Algebry dróg Leavitta

Arkadiusz Męcel

Seminarium badawcze Zakładu Algebry UW, 2.11.2017r.

(te notatki zawierają zapewne sporo błędów, odsyłam do głównego źródła)

1 Wprowadzenie

Celem tego referatu jest przybliżenie obecnego stanu wiedzy odnośnie tzw. algebr dróg Leavitta – klasy algebr wprowadzonej przez Abramsa i Aranda Pino w 2005 roku, na temat której powstaje wciąż sporo prac, związanej z rozmaitymi działami nie tylko algebry. Przejdźmy od razu do definicji. Algebry Leavitta są klasą algebr dróg z pewnymi relacjami. Istotną rolę gra struktura samego grafu, na którym zbudowana jest algebra.

Definicja 1. *Niech $\Gamma = (V, E, s, r)$ będzie grafem skierowanym o zbiorze wierzchołków V, zbiorze krawędzi E, przy czym dla każdej krawędzi e przez $s(e)$ rozumiemy wierzchołek, z którego krawędź ta wychodzi, a przez $r(e)$ – wierzchołek, do którego krawędź ta wchodzi. Określamy rozszerzony graf $\widehat{\Gamma} = (V, E \sqcup E^*, s', r')$, gdzie $E^* = \{e_i^* : e_i \in E\}$ oraz $s'_E = s, r'|_E = r, s'(e_i^*) = r(e_i)$ oraz $r'(e_i^*) = r(e_i)$.*

Krótko mówiąc graf $\widehat{\Gamma}$ powstaje przez dopisanie do każdej krawędzi w grafie Γ odpowiadającej jej krawędzi prowadzącej „w drugą stronę". Przypomnijmy jeszcze pojęcie drogi w grafie Γ: jest to ciąg α krawędzi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ takich, że $r(e_i) = s(e_{i+1})$, dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Także wierzchołki uważamy za drogi długości 0. Zbiór wszystkich dróg w Γ oznaczamy przez $P(\Gamma)$. Standardowo przez algebrę dróg grafu rozumiemy K-algebrę, w której bazą są drogi, a mnożenie elementów bazowych zdefiniowane jest zgodnie ze składaniem dróg. Często tak zdefiniowaną algebrę dzielimy przez pewne relacje. Możemy w ten sposób uzyskiwać, na przykład, bazowe algebry skończenie wymiarowe. W przypadku algebr Leavitta też mamy do czynienia z taką algebrą, przy czym szczególną rolę gra dodany przez nas zbiór krawędzi.

Definicja 2 (Abrams, Aranda Pino (2005))**.** *Niech $\Gamma = (V, E, s, r)$ będzie grafem wierszowo skończonym tj. takim, że $|s^{-1}(v)| < \infty$, dla każdego $v \in V$. Algebrą Leavitta $L_K(\Gamma)$ grafu Γ nad ciałem K nazywamy K-algebrę dróg $K\widehat{(\Gamma)}$ modulo następujące relacje:*

(L1) $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$, *dla każdego* $e_j \in E$ *oraz* $e_i^* \in E^*$,

(L2) $v_i = \sum_{\{e_j \in E \,|\, s(e_j) = v_i\}} e_j e_j^*$, *dla każdego* v_i *takiego, że* $0 \neq |s^{-1}(v_i)|$.

Notacja nieprzypadkowo kojarzy się ze sprzężeniem hermitowskim, czy ogólniej z algebrami operatorowymi, bo definicja ta pochodzi od początku lat 80-tych konstrukcji dotyczącej C^*-algebr (gdzie wierzchołki i krawędzie grafu miały również interpretację geometryczną). O wątku C^* opowiem nieco dalej, jeśli będzie czas, a tymczasem więcej miejsca chciałbym poświęcić motywacjom algebraicznym. W tym celu obejrzyjmy kilka prostych przykładów. Odnotujmy jednak od razu pewne podstawowe obserwacje wynikające wprost z definicji:

- $L_K(\Gamma)$ jest algebrą z jedynką $\sum_{v \in E} v$ wtedy i tylko wtedy, gdy E jest skończony.
- $* : L_K(\Gamma) : L_K(\Gamma)$ indukuje izomorfizm $L_E(\Gamma) \simeq L_K(\Gamma)^{op}$, a więc np. nie ma znaczenia czy mówimy o modułach lewostronnych czy prawostronnych,
- każdy niezerowy element r algebry $L_K(\Gamma)$ moze być zapisany (niekoniecznie jednoznacznie) w postaci:

$$r = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^*, \text{ gdzie } k_i \in K^*, \alpha_i, \beta_i \in P(\Gamma), r(\alpha_i) = r(\beta_i).$$

Co więcej mamy $\alpha^* \alpha = r(\alpha)$, dla każdej $\alpha \in P(\Gamma)$.

Przykład 1. Γ ma jeden wierzchołek v. Gdy $E = \{e\}$, wówczas łątwo widzieć, że $L_K(\Gamma) \simeq \mathrm{K}[x, x^{-1}]$. Istotnie, mamy wówczas relacje $e^*e = ee^* = v$, a więc modulo te relacje dowolna droga w Γ ma postać e^k lub $(e^*)^k$ czyli posyłając $v \to 1$, $e \to x$, $e^* \to x^{-1}$ dostajemy bez trudu żądany izomorfizm.

Przykład 2. Zbiór $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dla $n > 1$. Wówczas w podobnie jak wcześniej rolę jedynki w naszej algebrze odgrywa element v. Co więcej mamy w niej elementy $e_1, \ldots, e_n$ oraz $e_1^*, \ldots, e_n^*$, dla których zachodzą równości:

$$e_j^* e_i = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^* = 1. \tag{1.1}$$

Algebrę tę oznaczamy przez $R = L_K(1, n)$. Nietrudno widzieć, że mamy izomorfizm lewostronnych modułów ${}_R R \simeq_R R^n$. O pierścieniu mającym taką własność mówimy, że nie ma on IBN, czyli invariant basis number. Do klasy pierścieni z IBN należą na przykład pierścienie lewostronnie noetherowskie, lewostronnie artinowskie, pierścienie spełniające tożsamość wielomianową. A więc widzimy, że algebra Leavitta może nie mieć żadnej z tych własności. Przykład $L(1, n)$ był rozważany przez Williama Leavitta na początku lat 60-tych. Wówczas głównym przykładem pierścienia bez własności IBN był pierścień endomorfizmów nieskończenie wymiarowej przestrzeni nad ciałem. Miał on jednak tę „złą” własność, że dowolne potęgi jego wolnych lewostronnych modułów są izomorficzne. Leżał więc on po zupełnie przeciwnej stronie własności pierścienie IBN. Czasem nazywa się ją SBN (single basis number). Nie było natomiast wiadomo, czy istnieją pierścienie o własności pośredniej. Przykład, który rozważamy wyżej był właśnie jednym z nich. Można udowodnić, choć nie jest to już takie oczywiste, że dla $R = L(1, n)$ mamy ${}_R R \not\simeq_R R^{n-1}$.

