Moduły rozdzielne i algebry o skończenie wielu orbitach

Arkadiusz Męcel

Seminarium Zakładu Algebry, 28.02.2019 r.

Celem tego referatu jest opowiedzenie o tym jak rozważanie działania grupy elementów odwracalnych pierścienia R na moduły lewostronne tego pierścienia prowadzić może do nowych wyników związanych z rozważanymi przez różnych autorów, w tym uczestników tego Seminarium, problemami klasyfikacji algebr o skończenie wielu orbitach (różnych typów). Prezentować będę wyniki pracy doktorskiej, która powstała w 2015 roku na Uniwersytecie w Iowa, autorstwa Gerarda Koffi, którą promował Miodrag Iovanov. Iowa to mocny ośrodek algebraiczny, gdzie ludzie zajmują się algebrą przemienną, nieprzemienną, teorią modułów, teorią reprezentacji, algebrami Hopfa i innymi. Kluczowe rezultaty zebrane zostały w pracy „Incidence algebras and thin representation theory" będącej na razie w archiwum preprintów, zaś sam doktorat zatytułowany był: *Modules and orbits of the regular action, and deformations of incidence algebras.*

W trakcie tego referatu R jest pieścieniem z 1. W ostatnich latach pojawiło się kilka prac dotyczących problemu klasyfikacji algebr i pierścieni R, które charakteryzują warunki skończoności pochodzące od działania regularnego grupy $U(R)$ na R^+ postaci $u \circ r = ur$, orbity którego na użytek tego referatu nazywamy (lewostronnymi) orbitami regularnymi, lub pochodzące od działania $U(R) \times U(R)$ na R^+ postaci $(u, v) \cdot r = urv^{-1}$, którego orbity nazywać będziemy U-orbitami. Pytamy więc o pierścienie, które charakteryzuje:

- istnienie skończenie wielu orbit regularnych (Hirano)
- istnienie skończenie wielu U-orbit (Okniński, Renner, Krempa, Hryniewicka)
- istnienie skończenie wielu prawostronnych orbit regularnych na zbiorze ideałów lewostronnych (Męcel, Okniński)
- istnienie skończenie wielu U-orbit na różnych zbiorach ideałów, w szczególności pytanie kiedy algebra ma skończenie wiele ideałów dwustronnych (pytanie to zawiera problem klasyfikacji pierścieni prostych, więc raczej nie rozważamy go w pełnej ogólności).

Jak widać, charakterystyczną cechą wymienionych wyżej zagadnień jest to, że działamy na samej grupie addytywnej pierścienia R lub związanymi z nią podobiektami. Podejście Koffiego i Iovanova polega na rozszerzeniu klasy obiektów, na których działamy do wszystkich R-modułów. Niektóre z wymienionych wyżej pytań są interesujące w dużych klasach pieścieni a inne, z uwagi na związki z teorią reprezentacji, warto zawężać przede wszystkim do klasy algebr skończenie wymiarowych. W szczególności wkracza sie wówczas na grunt teorii modułów i wiąże wymienione wyżej problemy z klasyfikacją algebr skończonego typu reprezentacyjnego czy reprezentacjami ważnych klas algebr. Interesować nas będzie właśnie ta sytuacja. Ze względu na złożonośc techniczną będę głównie cytował rezultaty rozprawy Koffiego i wspominał o pewnych ideach w dowodzie. Zacznijmy od samych sformułowań.

