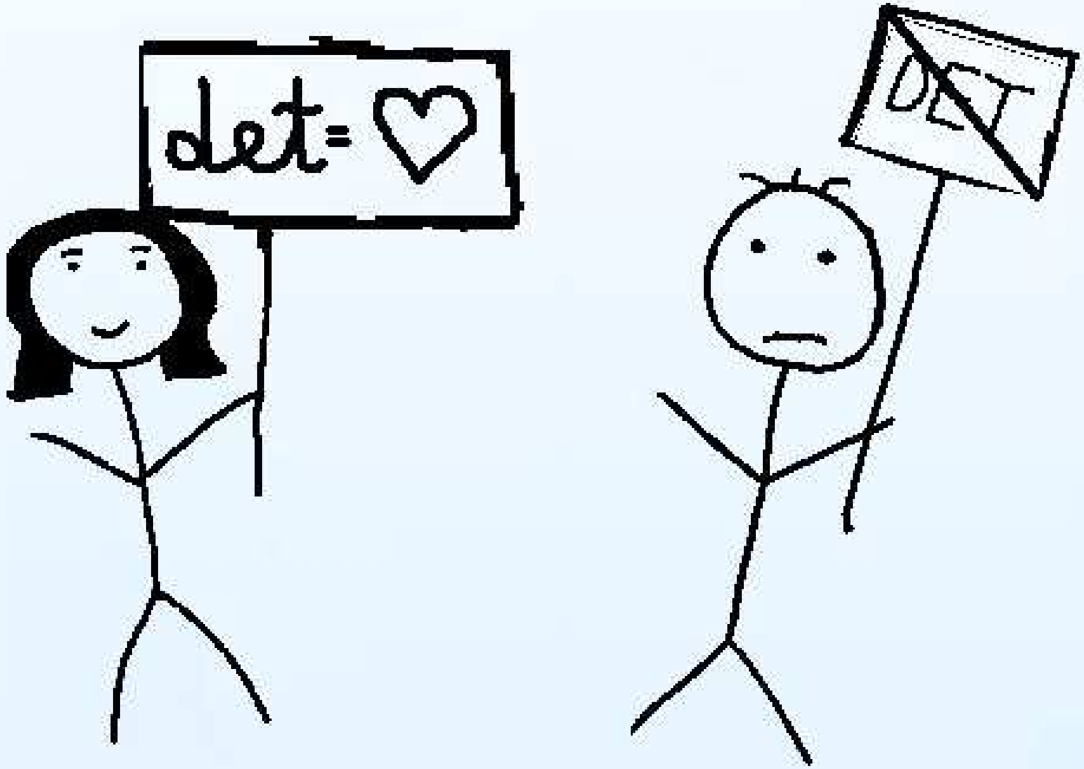
Precz z wyznacznikiem?



Kto mówi: „precz”?

Kto mówi: „precz”?

AXLER Sheldon, *Down with determinants!*,
American Mathematical Monthly 102 (1995), 139-154.

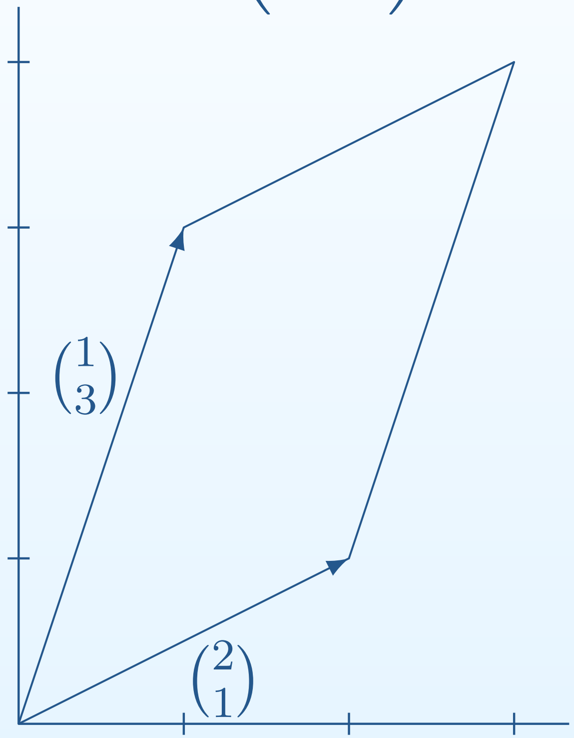
Kto mówi: „precz”?