W swoich pracach Leavitt skonstruował, za pomocą generatorów i relacji, algebry R spełniające ${}_R R^n \simeq_R R^m$ takie, że: $n < m$, dla każdego $k < n$ moduł ${}_R R^k$ nie jest izomorficzny z żadnym innym ${}_R R^s$, oraz takie, że m jest najmniejsze możliwe. Takie algebry istnieją dla każdego n oraz $m - n$ i nazywa się je $L_K(n, m)$. Algebry te mają tę dodatkową własność, że są w pewnym sensie uniwersalne w klasie algebr mających moduł typu (n, m). Leavitt pokazał też, że są to algebry proste. W szczególności algebra z naszego przykładu jest prosta, ale fakt ten uzyskamy w większej ogólności później.

Jest jeszcze druga ważna motywacja. Dla każdego pierścienia R rozważać można monoid klas izomorfizmu skończenie generowanych projektywnych modułów nad R, gdzie działaniem półgrupowym jest suma prosta, a elementem neutralnym moduł zerowy. Monoid ten oznaczamy przez $V(R)$. Jeśli R posiada jedynkę, wtedy $[R] \in V(R)$ i wiele istotnych informacji o pierścieniu można odczytać na podstawie pary $(V(R), [R])$. Na przykład jeśli R i S są izomorficznymi pierścieniami z 1, wówczas istnieje izomorfizm monoidów $\phi : V(R) \to V(S)$, który przepowadza $[R]$ w $[S]$. Mówimy wtedy, że $(V(R), [R]) \simeq (V(S), [S])$. Ogólniej, jeśli R oraz S są Morita-równoważne, wówczas również istnieje izomorfizm monoidów, ale niekoniecznie przeprowadzający $[R]$ w $[S]$. Monoid $V(R)$ posiada kilka specyficznych własności: po pierwsze jest przemienny, po drugie jest „conical", tzn. jeśli suma dwóch elementów jest zerem, to każdy z nich jest zerem. Wreszcie, dla pierścieni R z 1 monoid $V(R)$ zawiera „wyróżniony element" tzn. takie d, że dla każdego $x \in V(R)$ istnieje $y \in V(R)$ oraz $n \in \mathbb{R}$, że $x \oplus y = nd$. W tym przypadku jest to oczywiście $[R]$. W 1974 roku Bergman udowodnił, korzystając z metod opartych na koproduktach algebr, następujące, niezwykłe twierdzenie:

Twierdzenie 3 (Bergman). *Niech M będzie skończenie generowanym przemiennym conical monoidem z wyróżnionym elementem $d \neq 0$ i niech K będzie dowolnym ciałem. Wówczas istnieje K-algebra $B = B(M, d)$, dla której $(V(B), [B]) \simeq (M, d)$. Co więcej:*

- *$B = B(M, d)$ jest uniwersalny, w tym snesie, że jeśli C jest K-algebrą z 1 taką, że istnieje homomorfizm modułów $\phi : V(B) \to V(C)$ taki, że $\phi([B]) = [C]$, wtedy istnieje (niekoniecznie jeden) homomorfizm K-algebr $\Phi : B \to C$ taki, że przekształcenie indukowane $\overline{(}\Phi) : C \otimes_B ... : V(B) \to V(C)$ to dokładnie ϕ.*
- *$B = B(M, d)$ jest prawostronnie i lewostronnie dziedziczna (każdy prawostronny i lewostronny ideał B jest projektywny)*
- *konstrukcja $B(M, d)$ zależy jedynie od konkretnej prezentacji M jako $F/\langle \mathcal{R} \rangle$, gdzie F jest skończenie generowanym wolnym modułem abelowym, a $\mathcal{R}$ to pewien skończony zbiór relacji w F. Mając te dane początkowe można skontruować algebrę $B(M, d)$ w skończenie wielu krokach przy pomocy generatorów i relacji.*

Dla przykładu: gdy $(M, d) = (\mathbb{Z}^+, 1)$, wtedy $B(M, d) = K$. Rozważmy natomiast monoid $V_n = \{0, x, 2x, \ldots, (n-1)x\}$ przy czym $nx = x$. Monoid ten spełnia założenia tw. Bergmana i nietrudno pokazać, że $V(L_K(1, n)) \simeq V_n$. Co więcej jednak konstrukcja Bergmana daje również, że $B(V_n, x) \simeq L_K(1, n)$.

Okazuje się, że struktura grafu Γ, algebra Leavitta $L_K(\Gamma)$ oraz monoid sk. generowanych modułów projektywnych mają ze sobą wiele wspólnego. Dokładniej, dla dowolnego grafu skończonego $\Gamma = (V, E, s, r)$ o zbiorze wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_n\}$ określamy monoid M_Γ będący ilorazem abelowego monoidu wolnego o generatorach $\{a_{v_1}, \ldots, a_{v_n}\}$ modulo relacje:

$$a_{v_i} = \sum_{e \in E \,|\, s(e) = v_i} a_{r(e)}, \text{ o ile } s^{-1}(v_i) \neq \emptyset.$$

W 2004 roku Ara, Moreno i Pardo napisali długi artykuł, w którym wychodząc od C^*-algebr i pewnych problemów z nimi związanych pokazali m.in. następujący ogólny fakt.