Twierdzenie 1. *Niech A będzie algebrą, zaś M niech będzie A-modułem (zawsze lewostronnym). Rozważmy następujące warunki:*

1. *M ma skończenie wiele lewostronnych orbit regularnych przy działaniu $U(R)$,*
2. *M ma skończenie wiele podmodułów,*
3. *jeśli T jest A-modułem prostym oraz pierścień $End_A(T)$ jest nieskończony, to moduł $T \oplus T$ nie jest podfaktorem M.*

Wówczas:

- (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3),
- *jeśli R jest półlokalny, to warunki te są równoważne,*
- *jeśli A jest algebrą nad ciałem nieskończonym lub algebra artinowską (lewostronnie) nie mającą skończonych modułów, to (1)-(3) są równoważne z tym, że M jest modułem rozdzielnym.*

Twierdzenie 2. *Niech A będzie skończenie wymiarową bazową K-algebrą nad ciałem nieskończonym K. Następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest deformacją algebry incydencji skończonego zbioru częściowo uporządkowanego,*
2. *A jest lokalnie dziedziczna i każdy jej moduł jest sumą prostą modułów rozdzielnych (z odpowiedniej strony),*
3. *A ma skończenie wiele ideałów dwustronnych i jest (z odpowiedniej strony) lokalnie dziedziczna.*

Twierdzenie 3. *Niech A będzie algebrą bazową. Następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest algebrą incydencji zbioru częściowo uporządkowanego,*
2. *A nie ma cyklu w kołczanie i ma wierną rozdzielną reprezentację,*
3. *A ma wierną reprezentację, w której każdy składnik prosty pojawia się dokładnie raz (thin representation).*

Część referatu poświęcę wyjaśnieniu pojęć występujących w tych rezutatach, a następnie spróbuję opowiedzieć w jaki sposób wiążą się one z naszymi zagadnieniami. Idea pracy Koffiego polega na pokazaniu, że wszystkie moduły rozdzielne algebr skończenie wymiarowych pochodzą od deformacji algebr incydencji. A zatem opowiem najpierw o modułach rozdzielnych i algebrach incydencji.

Definicja 4. *R-moduł M nazwiemy **rozdzielnym**, jeśli krata jego podmodułów jest rozdzielna, a zatem dla dowolnych podmodułów A, B, C modułu M zachodzi równość:*

$$A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C.$$

*Pierścień R nazwiemy **lewostronnie rozdzielnym**, jeśli każdy lewostronny R-moduł jest rozdzielny. Analogicznie definiujemy prawostronną rozdzielność (i rozróżnienie to jest konieczne, choć przykład rozróżniający te klasy pojawił się dopiero w pracach Tuganbaeva we wczesnych latach 90', jest on w klasie tzw. dziedzin Bezout).*

Samo pojęcie modułu rozdzielnego funkcjonuje od lat 60', najpierw w kontekście przemiennym, gdzie pokazane jest, że przemienne pierścienie rozdzielne to dziedziny Prüfera, czyli dziedziny, w których kazdy ideał jest odwracalny w pieścieniu ułamków, a jesli dodamy Noetherowskość, to są to po prostu pierścienie Dedekinda. W przypadku nieprzemiennym szereg rezultatów uzyskano w latach 70', przede wszystkim w pracach Stephensona, Cohna i Camillo, który szli tropem bezpośrednich uogólnień do klas pierścieni półpierwszych noetherowskich, czy półpierwszych Goldiego czy PI. Wyniki w tych klasach okazały się być bardzo specyficzne, bo są to skończone produkty dziedzin niezmienniczych (ideały jednostronne są dwustronne), w których każdy ideał jest projektywny. Wychodząc jednak poza świat półpierwszy dostaje się znacznie bogatsze klasy algebr. Zwłaszcza jeśli uwzględnimy klasy pierścieni spełniających warunek **półrozdzielności**, oznaczający, że każdy moduł nad takim pierścieniem jest sumą prostą modułów rozdzielnych. Warunek ten sprowadza się często do pokazania, że projektywne nierozkładalne moduły danej algebry są rozdzielne. Klasa ta jest ważna z uwagi na badanie algebr **skończonego typu reprezentacyjnego**, które z dokładnością do izomorfizmu, mają jedynie skończenie wiele nierozkładalnych modułów. Ważnym wynikiem wczesnej teorii repreztancji algebr było twierdzenie Bautisty z 1981 roku, który wskazał szeroką i bardzo ważną klasę pierścieni półrozdzielnych - tak zwane **algebry incydencji**.