„Determinants are difficult, ***non - intuitive****,*
and often defined without motivation”.

OBJĘTOŚĆ

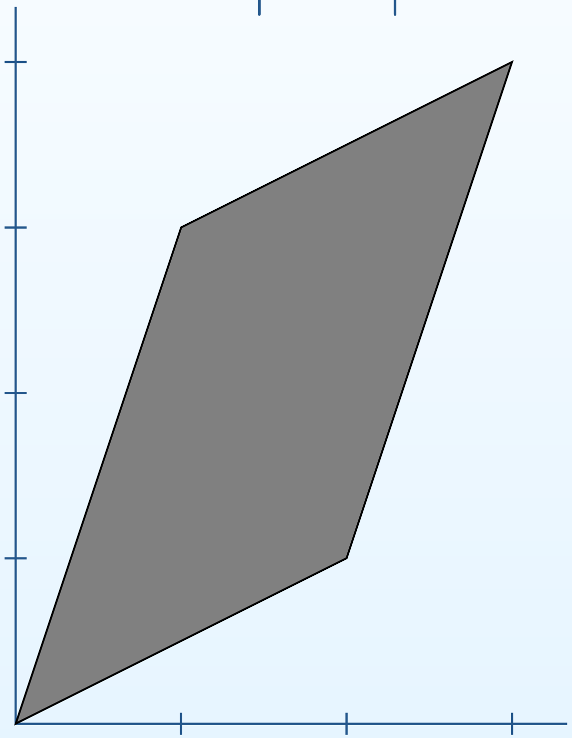
Objętość

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

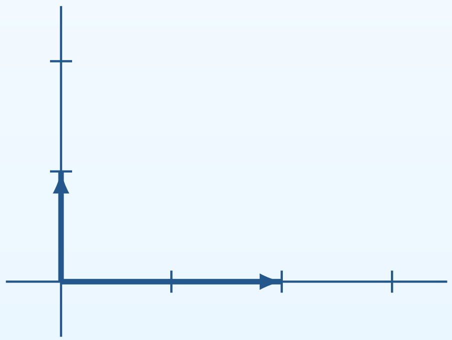


Objętość

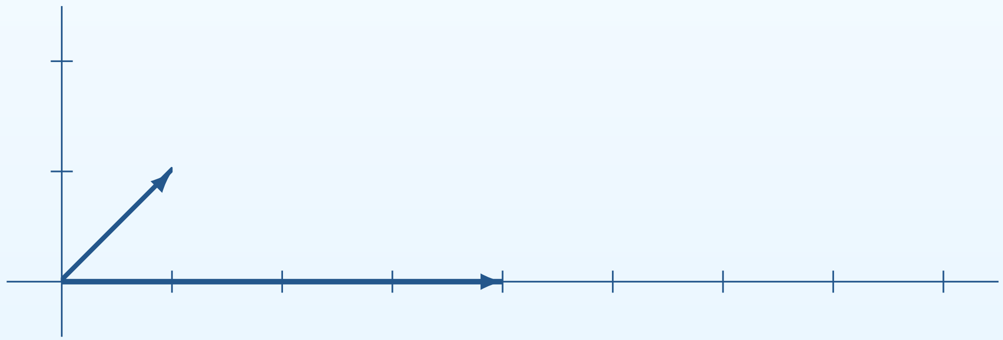
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$