Twierdzenie 4. *Niech Γ będzie grafem skończonym oraz K – dowolnym ciałem. Niech $d = \sum_{v \in V} a_v \in M_\Gamma$. Wówczas mamy izomorfizm $L_K(\Gamma) \simeq B(M_\Gamma, d)$. A zatem $V(L_K(\Gamma)) \simeq M_\Gamma$. W szczególności $L_K(\Gamma)$ jest algebrą dziedziczną.*

Z tego miejsca otwiera się wiele różnych kierunków, o których mam nadzieję, że zdążę jeszcze wspomnieć. Chciałbym teraz powiedzieć nieco więcej o własnościach strukturalnych algebr Leavitta i pokazać jak działają w praktyce relacje je definiujące.

2 Struktura algebr Leavitta

Do tej pory nie było mowy o przykładach algebr, które powstają dla skończonych grafów acyklicznych. Okazuje się, że dostajemy wówczas algebrę półprostą artinowską.

Twierdzenie 5. *Niech Γ będzie skończonym grafem acyklicznym zaś K dowolnym ciałem. Niech $w_1, w_2, \ldots, w_t$ oznacza zbiór wierzchołków źródłowych grafu Γ (takich, że wszystkie krawędzie z nimi incydentne wchodzą do wierzchołka; dla skończonego grafu acyklicznego taki wierzchołek musi istnieć). Dla każdego w_i niech N_i oznacza liczbę ścieżek w Γ kończących się w w_i (łącznie z samym w_i). Wówczas:*

$$L_K(\Gamma) \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} M_{N_i}(K).$$

Dowód Dla każdego wierzchołka źródłowego v grafu Γ rozważamy zbiór

$$I_v = \{\sum k_i \alpha_i \beta^*, r(\alpha_i) = r(\beta_i) = v, k_i \in K\}.$$

Twierdzimy, że jest to ideał dwustronny w $L_K(\Gamma)$ izomorficzny z algebrą macierzy odpowiednich rozmiarów. Po pierwsze sprawdzamy, że jest to ideał. Weźmy element $\alpha\beta^* \in I_v$ i rozważmy dowolny monomian $\gamma\delta^* \in L_K(\Gamma)$. Jeśli $\gamma\delta^*\alpha\beta^* \neq 0$, to mamy tylko dwie możliwości: $\alpha = \delta p$ lub $\delta = \alpha q$, dla pewnych dróg p, q w Γ. W pierwszym przypadku mamy $\gamma\delta^*\alpha\beta^* = (\gamma p)\beta^* \in I_v$. W drugim natomiast skoro jednak α kończy się wierzchołkiem źródłowym v, to $q = v$ i wtedy $\gamma\alpha^*\alpha\delta^* = \gamma\delta^* \in I_v$. W szczególności I_v jest ideałem lewostronnym. Podobnie pokazujemy, że jest to ideał prawostronny. Stąd też łatwo widzieć, że zbiór N_i^2 elementów postaci $\alpha\beta^*$ ideału I_{w_i} jest zbiorem jedynek macierzowych. Skoro rozpinają one cały ideał, to mamy $I_{w_i} \simeq M_{N_i}(K)$.

Zobaczmy teraz, że każdy element $L_K(\Gamma)$ należy do sumy ideałów I_{w_i}. Weźmy monomian moniczny postaci $\gamma\delta^* \in L_K(\Gamma)$. Jeśli $v = r(\gamma)$ jest wierzchołkiem źródłowym, to $\gamma\delta^* \in I_v$. W przeciwnym razie możemy wykorzystać relację (L2) i napisać:

$$\gamma\delta^* = \gamma v \delta^* = \gamma(\sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*)\delta^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} (\gamma e)(\delta e)^*.$$

Jeśli teraz któryś z $r(e)$ jest źródłowy, to składnik $(\gamma e)(\delta e)^*$ należy do I_e. Jeśli któryś z $r(e)$ nie jest, to znowu rozbijamy element $(\gamma e)r(e)(\delta e)^*$ zgodnie z relacją (L2). Skoro graf Γ jest skończony i acykliczny to po skończenie wielu krokach dojdziemy do przedstawienia $\gamma\delta^*$ w postaci sumy składników, z których każdy należy do pewnego I_{w_i}.

Wreszcie trzeba pokazać, że suma ideałów I_{w_i} jest sumą prostą. Weźmy $i \neq j$ i rozważmy element $\alpha\beta^* \in I_{w_i}$ oraz $\gamma\delta^* \in I_{w_j}$. Skoro w_i, w_j są źródłowe, to tak jak w argumentacji wyżej nie ma dróg postaci $\beta\gamma'$ albo $\gamma\beta'$, dla $\gamma', \beta' \in P(\Gamma)$ długości większej niż 0. A zatem $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = 0$. To oznacza, że $I_{w_i} I_{w_j} = 0$, a skoro algebra jest z 1 to rozważana suma jest prosta, co kończy dowód.

Wniosek 6. *Algebra $L_K(\Gamma)$ jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy graf Γ jest skończony i acykliczny.*

Ten rezultat może być pewnym rozczarowaniem, oznacza bowiem, że dla dużej (i intuicyjnej) klasy grafów nasze algebry nie mają żadnych interesujących własności. Kolejny rezultat, również korzystający z podobnych jak wcześniej motywów mówi, że:

Twierdzenie 7. *Niech K będzie ciałem i Γ dowolnym grafem wierszowo-skończonym. Wówczas $J(L_K(\Gamma)) = 0$.*

Szkic dowodu jest następujący: przekonajmy się najpierw, że w algebrze $R = L_K(\Gamma)$ istnieje $\mathbb{Z}$-gradacja. Innymi słowy chcemy pokazać, że $R = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ (jako przestrzenie liniowe) tak, że $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$. Nietrudno się przekonać, że kładąc $L_K(\Gamma)_m = \{a\beta^*, \alpha, \beta \in P(\Gamma), r(\alpha) = r(\beta), l(\alpha) - l(\beta) = m\}$ dostajemy taką właśnie gradację. Wiadomo, a udowodnił to Bergman, że w takim przypadku także radykał ma $\mathbb{Z}$-gradację, czyli jeśli rozłożymy element w radykale na sumę składników jednorodnych, to każdy ze składników musi być w radykale. Okaże się natomiast, że każdy ideał z $\mathbb{Z}$-gradacją w $L_K(\Gamma)$ jest generowany przez idempotenty.