Algebry incydencji to obiekt wprowadzony przez Gian-Carlo Rotę w latach 60' i jako narzędzie do badania problemów kombinatorycznych, uogólniający znacznie zasadę włączeń i wyłączeń oraz formułę inwersyjną Mobiusa znaną w teorii liczb. Definiuje się ją w sposób następujący.

Definicja 5 (Algebra incydencji). *Niech $(P, \leqslant)$ będzie skończonym posetem. Algebrą incydencji $I(P,K)$ posetu P nad ciałem K nazywamy zbiór funkcji $f : P \times P \to K$ takich, że $f(x,y) = 0$, jeśli $x \nleqslant y$ z operacjami danymi przez:*

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y), \quad (f \star g)(x,y) = \sum_{x<z<y} f(x,z) \cdot g(z,y),$$

gdzie $f, g \in I(P,K)$ oraz $x, y, z \in P$.

Algebra ta ma jedynkę, którą jest delta Kroneckera, a bazą tej algebry jest zbiór funkcji f_{xy}, które są indykatorami pary (x,y) w zbiorze $P \times P$. Jest to baza mutlyplikatywna, a więc $f_{xy} \star f_{tz} = \delta_{y,t} f_{x,z}$. Przykłady algebr incydencji to między innymi:

- produkt kopii ciała bazowego (w przypadku, gdy relacja $\leqslant$ jest trywialna),
- algebra macierzy górnotrójkątnych (w przypadku, gdy $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz mamy naturalny porządek,
- ogólnie w przypadku, gdy zbiór P jest skończony możemy uporządkować jego elementy tak, żeby algebra $I(P,K)$ była izomorficzna z podalgebrą algebrą macierzy górnotrójkątnych. Takie algebry nazywamy **strukturalnymi algebrami macierzowymi**. Na marginesie warto przypomnieć, że rozstrzygnięcie które z tych algebr mają skończenie wiele ideałów dwustronnych, czy określenie ich typu reprezentacyjnego jest zadaniem wysoce nietrywialnym i wymaga głębokich wyników.

Może warto, z uwagi na młodszych uczestników seminarium, wspomnieć też o tym na czym polega kombinatoryczny smak algebr incydencji. Załóżmy, że poset P jest lokalnie skończony, czyli każdy przedział w tym posecie jest skończony. Rozważmy zatem pewne szczególne dwa elementy $\zeta, \mu \in I(P,K)$:

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ 0, & x \nleqslant y. \end{cases}, \quad \mu(x,x) = 1, \mu(x,z) = -\sum_{x \leqslant y < z} \mu(x,y).$$

Twierdzenie 6 (Twierdzenie inwersyjne Möbiusa)**.** *Niech P będzie lokalnie skończonym posetem. Wówczas w $I(P,K)$ zachodzi równość $\zeta^{-1} = \mu$. W szczególności ma miejsce równoważność:*

$$f(x,z) = \sum_{x \leqslant y \leqslant z} g(x,y) \iff g(x,z) = \sum_{x \leqslant y \leqslant z} f(x,y)\mu(y,z).$$

Przykład 1. *Niech $(P, \leqslant) = (\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \leqslant)$ gdzie $\leqslant$ to naturalny porządek. Łatwo wówczas sprawdzić, że $\mu(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -1, & i+1 = j \\ 0, & wpp. \end{cases}$. Na funkcji $f \in I(P,K)$ rozważamy funkcję $I(f) \in I(P,K)$ daną wzorem:*

$$I(f)(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i).$$

Wówczas zgodnie z twierdzeniem inwersyjnym Mobiusa mamy:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} I(f)(i)\mu(i,n) = I(f)(n) - I(f)(n-1) = \Delta(I(f))(n).$$

Uzyskaliśmy zatem tak zwane podstawowe twierdzenie rachunku różnicowego będące dyskretną wersję twierdzenia znanego z rachunku różniczkowego i całkowego. Mozna za jego pomocą dowodzić szereg tożsamości, zwłaszcza stosując dyskretną wersję całkowania przez części.