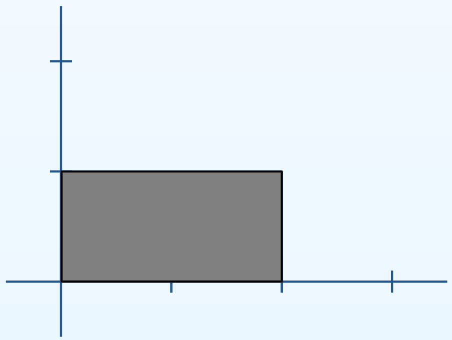
Zmiana objętości



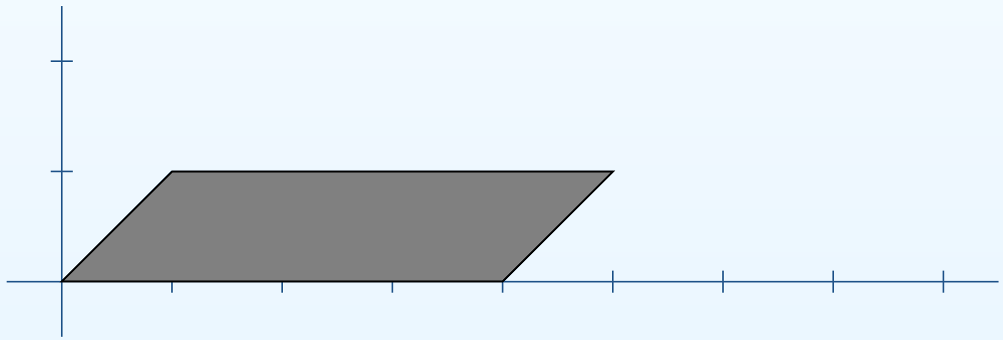
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$



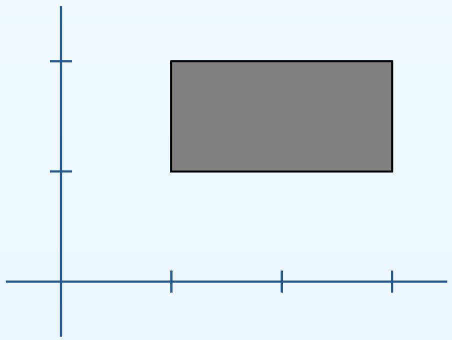
Zmiana objętości



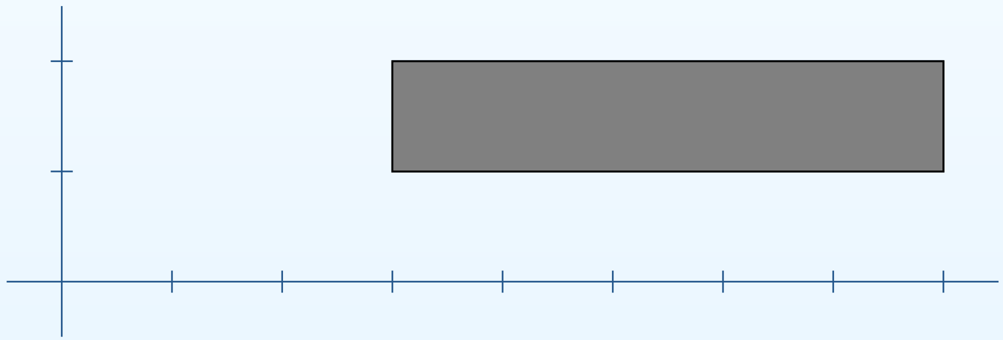
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



Zmiana objętości?



$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



WARTOŚCI WŁASNE

Produkt wartości własnych

Cauchy [1826]. *W przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^n$ *istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych przekształcenia liniowego* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* S *jest samosprzężone.*

Produkt wartości własnych

Cauchy [1826]. *W przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^n$ *istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych przekształcenia liniowego* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* S *jest samosprzężone.*

