LICZBY PROSTOPADŁE

Prime Climb, https://mathforlove.com/games/prime-climb/

Liczby względnie pierwsze

O dwóch liczbach m, n mówimy, że są ***względnie pierwsze***, gdy m i n nie mają wspólnych dzielników pierwszych, czyli gdy $NWD(m, n) = 1$, ozn. $\boldsymbol{n \perp m}$.

USŁYSZCIE NAS, O MATEMATYCY CAŁEGO ŚWIATA! NIE CZEKAJMY ANI CHWILI DŁUŻEJ! MOŻEMY UPROŚCIĆ WIELE WZORÓW PRZEZ PRZYJĘCIE NOWEJ NOTACJI!

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik
Matematyka konkretna

Własności relacji prostopadłości

- dla każdego $\overrightarrow{v}$ istnieje $\overrightarrow{w}$, że $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$,
- dla każdego $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ mamy $\overrightarrow{v} \not\perp \overrightarrow{v}$,
- dla każdych $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ mamy $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Rightarrow \overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$,

A czy dla każdych $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}$ mamy:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{z} \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} \perp (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z})?$$

Tak, jeśli $+$ jest mnożeniem!

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Q}_+$

$$80/27 = 2^4 \cdot 3^{-3} \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, -3, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189/25 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^{-2} \cdot 7^1 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, -2, 1, 0, \ldots)$$

$$3/7 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^{-1} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$$

Wektory te mają skończenie wiele niezerowych współrzędnych całkowitych (jak wielomiany).

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^{4} \cdot 3^{0} \cdot 5^{1} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^{0} \cdot 3^{3} \cdot 5^{0} \cdot 7^{1} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

Dodawanie wektorów — mnożenie liczb

$$(4, 0, 1, 0, 0, \ldots) + (0, 3, 0, 1, 0, \ldots) = (4, 3, 1, 1, 0, \ldots).$$

Wektor zerowy — liczba 1

$$1 = 2^{0} \cdot 3^{0} \cdot 5^{0} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Wersory — liczby pierwsze, np.

$$5 = 2^{0} \cdot 3^{0} \cdot 5^{1} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4,0,1,0,0,\ldots)$$

$$189 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0,3,0,1,0,\ldots)$$

Dodawanie wektorów — mnożenie liczb

$$(4,0,1,0,0,\ldots)+(0,3,0,1,0,\ldots) = (4,3,1,1,0,\ldots).$$

Mnożenie wektorów przez stałą — potęgowanie

$$3 \cdot (4,0,1,2,0,\ldots) = (12,0,3,6,0,\ldots).$$

Kombinacja liniowa wektorów

$$\overrightarrow{a} = 3, \quad \overrightarrow{b} = 10, \quad \overrightarrow{a} + \overrightarrow{2b} = 3 \cdot 10^2 = 300.$$

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^{4} \cdot 3^{0} \cdot 5^{1} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^{0} \cdot 3^{3} \cdot 5^{0} \cdot 7^{1} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

„Iloczyn skalarny"

$$\langle 80, 189 \rangle = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \ldots = 0.$$

„Norma"

$$\|432\| = \sqrt{\langle 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \rangle} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^{4} \cdot 3^{0} \cdot 5^{1} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^{0} \cdot 3^{3} \cdot 5^{0} \cdot 7^{1} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

„Iloczyn skalarny"

$$\langle 80, 189 \rangle = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \ldots = 0.$$

„Odległość"

$$\rho(6, 10) = \|6 - 10\| = \|\frac{3}{5}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

„Iloczyn skalarny"

$$\langle 80, 189 \rangle = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \ldots = 0.$$

„Kąt"

$$\cos \measuredangle(6, 10) = \frac{\langle 6, 10 \rangle}{\|6\| \cdot \|10\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Δ o wierzchołkach 6, 10, 15 jest „równoboczny".