Przykład 2. *Niech P będzie zbiorem podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ z naturalnym cześciowym porządkiem danym przez inkluzję. Jest wówczas ćwiczeniem pokazanie, że:*

$$\mu(S,T) = \begin{cases} (-1)^{|T|-|S|}, & S \subseteq T \\ 0, & wpp. \end{cases}.$$

Niech teraz M będzie zbiorem, zaś $M_1, \ldots, M_n$ będą jego podzbiorami. Definiujemy dwie funkcje nalezące do $(P, \subseteq)$:

$$f(V) = \left| \bigcap_{i \in V} M_i \right|, \quad g(V) = |\{a \in M \mid a \in M_i, \forall_{i \in V}, a \notin M_j \forall_{j \notin V}\}|.$$

Nietrudno pokazać, że mamy równość: $f(V) = \sum_{V \subseteq T} g(T)$. Co więcej, $g(\emptyset) = \left| M - \bigcup_{i=1}^{n} M_i \right|$. W szczególności twierdzenie inwersyjne Mobiusa daje nam znaną zasadę włączeń i wyłączeń:

$$\left| M - \bigcup_{i=1}^{n} M_i \right| = g(\emptyset) = \sum_{\emptyset \subseteq T} \mu(\emptyset, T) f(T) = \sum_{T} (-1)^{|T|} \left| \bigcap_{i \in T} M_i \right|.$$

Przykład 3. *Niech P będzie zbiorem liczb całkowitych, zaś $m \leqslant n$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest dzielnikiem n. Wówczas pokazuje się, że:*

$$\mu(1,n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{jeśli } n \text{ to produkt } k \text{ różnych liczb pierwszych} \\ 0, & \text{jesli } n \text{ nie jest bezkwadratowa.} \end{cases}.$$

Co więcej, zachodzi równość:

$$\mu(d,n) = \mu\left(1, \frac{n}{d}\right).$$

Wynika stąd, że jeśli mamy dwie funkcje $f, g : \mathbb{Z}_{>0} :\to \mathbb{K}$ spełniające $f(n) = \sum_{d \leqslant n} g(d)$, to zachodzi oryginalne prawo inwersyjne wynalezione przez Möbiusa, czyli:

$$g(n) = \sum_{d \leqslant n} \mu(d,n) f(d) = \sum_{d \leqslant n} \mu\left(1, \frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

Widzimy zatem, że w języku iloczynu w algebrach incydencji można wyrażać i dowodzić różne interesujące fakty. Wróćmy teraz do głównych rezultatów pracy. Jednym z kluczowych pojęć w pracy Koffiego jest deformacja algebry incydencji. Głównym celem pracy jest bowiem pokazanie jak mogą wyglądać rozdzielne reprezentacje algebr skończenie wymiarowych.

Deformacja algebry incydencji ta polega na przedefiniowaniu mnożenia. Ma ona następującą postać: dla trójki $x \leqslant y \leqslant z$ ze zbioru P definiujemy pewien element λ^y_{xz} ciała K i życzymy sobie, aby algebra była rozpięta przez zbiór funkcji f_{xy} ale z mnożeniem:

$$f_{xy} \star_\lambda f_{tz} = \delta_{y,t} \lambda^y_{xz} f_{xz}.$$

Problem w tym, że mnożenie to nie zawsze prowadzi do algebry łącznej, w związku z tym wchodzą do gry rozważania homologiczne. Odpowiedni warunek łączności to takie określenie współczynników λ, aby spełniona była równość:

$$\lambda^y_{x,z} \cdot \lambda^z_{x,t} = \lambda^y_{x,t} \cdot \lambda^z_{y,t},$$

dla $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t \in P$.