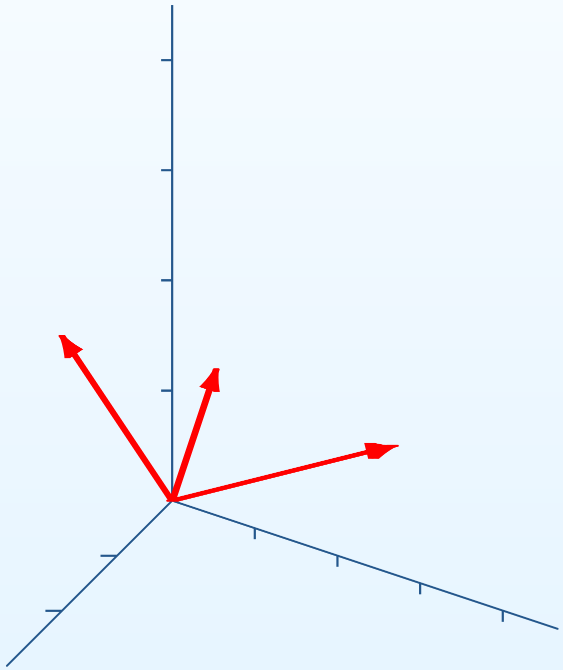
$$\langle Sv, w \rangle = \langle v, S^* w \rangle$$

Produkt wartości własnych

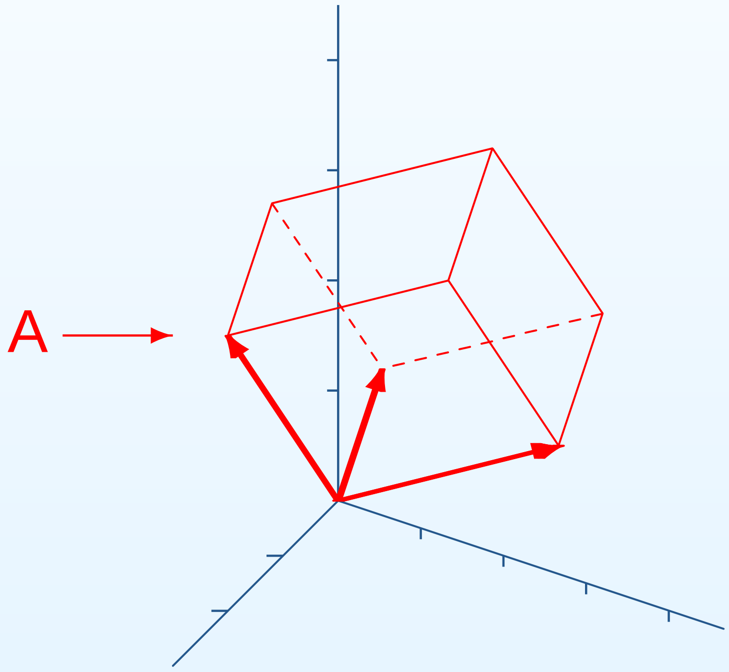
Cauchy [1826]. *W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych przekształcenia liniowego $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest samosprzężone.*