Rozważmy zgradowany ideał J algebry $L_K(\Gamma)$ i weźmy element a należący do J_n, dla $n > 0$. Wtedy $a = \sum\limits_{|\gamma|=n} \gamma a_\gamma$, dla pewnych $a_\gamma \in L_K(\Gamma)_0$. Dla ustalonej drogi v długości n mamy $v^* a = a_v$, więc $a_v \in J_0$. W szczególności $J_n = L_K(\Gamma)_n J_0$, oraz podobnie $J_{-n} = J_0 L_K(\Gamma)_{-n}$. Skoro J jest zgradowany, to J jest generowany jako ideał przez J_0, który jest ideałem w $L_K(\Gamma)_0$. Pozostaje więc pokazać, że każdy ideał (skończenie generowany) w $L(E)_0$ jest generowany przez idempotenty. Tu idea jest taka, by pokazać, że algebra $L_K(\Gamma)_0$ jest regularna w sensie von-Neumanna, a nawet ultramacierzowa, co oznacza, że jest granicą prostą skierowanego ciągu sum prostych algebr macierzy nad ciałem. Uzasadnienie wymaga kilku zabiegów technicznych, ale w swej istocie nie korzysta z żadnych nowych pomysłów.

Po pierwsze pokazuje się, że jeśli graf Γ jest nieskończony, to algebra $L_K(\Gamma)$ jest granicą prostą algebr $L_K(\Gamma_i)$, dla pewnej skierowanej rodziny grafów skończonych. W szczególności także $L_K(\Gamma)_0$ jest taką granicą. A więc można ograniczyć się do rozważania $L_K(\Gamma)_0$ dla grafów skończonych (być może z cyklami). Po drugie, w takim przypadku mamy naturalną filtrację na $L_K(\Gamma)_0$ w postaci ciągu algebr $L_{0,n} = \{\mathrm{lin}(\gamma\delta^* \mid r(\gamma) = r(\delta), |\gamma| = |\delta| \leqslant n\}$, co nietrudno zobaczyć jako produkt algebr macierzy. Dokładniej, jeśli przez $S(V)$ oznaczymy zbiór wierzchołków źródłowych grafu $\Gamma = (V, E)$ oraz przez $P(n, v)$ zbiór dróg długości n kończących się w v, to $L_{0,n}$ jest izomorficzna z:

$$\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{v\in S(V)} M_{|P(i,v)|}(K)\right)\right] \times \left[\prod_{v\in V} M_{|P(n,v)|}(K)\right].$$

Jak wygląda homomorfizm przeprowadzający $L_{0,n}$ w $L_{0,n+1}$? Jest to identyczność na pierwszym czynniku oraz na czynniku $\prod\limits_{v\in S(V)} M_{|P(n,v)|}(K)$ drugiego czynnika. Natomiast przejście:

$$\prod_{v\in V\setminus S(V)} M_{|P(n,v)|}(K) \longrightarrow \prod_{v\in V\setminus S(V)} M_{|P(n+1,v)|}(K)$$

ma postać blokowo diagonalną przez utożsamienie jedynki macierzowej $M_{|P(n,v)|}$ z monomianem $\gamma\delta^*$, gdzie $|\gamma| = |\delta| = n$ oraz $r(\gamma) = r(\delta) = v$. Skoro v nie jest źródłowy, to możemy wydłużyć drogi γ, δ uzywając krawędzi wychodzących z v otrzymując drogi długości $n + 1$. Relacja definiująca algebre $L_K(\Gamma)$ daje nam:

$$\gamma\delta^* = \sum_{e\in E \,|\, s(e)=v} (\gamma x_e)(y_e v^*).$$

Zatem widać, że tak zdefiniowane morfizmy są identycznościami na $L_{0,n}$ oraz można określić złożenie morfizmów $L_{0,n} \longrightarrow L_{0,n+1} \longrightarrow L_{0,n+2}$. A zatem algebra $L_K(\Gamma)_0$ jest ultramacierzowa, co daje tezę.

W dalszej części chciałbym powiedzieć więcej o tym w jaki sposób struktura grafu wpływa na ideały w algebrach Leavitta. Podstawową rolę ogrywają następujące definicje.

Definicja 8. *Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie grafem i niech $v, w \in V$. Będziemy pisać, że $v \geqslant w$ jeśli istnieje droga w grafie o początku w v i końcu w w. Niech X będzie podzbiorem V. Powiemy, że podzbiór ten jest:*

- *dziedziczny, jeśli dla każdego $v \in X$ oraz $w \in V$ takiego, że $v \geqslant w$ mamy $w \in X$. Innymi słowy wraz z wierzchołkiem v do X należą wszystkie wierzchołki, do których da się dotrzeć z x za pomocą drogi w Γ,*

- *nasycony, jeśli dla każdego wierzchołka nie-źródłowego v z faktu, że $r(s^{-1}(v) \subseteq X$ wynika, że $v \in X$. Innymi słowy jeśli wszystkie wierzchołek v emituje skończenie wiele krawędzi i wierzchołki na końcach krawędzi należą wszystkie do X, to v też.*

Stwierdzenie 9. *Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie grafem oraz K dowolnym ciałem. Niech $I \lhd L_K(\Gamma)$. Wówczas $X = V \cap I$ jest dziedzicznym i nasyconym podzbiorem V.*

Dowód jest w zasadzie jasny. Jeśli $v \in X$ jest taki, że istnieje $\alpha \in P(\Gamma)$ taka, że $s(\alpha) = v$ oraz $r(\alpha) = w$, to mamy $w = \alpha^*\alpha = \alpha^* v\alpha$, a więc $w \in I$, co pociąga $w \in X$. A zatem X jest dziedziczny. Z drugiej strony jeśli $v \in V$ ma tę własność, że $|s^{-1}(v)|$ jest skończony oraz $r(e) \in X$, dla każdego $e \in s^{-1}(v)$, to z (L2) mamy: $v = \sum_{e\in s^{-1}(v)} ee^* = \sum\limits_{e\in s^{-1}(v)} e \cdot r(e) \cdot e^* \in I$, a więc X jest też nasycony.