Jest jeszcze inna równoważna definicja algebr incydencji, przydatna z punktu widzenia teorii reprezentacji: z posetem P kojarzymy kołczan $\Gamma_P = (P, E(P))$, którego wierzchołkami są elementy P oraz $(p, r) \in E(P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < r$. Algebra incydencji posetu P to algebra dróg kołczanu Γ_P podzielona przez wszystkie relacje postaci $w_1 - w_2$, gdzie w_1, w_2 są drogami o tym samym początku i końcu. Mój kontakt z algebrami incydencji pochodzi z pracy dotyczącej półgrupy klas sprzężoności ideałów lewostronnych $C(A)$ algebry skończenie wymiarowej A. W 2016 roku udowodniliśmy z prof. Oknińskim następujące twierdzenie (podaję przypadek szczególny)

Twierdzenie 7. *Niech A, B będą algebrami indycencji posetu skończonego takimi, że $C(A) \simeq C(B)$ są izomorficznymi półgrupami skończonymi. Wówczas $A \simeq B$.*

Wróćmy do sformułowania drugiego twierdzenia. Algebra jest lokalnie dziedziczna, jeśli każdy podmoduł lokalny jej nierozkładalnego projektywnego modułu jest projektywny. Lokalna dziedziczność charakteryzowana jest przez warunek, że morfizm pomiędzy dwoma projektywnymi nierozkładalnymi R-modułami musi być injektywny.

Przejdziemy teraz do szkicu dowodu twierdzenia 1 i pokazania z jakimi wynikami jest on związany. Załóżmy (1), a więc, że R-moduł M ma skończenie wiele orbit postaci $U(R)x_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. W takim razie mamy inkluzje:

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U(R)x_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Rx_i \subseteq M,$$

i można przyjąć, że usunięcie dowolnego z podmodułów Rx_i sprawia, że suma $\bigcup_{i=1}^{n} Rx_i$ nie daje całego M. Chcemy pokazać, że M ma skończenie wiele podmodułów. To jest jednak teraz jasne, bo każdy podmoduł N modułu M jest także modułem o skończenie wielu orbitach, bo N jest zamknięty na działanie $U(R)$ (a więc jest sumą pewnych orbit $U(R)x_i$. Podobnie moduł M/N ma ma skończenie wiele orbit. Ale ze zbiorów $U(R)x_i$ można skonstruować jedynie skończenie wiele różnych sum, a więc M ma skończenie wiele modułów i jest artinowski skończonej długości. Swoją drogą, jeśli N jest podmodułem M oraz N i M/N mają skończenie wiele orbit, to sam M niekoniecznie ma skończenie wiele orbit, jak pokażemy dalej.

Załóżmy teraz, że M ma skończenie wiele podmodułów. Wynika stąd oczywiście, że M ma skończoną długość. Jeśli M ma podfaktor izomorficzny z $T \oplus T$, gdzie T jest prosty i $End_R(T)$ nieskończony, wówczas twierdzimy, że $T \oplus T$ ma nieskończenie wiele podmodułów. Istotnie, wynika to ze znanego skądinąd faktu, że jeśli R jest pierścieniem oraz A, B dwoma lewostronnymi R-modułami, to istnieje bijekcja pomiędzy elementami $Hom(A, B)$ oraz zbiorem $C(B)$ dopełnień prostych B w $A \oplus B$. W szczególności jest T jest modułem z nieskończonym pierścieniem endomorfizmów, to $T \oplus T$ ma nieskończenie wiele podmodułów (w przypadku gdy T jest prosty, to jest stwierdzenie wtedy i tylko wtedy). Ale jeśli $T \oplus T$ ma nieskończenie wiele podmodułów i jest podmodułem M, to sam M ma nieskończenie wiele podmodułów, co daje sprzeczność z (2).