$$\langle Sv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle$$

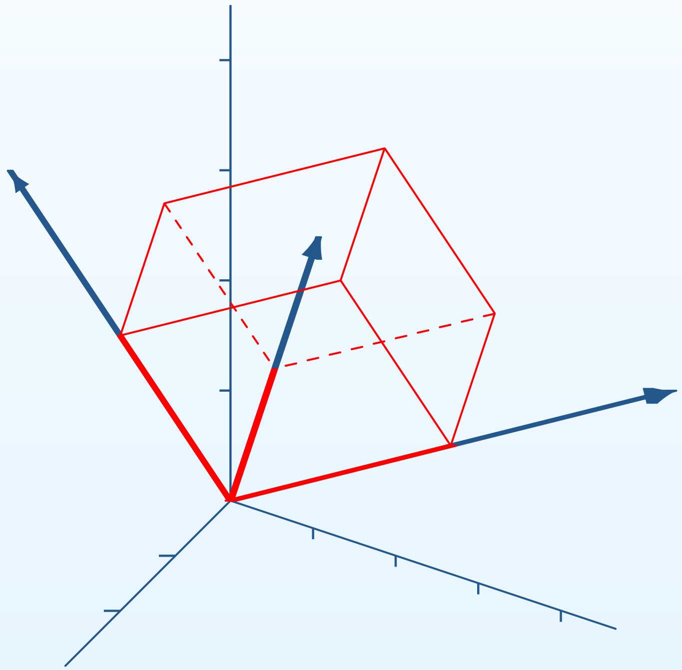
Produkt wartości własnych



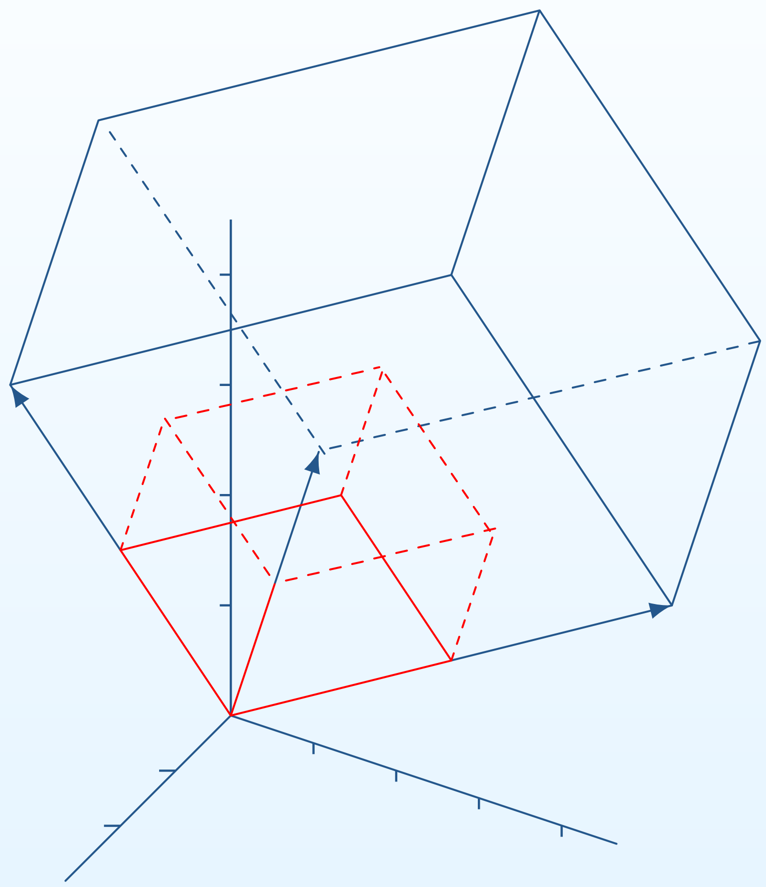
Produkt wartości własnych



Produkt wartości własnych



Produkt wartości własnych



Produkt wartości własnych

Cauchy [1826]. *W przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^n$ *istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych przekształcenia liniowego* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* S *jest samosprzężone.*

Wniosek. *„Zmiana objętości" przy przekształceniu samosprzężonym* S *wyraża się przez iloczyn wartości własnych S (licząc krotności).*

$$\frac{\mathit{vol}\,(S(A))}{\mathit{vol}(A)} = \prod_{\sigma(A)} a.$$

Produkt wartości własnych

Cauchy [1826]. *W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych przekształcenia liniowego $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest samosprzężone.*

Wniosek. *„Zmiana objętości" przy przekształceniu samosprzężonym S wyraża się przez iloczyn wartości własnych S (licząc krotności).*

$$\frac{\textit{vol}\,(S(A))}{\textit{vol}(A)} = \prod_{\sigma(A)} a.$$

Definicja. *'Wyznacznik' przekształcenia samosprzężonego S – iloczyn jego wartości własnych.*

Niekoniecznie samosprzężone...

Problemy:

1. Skąd wziąć wartości własne, gdy nie ma wyznaczników?
2. Nie każdy endomorfizm $\mathbb{R}^n$ ma wartości własne.
3. Wektory własne nie muszą rozpinać całej przestrzeni.

