C(A)$ jest skończona,
- zbiór orbit działania $(\star)$ na $\mathcal{M}_A$ jest skończony.

Algebry o dużych blokach

Twierdzenie

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, niech $|I(A)| < \infty$ i $J(A)^2 = 0$, przy czym

$$A/J(A) \simeq \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_{n_t}(\mathbb{K}), \text{dla } n_i \geqslant 6.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

- półgrupa $C(A)$ jest skończona,
- algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego.

Twierdzenie

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$, niech $|I(A)| < \infty$ i $J(A)^2 = 0$, przy czym

$$A/J(A) \simeq \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_{n_t}(\mathbb{K}), \text{dla } n_i \leqslant 2.$$

Wówczas półgrupa $C(A)$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy szkielet $\mathcal{S}_A$ jest acykliczny i spełnia następujące warunki:

(i) $\mathcal{S}_A$ nie zawiera wierszowej czwórki,

(ii) $\mathcal{S}_A$ nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,

(iii) $\mathcal{S}_A$ nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,

(iv) graf rozdzielony szkieletu $\mathcal{S}_A$ nie zawiera grubej drogi węzłowej.

Problem izomorfizmu

Pytanie

Rozważmy algebry A, B – skończenie wymiarowe nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$ takie, że $C(A)$ oraz $C(B)$ są skończone i izomorficzne jako półgrupy. Czy $A \simeq B$?

Problem izomorfizmu

Pytanie

Rozważmy algebry A, B – skończenie wymiarowe nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$ takie, że $C(A)$ oraz $C(B)$ są skończone i izomorficzne jako półgrupy. Czy $A \simeq B$?

Twierdzenie

- Niech A, B będą skończenie wymiarowymi algebrami nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$. Jeśli $|C(A)| < \infty$ to

$$C(A) \simeq C(B) \Rightarrow A/J(A) \simeq B/J(B).$$

- Jeśli dodatkowo $J(A)^2 = 0$, to:

$$\boldsymbol{C(A) \simeq C(B) \Rightarrow A \simeq B.}$$

Prace i preprinty

1. Męcel A., Okniński J.: *Conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra*, Publ. Mat. 57 (2013), 477–496.
2. Męcel A., Okniński J.: *Algebras with finitely many conjugacy classes of left ideals versus algebras of finite representation type*. Złożone do publikacji (2014).
3. Męcel A.: *Conjugacy classes of left ideals in algebras of width two*. Preprint (2014).

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