Dowodzimy, że (3) pociąga za sobą (2) przez indukcję względem długości $l(M)$ modułu M. Jeśli $l(M) = 1$, to jest to oczywiste. Dla R-modułu Y oraz podmodułu $X \subseteq Y$, niech $L(Y)$ oraz $L_X(Y)$ oznaczają kraty podmodułów Y oraz kraty podmodułów Y zawierających X, odpowiednio. Niech $\Sigma = soc(M)$. Wówczas:

$$L(M) = \{0\} \cup \bigcup_{S \subseteq \Sigma; S - \text{ prosty}} L_S(M).$$

Skoro każdy $L_S(M) = L(M/S)$ jest skończony, z założenia indukcyjnego, to jeśli $\Sigma \neq M$ to dowód jest zakończony, bo wtedy Σ ma skończenie wiele podmodułów, a w konsekwencji i sam M. Jeśli natomiast $\Sigma = M$, to M jest półprosty. Niech $S \subsetneq M$ będzie podmodułem prostym. Wówczas:

$$L(M) = L_S(M) \cup (L(M) \setminus L_S(M)).$$

Wiemy jednak, że $L_S(M)$ jest skończony, a każdy podmoduł M, który nie zawiera S jest zawarty w dopełnieniu S, z półprostoty. Każde takie dopełnienie zawiera skończenie wiele podmodułów (założenie indukcyjne). Tych dopełnień jest natomiast skończenie wiele, bo ich liczba, jak mówiliśmy wcześniej, równa jest mocy zbioru $Hom_R(S, M/S)$, czyli zbioru $End(S)^{n-1}$, gdzie n to wielokrotność S w M. Jeśli $n = 1$, to ta liczba wynosi 1, a jeśli $n \geqslant 2$, to $S \oplus S$ jest zawarty w M i z założenia w (3) pierścień $End_R(S)$ jest skończony. A zatem M ma skończenie wiele podmodułów.

Pokażmy też, że gdy pierścień jest półlokalny, to mamy (2) $\Rightarrow$ (1). To się opiera na lemacie, który kiedyś dowodziłem na seminarium, mianowicie, że w pieścieniu półlokalnym dwa elementy generują ten sam podmoduł wtedy i tylko wtedy, gdy są w tej samej orbicie $U(R)$. Jest to zasadzie, zgodnie z Koffim, obserwacja Bassa, choć sfomułowana została niezależnie np. w artykule prof. Oknińskiego i Lexa Rennera.

Zobaczmy jeszcze przykład uzasadniający, że półlokalność ma znaczenie. Rozważmy pierścień $R = \mathbb{C}\langle x, y\rangle$, który nie jest z pewnością półlokalny. Niech V będzie 2-wymiarową przestrzenią liniową reprezentowaną w postaci wektorów kolumnowych, ze strukturą R-modułu, gdzie x, y działają jako macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas V jest modułem prostym, ponieważ A oraz B nie mają wspólnego wektora własnego. Grupą jedności pierścienia R jest $\mathbb{C}$. A zatem dla każdego niezerowego $v \in V$, mamy orbitę $\mathbb{C}v$, a więc jest ich nieskończenie wiele.

W twierdzeniu 1 jest również sformułowanie dotyczące przypadku, gdy A jest algbrą nad ciałem nieskończonym lub algebrą artinowską nie mającą skończonych modułów. W obydwu przypadkach mamy do czynienia z algebrami półlokalnymi, więc (1)-(3) są równoważne. Dlaczego warunek ten jest równoważny rozdzielności? W jedną stronę to jest jasne i jest to wynik z teorii krat. Wiadomo bowiem, że krata rozdzielna nie może zawierać diamentu, a zatem jeśli M ma być rozdzielny, to nie może zawierać podfaktora postaci $S \oplus S$, gdzie S jest prosty. Z drugiej strony jeśli K jest algebrą gdzie K jest ciałem nieskończonym lub jeśli algebra artinowska nie ma modułów o skończonych podfaktorach, to pokazuje się, że każdy prosty podfaktor takiej algebry ma nieskończony pierścień endomorfizmów. W przypadku algebr nad ciałem nieskończonym to jest oczywiste, w przypadku algebr artinowskich bez skończonego faktora wymaga pewnego wysiłku. A zatem wystarczy pokazać, że jeśli moduł M nie zawiera $S \oplus S$ to jest rozdzielny. O tym, dla dowolnych pierścieni, mówi rezultat Camillo. W przypadku półlokalnym to jest proste; jeśli $e_1, \dots, e_n$ jest zbiorem prymitywnych ortogonalnych idempotentów, to z dokładności lokalizacji $M \to e_i M$ oraz z faktu, że M jest sumą prostą $e_i M$ wynika, że R-moduł M jest rozdzielny wtedy i tylko wtedy, gdy $e_i M$ są rozdzielne nad pierścieniami $e_i R e_i$. To jest natomiast równoważne z tym, że $e_i M$ są seryjne nad $e_i R e_i$ (bo te ostatnie są pierścieniami lokalnymi). Stąd już łatwo dostajemy równoważnosc z kryterium nie posiadania podfaktora postaci $S \oplus S$, gdzie S jest prosty.