Wartości własne bez wyznacznika

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}} V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}} V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

$$\Downarrow$$

$v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv$ – są liniowo zależne

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}} V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

$$\Downarrow$$

$v,\, Tv,\, T^2 v,\, \ldots,\, T^n v$ – są liniowo zależne

$$\Downarrow$$

$a_0 v + a_1 T v + \ldots + a_n T^n v = 0$, $\quad a_i \in \mathbb{C},\ \prod_{i>1} a_i \neq 0$

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}} V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

$$\Downarrow$$

$v,\ Tv,\ T^2 v,\ \ldots,\ T^n v$ – są liniowo zależne

$$\Downarrow$$

$(a_0 I + a_1 T v + \ldots + a_n T^n) v = 0$, $\quad a_i \in \mathbb{C},\ \prod_{i>1} a_i \neq 0$

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}} V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

$$\Downarrow$$

$v,\, Tv,\, T^2 v,\, \ldots\, ,T^n v$ – są liniowo zależne

$$\Downarrow$$

$c(T - r_1 I)(T - r_2 I) \ldots (T - r_n I)v = 0, \quad r_i \in \mathbb{C}$

Wartości własne bez wyznacznika

V – liniowa nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

$T \in End_{\mathbb{C}}V, \quad T \neq 0$

$v \in V, \quad v \notin \ker T$

$\Downarrow$

$v,\, Tv,\, T^2v,\, \ldots\, , T^n v$ – są liniowo zależne

$\Downarrow$

$c(T - r_1 I)(T - r_2 I)\ldots(T - r_n I)v = 0, \quad r_i \in \mathbb{C}$

$\Downarrow$

$\exists_i \quad T - r_i I$ nie jest injekcją.

Postać biegunowa

Autonne [1902]. *Niech S będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje izometria liniowa A na $\mathbb{R}^n$ oraz przekształcenie liniowe samosprzężone P na $\mathbb{R}^n$, że $S = AP$.*

LICZBY ZESPOLONE

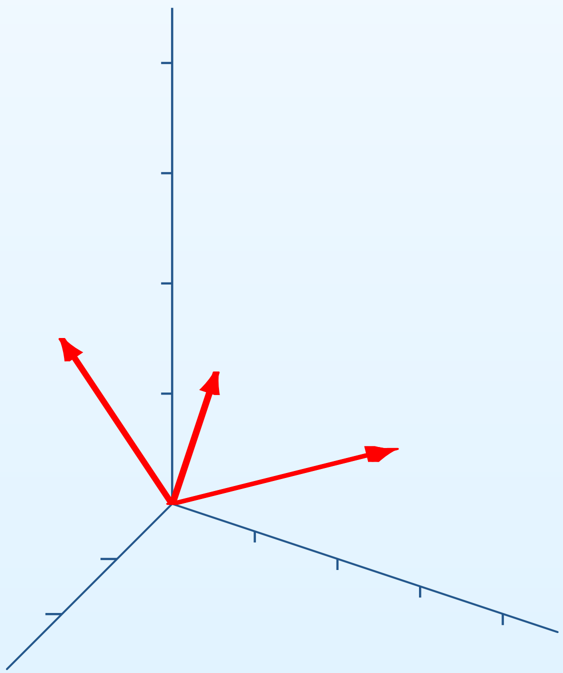
$$z = e^{i\theta} \cdot \sqrt{\bar{z}z}$$