Ara, Moreno i Pardo pokazali więcej: jeśli $\Gamma = (V, E)$ jest wierszowo-skończony to istnieje izomorfizm kraty zgradowanych ideałów $\{I\}$ algebry $L_K(E)$ oraz kraty dziedzicznych nasyconych podzbiorów $\{X\}$ zbioru V dany przez odpowiedniości:

$$I \mapsto I \cap V, \quad X \mapsto I(X).$$

Widzimy więc, że struktura ideałów zgradowanych jest kontrolowana przez zbiory dziedziczne nasycone. Dodatkowe niuanse w kracie ideałów algebry związane są z istnieniem cykli bez wyjść, a więc cykli $v_1 \to v_2 \ldots \to v_n \to v_1$, że z wierzchołków v_i nie wychodzą żadne inne krawędzie niż krawędzie cyklu. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10. *Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie grafem oraz K ciałem. Niech $0 \neq x \in L_K(\Gamma)$. Wówczas istnieją $\alpha, \beta \in P(\Gamma)$, że zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:*

- *$\alpha^* x\beta = kv$, dla pewnego $v \in V$ oraz $k \in K^*$ albo*

- *$\alpha^* x\beta = p(c)$, gdzie $0 \neq p(x) \in K[x, x^{-1}]$ oraz c jest cyklem bez wyjść.*

Innymi słowy każdy niezerowy element możemy domnożyć albo do niezerowej wielokrotności wierzchołka, albo do niezerowego wielomianu o zmiennej będącej cyklem bez wyjść.

Wniosek 11. *Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie grafem wierszowo-skończonym. Wówczas algebra Leavitta $L_K(\Gamma)$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w Γ ma wyjście oraz gdy jedynymi dziedzicznymi nasyconymi podzbiorami zbioru V są V oraz $\emptyset$.*

Nie ma miejsca, by pokazać pełne dowody, ale pokażę, że jeśli Γ posiada cykl, który nie ma wyjścia, to algebra $L_K(\Gamma)$ nie jest prosta oraz pokażemy, że jeśli istnieje nietrywialny dziedziczny podzbiór V to $L_K(\Gamma)$ również nie może być prosta.

Zacznijmy od odrobiny terminologii. Zbiór dróg o początku i końcu w wierzchołku v oznaczamy $CP(v)$, a jego podzbiór złożony z dróg, które poza początkiem i końcem nie przechodzą przez v nazywamy $CSP(v)$. Oczywiście cykl o początku i końcu w v należy do $CSP(v)$. Łatwo widzieć, że każdy element z $CP(v)$ rozkłada się na iloczyn elementów z $CSP(v)$.

Przechodzimy do pierwszego rozumowania. Załóżmy, że Γ zawiera cykl p nie mający wyjścia. Niech v będzie wierzchołkiem początkowym i końcowym tego cyklu. Pokażemy, że dla $\alpha = v + p$ ideał generowany przez α w $L_K(\Gamma)$ nie zawiera v, a zatem jest nietrywialny. Niech $p = e_{i_1} \dots e_{i_\sigma}$. Skoro cykl ten nie ma wyjścia, to na mocy (L2) dla każdego e_{i_j} mamy $s(e_{i_j}) = e_{i_j} e^*_{i_j}$. Stąd łatwo wnosimy, że $pp^* = v$ (pamiętajmy, że $p^*p = v$ zachodzi zawsze). Wynika stąd też, że $CSP(v) = \{p\}$.

Załóżmy teraz, wbrew tezie, że $v \in \langle\alpha\rangle$. Istnieją zatem niezerowe wielomiany moniczne $a_n, b_n \in L_K(\Gamma)$ oraz $c_n \in K$ takie, że $v = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n a_n \alpha b_n$. Skoro $v\alpha v = \alpha$, to w razie konieczności możemy domnożyć przez v by dostać $va_nv = a_n$ oraz $vb_nv = b_n$, dla wszystkich $1 \leqslant n \leqslant m$. Twierdzimy, że dla każdego a_n (odp. b_n) istnieje liczba całkowita nieujemna $u(a_n)$ (odp. $u(b_n)$), że $a_n = p^{u(a_n)}$ albo $a_n = (p^*)^{u(a_n)}$ (odp. dla b_n...). Co nam da pokazanie tego? Wtedy, skoro p oraz p^* komutują z p, p^* oraz α, to zapiszemy sumę $v = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n a_n \alpha b_n$ w postaci $v = \alpha P(p, p^*)$ dla pewnego wielomianu o współczynnikach z K postaci:

$$k_{-m}(p^*)^m + \ldots + k_0 v + \ldots + k_n p^n \in \bigoplus_{j=-m}^{n} L_K(\Gamma)_{\delta j}, \quad m, n \geqslant 0.$$

Po pierwsze twierdzimy, że $k_{-i} = 0$, dla każdego $i > 0$. Jeśli nie, to niech m_0 będzie maksymalnym i, że $k_{-i} \neq 0$. Wtedy $\alpha P(p, p^*) = k_{-m_0}(p^*)^{m_0}+$ wyrazy wyższego stopnia $= v$, a skoro $m_0 > 0$ to dostajemy $k_{-m_0} = 0$. Tak samo pokazujemy, że $k_i = 0$, dla każdego $i > 0$. A zatem $P(p, p^*) = k_0 v$. Ale to by oznaczało, że $v = \alpha k_0 v = k_0 \alpha$, co jest niemożliwe. A zatem $v \notin \langle\alpha\rangle$.

Przechodzimy do zapowiedzianego opisu a_n oraz b_n. Przyjmijmy, że $a_1 = e_{k_1} \dots e_{k_c} e^*_{j_1} \dots e^*_{j_d}$, dla $c, d \geqslant 1$. Inne (trywialne) przypadki będą i tak zawarte w dalszym rozumowaniu. Skoro a_1 zaczyna się i kończy w v możemy rozważyć elementy $g = min\{z : r(e^*_{j_z}) = v\}$ oraz $f = max\{z : s(e_{k_z}) = v\}$ i skupimy się na elemencie $a'_1 = e_{k_f} \dots e_{k_c} e^*_{j_1} \dots e^*_{j_g}$. Skoro $v = r(e^* j_g) = s(e_{j_g})$ oraz e_{i_1} jest jedyną krawędzią wychodzącą z v to mamy $e_{j_g} = e_{i_1}$. A zatem $s(e_{j_{g-1}}) = r(e^*_{j_{g-1}}) = r(e_1) = s(e_{i_2})$. Co więcej jedyną krawędzią wychodzącą z $s(e_{i_2})$ jest e_{i_2}, a zatem $e_{j_{g-1}} = e_{i_2}$. Ten proces musi się zatrzymać zanim skończą się krawędzie p, ponieważ zgodnie z naszym wyborem g mamy $v \notin \{r(e^*_{j_z}) : z < g\}$. A więc w rezultacie istnieje $\gamma < \sigma$ taka, że $e^*_{j_1} \dots e^*_{j_g} = e^* i_\gamma \dots e^*_{i_1}$.. Dualne argumenty pozwolą nam znaleźć takie $\delta < \sigma$, że $e_{k_f} \dots e_{k_c} = e_{i_1} \dots e_{i_\delta}$. W szczególności $a'_1 = e_{i_1} \dots e_{i_\delta} e^* i_\gamma \dots e^*_{i_1}$ i w związku z tym mamy dwa przypadki:

- $\delta \neq \gamma$. Wiemy, że p jest cyklem co oznacza, że $r(e_{i_\delta}) \neq r(e_{i_\gamma})$, co zonacza, że $e_{i_\delta} e^*_{i_\gamma} = 0$, co byłoby absurdem, ponieważ $a_1 \neq 0$.
- $\delta = \gamma$. W tym przypadku $a'_1 = p_0 p^*_0$, dla pewnej poddrogi p_0 cyklu p. Znowu używając relacji (L2) dowodzimy, że $p_0 p^*_0 = v$.

A zatem dostajemy $a_1 = e_{k_1} \dots e_{k_{f-1}} e^*_{j_{g+1}} \dots e^*_{j_d} = xy^*$, dla pewnych dróg $x, y \in CP(v)$ (i tu się mieszczą szczególne przypadki: $c \geqslant 1$ i $d = 0$ oznacza, że $a_1 = x$, zaś przypadek $c = 0$,

$d \geqslant 1$ oznacza $a_1 = y^*$; wreszcie $c = d = 0$ oznacza $a_1 = v$. Przypomnijmy jednak, że element z $CP(v)$ rozkłada się na iloczyn dróg z $CSP(v)$, a to jest zbiór jednoelementowy $\{p\}$. A zatem $a_1 = p^u(p^*)v$, dla pewnych $u, v \geqslant 0$ i biorąc pod uwagę, że $pp^* = v$ dostajemy a_1 w żądanej postaci p^u lub $(p^*)^u$, dla pewnego $u \geqslant 0$. Podobnie rozumujemy dla pozostałych współczynników a_n oraz b_n. Uporaliśmy się zatem z przypadkiem, gdy w grafie Γ istnieje cykl bez wyjść.

Drugi przypadek pokażę już bardziej szkicowo. Załóżmy, że zbiór wierzchołków V grafu Γ zawiera nietrywialny dziedziczny nasycony podzbiór H. Przy jego pomocy konstruujemy nowy graf $\Gamma_H = (V_H, E_H, s_H, r_H)$, powstający z Γ przez usunięcie wierzchołków ze zbioru H oraz usunięcie wszystkich strzałek, które nie kończą się w żadnym wierzchołku z H. To jest oczywiście dobrze zdefiniowany graf, ponieważ jeśli jakaś krawędź Γ zaczynała się w wierzchołku z H, to zgodnie z dziedzicznością H musiała się także w nim kończyć. Usunęliśmy zatem wszystkie krawędzie incydentne z wierzchołkami z H. Będziemy chcieli teraz zadać homomorfizm K-algebr $\Psi : L_K(\Gamma) \to L_K(\Gamma')$. Najpierw rozważamy następujący homomorfizm Φ algebry wolnej o generatorach V, E, E^* w algebrę wolną o generatorach V_H, E_H, E_H^*:

$$\Phi(v_i) = \chi_{V_H}(v_i)v_i, \quad \Phi(e_i) = \chi_{E_H}(e_i)e_i, \quad \Phi(e_i^*) = \chi(E_H^*)(e_i^*)e_i^*.$$

Jeśli pokażemy, że Φ zeruje się na wszystkich relacjach określających algebrę $L_K(\Gamma)$, to będziemy mieli homomorfizm algebr. Oczywiście wtedy skoro $H \neq \emptyset$, to $\Psi(H) \subseteq \ker(\Psi) \neq 0$ oraz skoro $H \neq V$ to istnieje $x \in V \setminus H$, że $\Psi(x) = x$, a zatem $\Psi \neq 0$. A więc będzie nietrywialny ideał w Ψ. Sprawdzamy zatem relacje definiujące graf Γ. Nie będę tego robił we wszystkich przypadkach (niektóre są proste), ale tam, gdzie zobaczymy jak działa dziedziczność i nasycenie H. W szczególności sprawdzimy, że do jądra homomorfizmu Φ należy wyrażenie postaci $v - \sum\limits_{e_j \in E : s(e_j) = v} e_j e_j^*$, dla elementu v nie będącego wierzchołkiem źródłowym.

- Załóżmy, że $v \in H$. Wtedy żadna krawędź o początku w v_i nie może należeć do E_H, bo z dziedziczności także koniec tej krawędzi musiałby leżeć w H. W szczególności: $\Phi(v - \sum\limits_{e_j \in E : s(e_j) = v} e_j e_j^*) = 0 - \sum\limits_{e_j \in E : s(e_j) = v} 0 \cdot 0 = 0$.

- Załóżmy, że $v \notin H$ oraz $v \notin s(E_H)$. Skoro v nie jest źródłowy, to $s^{-1}(v) \neq 0$. Ale skoro H jest nasycony, to musi istnieć krawędź w grafie Γ taka, że jej początek jest w v, ale koniec nie. To jednak oznacza, że taka krawędź należy do E_H, co przeczy temu, że $v \notin s(E_H)$.

- Trzecia możliwość jest taka, ze $v \notin H$, ale $v \in s(E_H)$. Wtedy z (L2) mamy: $v = \sum\limits_{e_j \in E_H : s(e_j)} e_j e_j^*$. Rozważmy dowolne $e_j \in E$ takie, że $s(e_j) = v$. Jeśli $e_j \in E_H$, to $\Phi(e_j e_j^*) = e_j e_j^*$. W przeciwnym razie jest to 0. A zatem:

$$\Phi\left(v - \sum_{e_j \in E : s(e_j)} e_j e_j^*\right) = v - \sum_{e_j \in E_H : s(e_j)} e_j e_j^* = 0.$$

Na tym kończymy rozważania dotyczące prostoty. Zanim przejdziemy do innych wyników potrzebna jest pewna ogólna uwaga: warto powiedzieć, że rozważa się także algebry Leavitta dla grafów, które nie są wierszowo skończone. Definicja jest właściwie identyczna z zastrzeżeniem, że jeśli wierzchołek v emituje nieskończenie wiele krawędzi, wówczas nie przypisujemy relacji (L2), zastrzegając ją jedynie dla wierzchołków regularnych (czyli emitujących skończenie wiele krawędzi).