Pokażemy teraz dwa wnioski związane z problemami skończenie wielu orbit.

Twierdzenie 8 (Hirano)**.** *Następujące warunki są równoważne dla pierścienia R:*

(1) R ma skończenie wiele regularnych orbit lewostronnych,

(2) R ma skończenie wiele ideałów lewostronnych,

(3) R jest sumą prostą skończenie wielu lewostronnych seryjnych pierścieni artinowskich oraz pierścienia skończonego.

Dowód. Implikacje (1) $\Rightarrow$ (2) oraz (3) $\Rightarrow$ (1) wynikają z Twierdzenia 1, dla modułu $M =_R R$. Pozotaje zatem pokazać (2) $\Rightarrow$ (3). Tu korzysta się z następujacego lematu, którego dowód jest odobinę techniczny i też korzysta z Twierdzenia 1.

Lemat 9. *Niech R będzie pierścieniem, który ma skończenie wiele ideałów lewostronnych.*

- *Jeśli T, S są nieizomorficznymi prostymi R-modułami oraz S jest nieskończony, to $Ext^1_R(T, S) = 0$, czyli każdy ciąg dokładny postaci: $0 \to T \to T \oplus S \to S \to 0$ rozszczepia się*

- *Co więcej jeśli S jest nieskończony oraz T jest skończony, to $Ext^1_R(S, T) = 0$.*

Korzystając z tego faktu widzimy, że przy założeniu (2) wszystkie nieskończone R-moduły proste są Ext prostopadłe, a zatem R rozkłada się na produkt bloków $R_f \times R_I$, gdzie R_f jest skończony, zaś R_I mają tylko nieskończone moduły proste. Co więcej R_I, zgodnie z lematem, są produktem lokalnych pierścieni artinowskich R_S. Teraz korzystając z (3) w Twierdzeniu 1 wiemy, że każda lokalizacja R_S nie ma podfaktora izomorficznego z $S \oplus S$, a zatem $J(R_S)^n / J(R_S)^{n+1}$ jest izomorficzny z S lub 0. A zatem R_S jest (lewostronnie) seryjny. $\square$

Z głównego twierdzenia wynikają także wnioski dotyczące algebr o skończenie wielu ideałach dwustronnych, na przykład dla algebr skończenie wymiarowych. Wiadomo skądinąd, że problem ten jest Morita-niezalezny, a zatem wystarczy zakładać, że algebra modulo radykał Jacobsona jest sumą prostą ciał. Jeśli założymy, że $e_1, \ldots, e_n$ są prymitywnymi idempotentami ortogonalnymi oraz I jest dwustronnym ideałem w A, to I jest sumą prostą Ie_i oraz Ie_i są lewostronnymi podmodułami w Ae_i. A zatem jeśli Ae_i ma skończenie wiele podmodułów dla każdego i, to A ma skończenie wiele ideałów. Ale odwrotnie być nie musi o czym mówi nastepujący przykład.