Wektory wykładników elementów $\mathbb{Z}_+$

$$80 = 2^{4} \cdot 3^{0} \cdot 5^{1} \cdot 7^{0} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$189 = 2^{0} \cdot 3^{3} \cdot 5^{0} \cdot 7^{1} \cdot \ldots \leftrightsquigarrow (0, 3, 0, 1, 0, \ldots)$$

„Iloczyn skalarny równy zero":

$$\langle 80, 189 \rangle = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \ldots = 0.$$

Liczby **względnie pierwsze**
są parami prostopadłe.

Potęgi tej samej liczby całkowitej — równoległe?

Zadanie (AMC 2007) Wybrano jeden z ponad 60 000 dodatnich dzielników liczby

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000.$$

Jaka jest szansa, że jest on nieparzysty?

Zadanie (AMC 2007) Wybrano jeden z ponad 60 000 dodatnich dzielników liczby

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000.$$

Jaka jest szansa, że jest on nieparzysty?

Sposób 1.

$$21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Liczba dodatnich dzielników tej liczby, to

$$(18+1)(9+1)(4+1)(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1).$$

Liczba nieparzystych dzielników 21!, to

$$(9+1)(4+1)(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1).$$

Odpowiedź: 1/19.

Zadanie (AMC 2007) Wybrano jeden z ponad 60 000 dodatnich dzielników liczby

$$21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000.$$

Jaka jest szansa, że jest on nieparzysty?

Sposób 2.

Każdy dzielnik liczby 21! jest postaci:

$$2^k \cdot m, \quad \text{gdzie}$$

k — liczba całkowita ≥ 0, taka że $2^k \mid 21!$,
m — dzielnik nieparzysty liczby 21!

Maksymalne k to 18. Na każdy dzielnik nieparzysty m przypada 19 dzielników $2^k \cdot m$.
Odpowiedź: 1/19.

Wniosek. Niech:

- n — dodatnia liczba całkowita,
- p — liczba pierwsza,
- t — liczba całkowita, taka że

$$p^t | n \quad \text{oraz} \quad p^{t+1} \not| n.$$

Prawdopodobieństwo, że dodatni dzielnik liczby n nie jest podzielny przez p wynosi

$$\frac{1}{t+1}.$$

Wniosek. Niech:

- $\tau(m)$ — liczba dzielników m,
- $\tau(n)$ — liczba dzielników n,

Następujące warunki są równoważne:

- liczba dzielników mn to $\tau(m) \cdot \tau(n)$,
- $m \perp n = 1$.

Przykłady: $m = 8, n = 25$ oraz $m = 10, n = 25$.

1	2	4	8
5	10	20	40
25	50	100	200

1	2	5	10
5	10	25	50
25	50	125	250

Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz niech

- $m_1, \ldots, m_r$ — wszystkie dzielniki m,
- $n_1, \ldots, n_s$ — wszystkie dzielniki n,

Wszystkie dzielniki mn są postaci.

$$\begin{array}{ccccc}
n_1 m_1 & n_1 m_2 & n_1 m_3 & \ldots & n_1 m_r \\
n_2 m_1 & n_2 m_2 & n_2 m_3 & \ldots & n_2 m_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n_s m_1 & n_s m_2 & n_s m_3 & \ldots & n_s m_r
\end{array}$$

Wszystkie te liczby są różne wtedy i tylko wtedy, gdy $m \perp n$.

Wniosek. Niech m oraz n będą względnie pierwsze. Wybierzmy jedną z mn liczb

$$1, 2, 3, \ldots, mn.$$

Następujące zdarzenia są **niezależne**:

- wybrana liczba jest podzielna przez m,
- wybrana liczba jest podzielna przez n.

Wniosek. Niech m oraz n będą względnie pierwsze. Wybierzmy jedną z mn liczb

$$1, 2, 3, \dots, mn.$$

Następujące zdarzenia są **niezależne**:

- wybrana liczba jest podzielna przez m,
- wybrana liczba jest podzielna przez n.