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

$$S = A \circ \sqrt{S^*S}$$

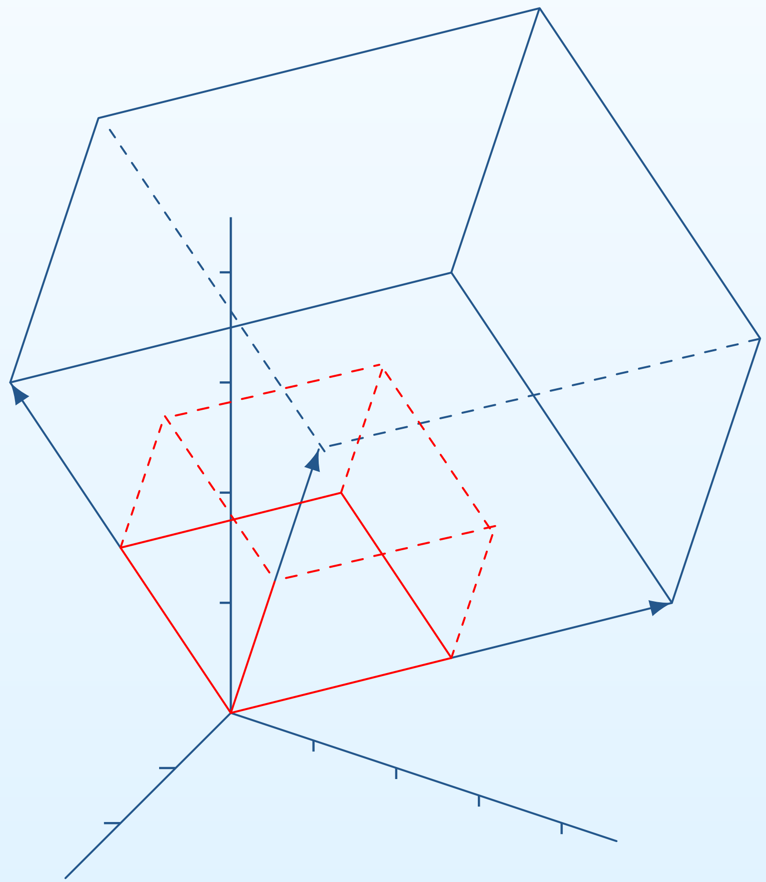
Postać biegunowa

Autonne [1902]. *Niech S będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje izometria liniowa A na $\mathbb{R}^n$ oraz przekształcenie liniowe samosprzężone P na $\mathbb{R}^n$, że $S = AP$.*



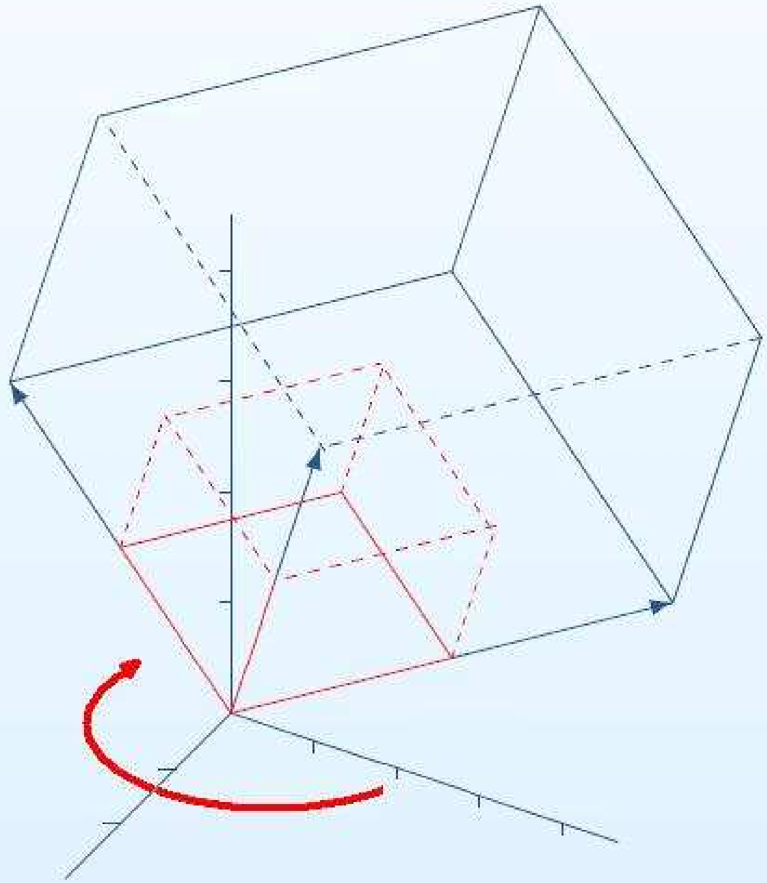
Postać biegunowa

Autonne [1902]. *Niech S będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje izometria liniowa A na $\mathbb{R}^n$ oraz przekształcenie liniowe samosprzężone P na $\mathbb{R}^n$, że $S = AP$.*