Przykład 4. *Rozważmy kołczan Toeplitza Q*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "x"] & b \arrow[l, "y"'] \end{tikzcd}$$

oraz niech A będzie algebrą ilorazową algebry dróg tego kołczanu przez relację $x^2 = 0$, gdzie K jest ciałem nieskończonym. Algebra ta ma bazę $\{a, b, x, y, xy\}$. Nietrudno pokazać, że prawostronne projektywne moduły nierozkładalne to $P_r(b) = lin(b)$ oraz $P_r(a) = lin(a, x, y, xy)$. Co więcej cokół $P_r(a)$ jest rozpięty przez $\{x,\ xy\}$ i izomorficzny do $Kb \oplus Kb$, a więc cokół nie jest bezkwadratowy. Oznacza to, że $P_r(b)$ ma nieskończenie wiele podmodułów. Tymczasem nietrudno zobaczyć, że A ma skończenie wiele ideałów dwustronnych, bo każdy dwustronny ideał albo jest zerem albo zawiera xy. Dokładnie takich ideałów jest 5.

Sprawa poprawia się gdy dodamy założenie, że A ma acykliczny kołczan. Wówczas zachodzą następujące rezultaty.

Twierdzenie 10. *Niech A będzie algebrą bazową nad ciałem nieskończonym. Jeśli kołczan A nie ma cykli, to wszystkie projektywne nierozkładalne A-moduły są rozdzielne, równoważnie więc – mają skończenie wiele podmodułów. W szczególności w klasie algebr bazowych z acyklicznym kołczanem, A jest półrozdzielna wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończenie wiele ideałów dwustronnych.*

Słownik pojęć

- pieścień/moduł (lewostronnie) artinowski - taki, w którym każdy zstępujący ciąg (lewostronnych) ideałów/podmodułów stabilizuje się,
- pieścień/moduł (lewostronnie) noetherowski - taki, w którym każdy wstępujący ciąg (lewostronnych) ideałów/podmodułów stabilizuje się,
- ciąg kompozycyjny modułu M - ciąg podmodułów $\{0\} = J_0 \subseteq \ldots \subseteq J_n = M$ taki, że wszystkie inkluzje są ostre oraz J_k jest maksymalnym podmodułem J_{k+1}, innymi słowy, moduły ilorazowe J_{k+1}/J_k są proste,
- twierdzenie Jordana-Höldera - dwa skończone ciągi kompozycyjne mają, z dokładnością do kolejności, izomorficzne faktory proste,
- pierścień półlokalny - pierścień R taki, że $R/J(R)$ jest półprosty (np. każdy artinowski oraz jego automorfizmy),
- pierścień Dedekinda - przemienna dziedzina Noetherowska R, w której każdy element całkowity ciała ułamków (R) należy do R, równoważnie: każdy ideał pierwszy jest maksymalny, ważna własność: jednoznaczność rozkładu ideału na iloczyn (skończony) ideałów pierwszych,
- pierścień Prüffera - przemienna dziedzina, w której każdy niezerowy skończenie generowany deał jest odwracalny (noetherowskie pierścienie Prf̈fera to pierścienie Dedekinda),
- cokół modułu M, czyli $soc(M)$ - suma podmodułów minimalnych tego modułu. Pierścienie R, dla których $soc(M) = M$, dla wszystkich R-modułów M są półproste,
- thin representation - reprezentacja pierścienia R, w której cokole nie ma dwóch izomorficznych składników prostych,
- pierścień rozdzielny/półrozdzielny - taki, w którym każdy moduł/moduł projektywny nierozkładalny ma rozdzielną kratę podmodułów,
- pierścień (lokalnie) dziedziczny - taki, w którym wszystkie podmoduły (lokalnych) modułów projektywnych sa projektywne.

Literatura

[1] R. Bautista, On algebras close to hereditary Artin algebras, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico 21 (1981), 21-104.

[2] Camillo V., Distributive modules, J. Algebra 36 (1975), 16-25.

[3] Iovanov M., Koffi G.: On Incidence Algebras and their Representations (2017), https://arxiv.org/abs/1702.03356v5

[4] Y. Hirano, Rings with Finitely Many Orbits under the Regular Action, Proceedings of the Algebra Conference- Venezia, 343-347, 2002.

[5] G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Mobius functions, Z Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), 340-368.