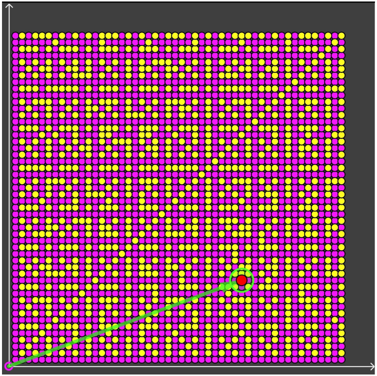
Dowód. Wśród liczb od 1 do mn:

- liczb podzielnych przez n jest m,
- liczb podzielnych przez m jest n,
- jest 1 liczba podzielna przez n oraz przez m.

Euler, Gauss, Dirichlet, Czebyszew?

Szansa, że $m \perp n$, dla *losowych* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, to

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 61\%$$



Olimpiada Matematyczna Juniorów

www.omj.edu.pl

OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadanie (XVII OM, 1965) Jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ oraz

$$a^2 + a = 3b^2,$$

to $a + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie (XVII OM, 1965) Jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ oraz

$$a^2 + a = 3b^2,$$

to $a + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód.

- Mamy $a(a+1) = 3b^2$.
- Skoro $a \perp (a+1)$, to istnieją $r, s \in \mathbb{N}$, że

$$\begin{cases} a & = r^2 \\ a+1 & = 3s^2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a & = 3r^2 \\ a+1 & = s^2 \end{cases}.$$

- Wystarczy wykluczyć pierwszy przypadek.
- Kwadraty nie dają reszty 2 modulo 3.

Fakt. Jedyne liczby pierwsze p, takie że

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem to $p = 3$ oraz $p = 7$.

Fakt. Jedyne liczby pierwsze p, takie że

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem to $p=3$ oraz $p=7$.

Dowód.

- Oczywiście $p>2$. Niech $p-1=2k$.
  Szukamy takich $m \in \mathbb{N}$, że

  $$2^{p-1} = 2^{2k}-1 = (2^k-1)(2^k+1) = pm^2.$$

- Skoro $2^k-1 \perp 2^k+1$, to istnieją $x,y \in \mathbb{Z}_+$, że

  $$\begin{cases} 2^k-1 & = px^2 \\ 2^k+1 & = y^2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^k-1 & = x^2 \\ 2^k+1 & = py^2 \end{cases}.$$

Fakt. Jedyne liczby pierwsze p, takie że

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem to $p = 3$ oraz $p = 7$.

Dowód.

- Jeśli $2^k - 1 = px^2$ oraz $2^k + 1 = y^2$, to
$$(y+1)(y-1) = 2^k.$$
- Zatem $y - 1$ oraz $y + 1$ to potęgi 2.
- Mamy $y > 1$, więc y jest nieparzysta i
$$\mathrm{NWD}(y-1, y+1) = 2.$$
- Stąd $y - 1 = 2$, $k = 3$ oraz $p = 7$.

Fakt. Jedyne liczby pierwsze p, takie że

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem to $p = 3$ oraz $p = 7$.

Dowód.

- Jeśli $2^k - 1 = x^2$ oraz $2^k + 1 = py^2$, to
$$2^k = x^2 + 1.$$
- Stąd $k < 2$. Inaczej $4 | x^2 + 1$, a kwadraty dają jedynie reszty 0 lub 1 modulo 4.
- Skoro jednak $p = 2k + 1$, to $k = 1$ oraz $p = 3$.

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie

$$4^x + 3^y = z^2.$$

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie

$$4^x + 3^y = z^2.$$

Rozwiązanie.

- Przekształcamy równanie do postaci

$$3^y = (z - 2^x)(z + 2^x).$$

- Istnieją więc liczby $l, k \in \mathbb{Z}_+$, że

$$z - 2^x = 3^k, \quad z + 2^x = 3^l.$$

- Mamy $l > k$, bo $z + 2^x > z - 2^x$. Co więcej

$$3^l - 3^k = 2^{x+1}.$$

- Stąd $k = 0$, czyli $z - 2^x = 1$.