Twierdzenie 12 (Abrams, Bell, Colak (2012))**.** *Niech Γ będzie grafem wierszowo-skończonym oraz niech K będzie dowolnym ciałem.*

- $L_K(\Gamma)$ *jest obustronnie artinowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek jest podstawą co najwyżej jednej prostej zamkniętej ścieżki w grafie Γ oraz jeśli krata dziedzicznych nasyconych podzbiorów w tym grafie spełnia dcc na łańcuchy.*

- $L_K(\Gamma)$ *jest obustronnie noetherowski wtedy i tylko wtedy, gdy $L_K(\Gamma)$ ma a.c. na zgradowanych ideałach dwustronnych co jest równoważne temu, żew kracie dziedzicznych nasyconych podzbiorów tego grafu jest a.c.c. W szczególności jeśli Γ jest grafem skończonym to $L_K(\Gamma)$ jest obustronnie noetherowska.*

Twierdzenie 13 (Aranda Pino, Pardo, Molina (2009))**.** *Niech Γ będzie grafem, zaś K – ciałem. Wtedy $L_K(\Gamma)$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch wierzchołków v, w grafu Γ istnieje wierzchołek u taki, do którego dochodzą pewne drogi zaczynające się w v oraz w.*

Dowód. Załóżmy, że $R = L_K(\Gamma)$ jest pierwsza. Weźmy wierzchołki v, w. Ideały RvR oraz RwR sązawsze niezerowe, więc $RvRRwR \neq \{0\}$, z pierwszości. To oznacza, że $vRw \neq \{0\}$. Stąd można wywnioskować istnienie pojedycznego elementu postaci $\alpha\beta^*$, gdzie $s(\alpha) = v$ oraz $r(\beta^*) = w$, a więc $u = r(\alpha)$ spełnia postulowaną własność.

Idea dowodu w drugą stronę. Można go wykonać „na elementach”, ale można też przywołać klasyczny wynik mówiący, że dla pierścienia $\mathbb{Z}$-zgradowanego pierwszość wystarczy sprawdzać na ideałach zgradowanych. A więc trzeba pokazać, że jeśli I, J są niezerowymi zgradowanymi ideałami to IJ jest niezerowy. Ale mówiliśmy wcześniej o tym, że niezerowy zgradowany ideał zawiera wierzchołek i nietrudno na podstawie warunku (L2) stwierdzić, że jeśli $v \in I$ oraz $w \in J$ oraz istnieją drogi z v oraz w do pewnego wierzchołka u, to $0 \neq u = u^2 \in IJ$. □

Twierdzenie 14 (Arando, Pardo, Molina (2009))**.** *Niech Γ będzie grafem wierzowo skończonym. Wówczas $L_K(\Gamma)$ jest prymitywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwsza i jeśli każdy cykl ma wyjście.*

W tym kontekście Abrams, Bell i Rangaswamy pokazali w 2014 roku całą rodzinę algebr, które jest regularne w sensie Von-Neumanna, pierwsze i nieprymitywne. Kiedyś to było ważne pytanie Kaplanskiego dotyczące algebr regularnych. Choć pierwszy taki kontrprzykład podał już w 1977 roku Domanov, to właśnie badania ostatnich lat pokazały jak systematycznie badać to zjawisko. Zresztą, jak jeszcze powiem, badania algebr Leavitta mają dużo wspólnego z algebrami regularnymi.

Twierdzenie 15 (Abrams, Bell, Rangaswamy)**.** *Niech $\Gamma = (V, E)$ będzie dowolnym grafem i K – ciałem. Wówczas $L_K(\Gamma)$ jest prymitywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwsza, każdy cykl ma wyjście i oraz istnieje przeliczalny zbiór wierzchołków S grafu Γ taki, że dla każdego $v \in V$ istnieje ścieżka z v do s.*

Inna bardzo ciekawa grupa wyników związana była z afinizacjami i wymiarem Gelfanda-Kiryłowa algebr Leavitta. W prace włączył się sam Zelmanov, bowiem wyniki związane były z konstrukcją splotu algebr, o której Zelmanov opowiadał w Belgii w czerwcu tego roku. Najpierw rezultat odnośnie wymiaru (krótka praca, 6 stron). Potrzebna są następująca pojęcia (znane z teorii algebr monomianowych i wyników Ufnarovskiego): cykle C_1, C_2 grafu

Γ nazywamy rozłacznymi, jeśli mają rozłączne zbiory wierzchołków. Piszemy, że $C_1 \Rightarrow C_2$ jeśli istnieje droga w grafie Γ łącząca pewne dwa wierzchołki tych cykli. Przez łańcuch cykli $C_1, \ldots, C_k$ rozumiemy cytuację $C_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k$.

Twierdzenie 16 (Alahmadi, Alsulami, Jain, Zelmanov (2012))**.** *Niech Γ będzie grafem, d_1 będzie maksymalną długóścią łańcucha cykli (o ile istnieje) i d_2 maksymalną długością łańcucha cykli, które nie mają wyjścia (jw.). Wówczas $L_K(\Gamma)$ ma wzrost wykładniczy wtedy i tylko wtedy, gdy pewna para cykli w Γ nie jest rozłączna. W przeciwnym przypadku $L_K(\Gamma)$ ma wzrost wielomianowy i $GKdim(L_K(\Gamma)) = \max(2d_1 - 1, 2d_2)$.*

Wyniki dotyczące wymiaru pozwoliły na uzyskanie rodzin algebr afinicznych o nie-nilpotentnym i nie lokalnie-nilpotentnym radykale Jacobsona i to przy pomocy splotów algebr. Nie chcę teraz przywoływać definicji ale warto powiedzieć, że jeśli H jest dziedzicznym nasyconym podzbiorem wierzchołków grafu Γ to biorąc graf Γ_W taki jak w dowodzie o prostocie oraz graf $\Gamma|_H$ obcięty do wierzchołków H pokazuje się, że $L_K(\Gamma) \simeq L_K(\Gamma|_H) \# L_K(\Gamma_H)$.