Postać biegunowa

Autonne [1902]. *Niech S będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje izometria liniowa A na $\mathbb{R}^n$ oraz przekształcenie liniowe samosprzężone P na $\mathbb{R}^n$, że $S = AP$.*



ODWRACALNOŚĆ

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = x^2 - 5x - 2$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = x^2 - 5x - 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = x^2 - 5x - 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = x^2 - 5x - 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

Przykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = x^2 - 5x - 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód":

$w_A(x)$ – *wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód”:

$w_A(x)$ – *wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

$$w_A(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód”:

$w_A(x)$ – *wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

$$w_A(A) \neq \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

MACIERZ *SKALAR*

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód":

$w_A(x)$ *– wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

$$w_A(A) = \det(A - AI) \cdot I = \det(A - A) \cdot I = \det(0) \cdot I = 0 \cdot I = 0.$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód”:

$w_A(x)$ *– wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

$$w_A(B) \stackrel{???}{=} \det(A - BI)I, \quad A, B \in M_n(\mathbb{C})$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód”:

$w_A(x)$ – *wielomian charakterystyczny macierzy* A

$w_A(x) = \det(A - xI)$

$w_A(B) \neq \det(A - BI)I, \quad A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fałszywy dowód...

Cayley – Hamilton. *Każda macierz zespolona spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód”:

$w_A(x)$ *– wielomian charakterystyczny macierzy* A

$$w_A(x) = \det(A - xI)$$

$$w_A(B) \neq \det(A - BI)I, \quad A, B \in M_n(\mathbb{C})$$

NIEPRZEMIENNE

Współczynniki nieprzemienne

Współczynniki nieprzemienne

$$\begin{cases} \mathbf{i}x + \quad \mathbf{j}y = 0 \\ \mathbf{2i}x + \mathbf{2j}y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i & j \\ 2i & 2j \end{pmatrix}$$

niezerowy wyznacznik

brak odwrotności

Wartości własne?

Niemożliwe:

1. Nie wiadomo czy istnieją i w jakiej kolejności je mnożyć?
2. Prawe i lewe wartości własne?
3. Nieskończenie wiele wartości własnych?

Wartości własne?

Niemożliwe:

1. Nie wiadomo czy istnieją i w jakiej kolejności je mnożyć?
2. Prawe i lewe wartości własne?
3. Nieskończenie wiele wartości własnych?

$$x^2 + 1 = 0$$

Bardzo nieprzemienne pierścienie...

Bardzo nieprzemienne pierścienie...

PIERŚCIENIE NIEPRZEMIENNE

$$ab \neq ba$$

↑

MALEŃSTWA

- macierze
- kwaternione
- nieprzemienne wielomiany

Bardzo nieprzemienne pierścienie...

PIERŚCIENIE NIEPRZEMIENNE

$$ab \neq ba$$

MALEŃSTWA

- macierze
- kwaternione
- nieprzemienne wielomiany

DOROSŁE

- endomorfizmy ciągów
- ilorazy wielomianów nieskończenie wielu zmiennych
- algebry wolne

Bardzo nieprzemienne pierścienie...

PIERŚCIENIE NIEPRZEMIENNE

$$ab \neq ba$$

MALEŃSTWA

- macierze
- kwaternione
- nieprzemienne wielomiany

DOROSŁE $\quad ab = 1, \;\; ba \neq 1$

- endomorfizmy ciągów
- ilorazy wielomianów nieskończenie wielu zmiennych
- algebry wolne

Endomorifzmy ciągów

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\ldots$

Endomorifzmy ciągów

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$

e_1	$\cancel{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$

e_2	0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$

Macierze z endomorfizmów?

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 0 & -e_2 \end{pmatrix}$$

Macierze z endomorfizmów?

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 0 & -e_2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 1 - e_2 e_1 & -e_2 \end{pmatrix}$$

Precz z wyznacznikiem?