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie

$$4^x + 3^y = z^2.$$

Rozwiązanie cd.

- Mamy

$$z - 2^x = 1, \quad z + 2^x = 3^l.$$

- Stąd

$$3^y = (z-2^x)(z+2^x) = 2^x + 2^x + 1 = 2^{x+1} + 1.$$

- Skoro $4 | 2^{x+1}$, to $3^y \equiv 1 \pmod 4$.
- Zatem y jest liczbą parzystą, równą np. $2z$ i

$$2^{x+1} = 3^{2z} - 1 = (3^z - 1)(3^z + 1).$$

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie

$$4^x + 3^y = z^2.$$

Rozwiązanie cd.

- Mamy
$$z - 2^x = 1, \quad z + 2^x = 3^l.$$
Wywnioskowaliśmy, że $y = 2k$ oraz
$$2^{x+1} = 3^{2z} - 1 = (3^z - 1)(3^z + 1).$$
- Mamy $\mathrm{NWD}(3^z - 1, 3^z + 1) = 2$, skąd
$$3^z - 1 = 2, \quad 3^z + 1 = 4.$$
- Stąd $x = 2$ oraz $k = 1$, czyli $y = 2$ i $z = 5$.

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Liczby $n, m \in \mathbb{Z}_+$ spełniają warunek

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że liczba $n - m$ jest kwadratem.

Zadanie (Obóz OMJ 2023) Liczby $n, m \in \mathbb{Z}_+$ spełniają warunek

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że liczba $n-m$ jest kwadratem.

- Mamy

$$0 = n(4n+1) - m(5m+1) = \\ (n-m)(4n+4m+1) - m^2 = \\ (n-m)(5m+5n+1) - n^2$$

- W rezultacie

$$(n-m)(4n+4m+1) = m^2,$$
$$(n-m)(5m+5n+1) = n^2.$$

- W rezultacie

$$(n-m)(4n+4m+1)=m^2,$$
$$(n-m)(5m+5n+1)=n^2.$$

- Jednak

$$(4n+4m+1)\perp(5m+5n+1),$$

gdyż

$$5(4m+4n+1)-4(5m+5n+1)=1.$$

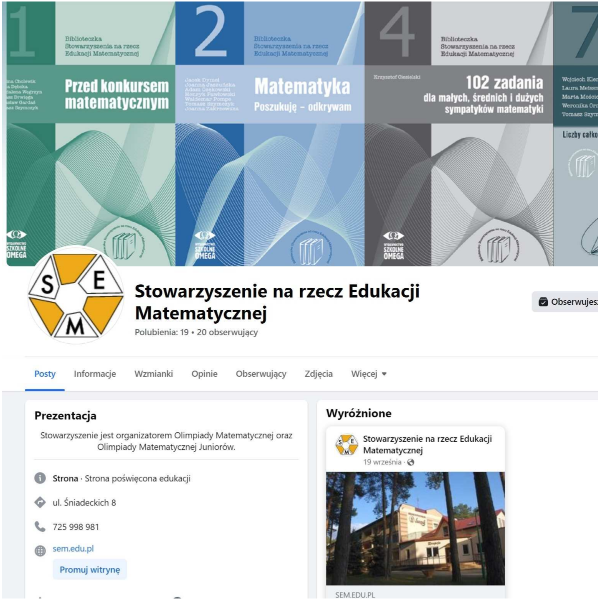
- Zatem

$$NWD(m^2,n^2)=n-m$$

jest kwadratem.

Źródło: Facebook OMJ, Obozy Naukowe w Świętej Katarzynie (czerwiec 2023)

Rozwiązujący powyższe zadania



Ruszył Facebook SEM

facebook.com/stowarzyszenie.em