Jeszcze jeden wynik strukturalny, o którym warto wspomnieć i który wiąże się z pozornie odległą dziedziną algebry to wynik związany z macierzami nad algebrami Leavitta, a konkretniej z algebrami $L_K(1, n)$ opisanymi na początku.

Twierdzenie 17. *Ma miejsce następująca równoważność:*

$$M_d(L_K(1, n)) \simeq M_{d'}(L_K(1, n)) \Leftrightarrow NWD(d, n-1) = NWD(d', n-1).$$

Co więcej, gdy wiadomo, że $NWD(d, n-1) = NWD(d', n-1)$ to izomorfizm $M_d(L_K(1, n)) \mapsto M_{d'}(L_K(1, n))$ można skonstruować wprost.

Twierdzenie to pozwoliło na rozwiązanie w 2011 roku długo otwartego pytania dotyczącego tak zwanych grup Higmana-Thompsona $G^+_{n,r}$. W latach 70' Higman skonstruował, dla każdej pary r, n ważną rodzinę nieskończonych, skończenie prezentowalnych grup prostych (nie będę opisywał szczegółów). Podał też pewne warunki na to kiedy są one izomorficzne, ale było wiadomo czy są to warunki wystarczające. Problem ten rozwiązał Pardo, pokazując, że $G^+_{n,r}$ jest podgrupą w grupie jedności elementów $M_r(L_{\mathbb{C}}(1, n))$ i korzystająją z konstrukcji opisanej w twierdzeniu wyżej pokazał implikację.

$$G^+_{n,r} \simeq G^+_{m,s} \Leftrightarrow m = n \text{ oraz } NWD(r, n-1) = NWD(s, n-1).$$

3 Problemy otwarte

Nie ma na tym referacie miejsca, żeby wspomnieć o całym interesującym zestawie problemów dotyczących symetrycznych rezultatów pojawiających się w teorii C^*-algebr i algebr Leavitta. To jest jedna gałąź zagadnień bardzo intensywnie badanych. Wiąże się z teorią modułów nad tymi algebrami i z zagadnieniem tzw. czystej nieskończonej pierwszości. Uzyskano wiele głębokich rezultatów odnośnie modułów prostych, prymitywnych, Morita-równoważności algebr Leavitta, o których nie wspomniałem. Powiem jedynie o dwóch rodzajach problemów nie wymagających wgłębiania się w nową terminologię (choć i one mają analityczne konotacje). Jeden typ to problemy związane z iloczynami tensorowymi. Okazuje się, że nawet najprostsze pytania są tu bardzo skomplikowane. Przez kilka lat nie umiano odpowiedzieć na pytanie czy $L_K(1, 2) \otimes L_K(1, 2) \simeq L_K(1, 2)$ (taki wynik sugerowały rozważania o C^*-algebrach. W

2011 roku trzy bardzo mocne zespoły badaczy (jeden to Bell i Bergman) pokazały, że takiego izomorfizmu nie ma. Jeden z argumentów warto przytoczyć, bo mówi o wymiarach tych algebr. Wiadomo, że algebry Leavitta są dziedziczne (twierdzenia o izomorfizmie z algebrą Bergmana), a wiec ich wymiar globalny to najwyżej 1. Pokazano przy tym, że wymiar globalny to dokładnie 1 w przypadku, gdy algebra nie jest regularna w sensie von Neumanna. Jednym ze znanych warunków aby tak było jest to, aby graf Γ miał przynajmniej jeden cykl. A więc w szczególności $L_K(1,2)$ nie jest regularna. Stą wiadomo, że wymiar płaski, a zatem i globalny iloczynu tensorowego $L_K(1,2) \otimes L_K(1,2)$ to przynajmniej 2, a więc nie może to być algebra Leavitta. Ale na przykład pytanie o izomorfizm $L_K(1,2) \otimes L_K(1,2) \simeq L_K(1,2) \simeq L_K(1,2) \otimes L_K(1,2) \simeq L_K(1,3)$ zupełniei wymyka się rozważaniom.

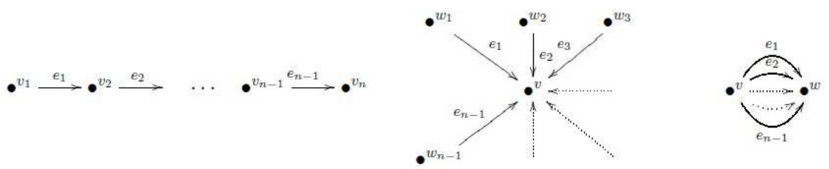
Drugi problem otwarty wiąże się z pytaniem dotyczącym monoidu klas modułów projektywnych algebry $V(R)$ wspomnianego na początku. Jest otwarte pytanie które monoidy mogą być monoidami klas modułów projektywnych algebry regularnej w sensie von-Neumanna. Oczywiście jest szereg warunków koniecznych i wiele rezultatów. Jeden z nich, uzyskany w 2007 roku był (wtedy) źródłem wielu nowych nie znanych wcześniej przykładów.

Twierdzenie 18 (Ara, Brustenga (2007))**.** *Niech Γ będzie grafem skończonym oraz K - ciałem. Wówczas istnieje K-algebra $Q_K(\Gamma)$, dla której:*

- *mamy inkluzję algebr $L_K(\Gamma) \hookrightarrow Q_K(\Gamma)$,*
- *$Q_K(\Gamma)$ jest regularna von Neumanna (z jednością),*
- *$V(L_K(\Gamma) \simeq V(Q_K(\Gamma)$.*

Wynik ten później rozszerzono do grafów wierszowo skończonych przy założeniu, że $Q_K(\Gamma)$ nie ma jedności.

Inne „elementarnie formułowalne” typy problemów wiążą się z pytaniem jaki jest związek nieizomorficznych grafów z ich algebrami Leavitta. Dla przykładu algebry macierzy można reprezentować przez trzy różne typy grafów:



* * * *

Referat na podstawie artykułu G. Abramsa: „Leavitt path algebras. The first decade”.