O algebrach Hecke'go

Arkadiusz Męcel

Uniwersytet Warszawski
am234204@students.mimuw.edu.pl

Seminarium badawcze Zakładu Algebry – 29.04.2010r.

Plan referatu

Plan referatu

Plan referatu

1. Rozkład Bruhata
2. Grupy proste
3. Algebry Hecke'go

Plan referatu

1. Rozkład Bruhata
2. Grupy proste
3. Algebry Hecke'go

Oznaczenia

$\mathbb{K}$ – ciało

$Gl_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy odwracalnych

$B_n(\mathbb{K})$ – grupa odwracalnych macierzy górnotrójkątnych

$U_n(\mathbb{K})$ – grupa macierzy unipotentnych

$T_n(\mathbb{K})$ – grupa odwracalnych macierzy diagonalnych

S_n – grupa macierzy permutacyjnych

Rozkład Bruhata

Wprowadzenie

Niech G będzie grupą i $H \leq G$. Wówczas $H \times H$ działa na G:

$$(h_1, h_2)g = h_1 g h_2^{-1}, \quad h_1, h_2 \in H, g \in G.$$

Dostajemy **rozkład G na warstwy podwójne** postaci:

$$G = \dot{\bigcup_{x \in X}} HxH.$$

Będziemy zainteresowani sytuacjami, gdy:

1. istnieje struktura algebraiczna na X
2. istnieje struktura algebraiczna na $\{HxH, x \in X\}$.

Wprowadzenie

Niech G będzie grupą i $H \leq G$. Wówczas $H \times H$ działa na G:

$$(h_1, h_2)g = h_1 g h_2^{-1}, \quad h_1, h_2 \in H, g \in G.$$

Dostajemy **rozkład G na warstwy podwójne** postaci:

$$G = \dot{\bigcup_{x \in X}} HxH.$$

Będziemy zainteresowani sytuacjami, gdy:

1. istnieje struktura algebraiczna na X
2. istnieje struktura algebraiczna na $\{HxH, x \in X\}$.

Rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$

$Gl_n(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_n(\mathbb{K})$ postaci:

$$Gl_n(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S_n}} B\sigma B.$$

Rozkład $Sl_n(\mathbb{K})$

$Sl_n(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_n(\mathbb{K}) \cap Sl_n(\mathbb{K})$ postaci:

$$Sl_n(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S_n}} B\sigma B.$$

Rozkład $Sp_{2n}(\mathbb{K})$

$Sp_{2n}(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_{2n}(\mathbb{K}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{K})$ postaci:

$$Sp_{2n}(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S(H)}} B\sigma B.$$

Rozkład grup ortogonalnych

$SO_{2n}(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_{2n}(\mathbb{K}) \cap SO_{2n}(\mathbb{K})$ postaci:

$$SO_{2n}(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S(H')}} B\sigma B.$$

Jeśli $char(\mathbb{K}) \neq 2$, to $SO_{2n+1}(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem $B = B_{2n+1}(\mathbb{K}) \cap SO_{2n+1}(\mathbb{K})$ postaci:

$$SO_{2n+1}(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S(H'')}} B\sigma B.$$

Grupy klasyczne

- **Seria A**: $A_n = Sl_{n+1}(\mathbb{C})$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- **Seria B**: $B_n = SO_{2n+1}(\mathbb{C})$, $n = 2, 3, 4, \dots$
- **Seria C**: $C_n = Sp_{2n}(\mathbb{C})$, $n = 2, 3, 4, \dots$
- **Seria D**: $D_n = SO_{2n}(\mathbb{C})$, $n = 4, 5, 6, \dots$

Rozkład Bruhata

Bruhat (1954)

Niech $G \in Gl_k(\mathbb{C})$ należy do jednej z serii: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.
Wówczas jeśli $B = G \cap B_n(\mathbb{C})$, oraz $T = G \cap T_n(\mathbb{C})$ to:

$$G = \dot{\bigcup_{\sigma \in W}} B\sigma B, \quad W \simeq N(T)/T.$$

Podgrupa Weyla

Weyl (1925-26)

Każda prosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, wyznaczona przez pewną skończoną grupę W permutacji jednowymiarowych podprzestrzeni algebry Liego $\mathfrak{g}$.

Grupa W jest izomorficzna z grupą skończoną generowaną przez symetrie przestrzeni euklidesowej E^n.

Podgrupa Weyla

Coxeter (1934-35)

Abstrakcyjna grupa skończona może być izomorficzna z grupą skończoną generowaną przez symetrie w E^n wtedy i tylko wtedy, gdy jej generatory spełniają relacje postaci:

$$s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{n_{ij}} = 1, i \neq j, n_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$

$Gl_n(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_n(\mathbb{K})$ postaci:

$$Gl_n(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S_n}} B\sigma B.$$

Dowód:

1. $Gl_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in S_n} B_n(\mathbb{K})\sigma B_n(\mathbb{K})$
2. $B_n(\mathbb{K})\sigma_1 B_n(\mathbb{K}) = B_n(\mathbb{K})\sigma_2 B_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

Rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$

$Gl_n(\mathbb{K})$ rozkłada się na sumę rozłączną warstw podwójnych względem podgrupy $B = B_n(\mathbb{K})$ postaci:

$$Gl_n(\mathbb{K}) = \dot{\bigcup_{\sigma \in S_n}} B\sigma B.$$

Dowód:

1. $Gl_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in S_n} B_n(\mathbb{K})\sigma B_n(\mathbb{K})$
2. $B_n(\mathbb{K})\sigma_1 B_n(\mathbb{K}) = B_n(\mathbb{K})\sigma_2 B_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2.$

Dowód 1.

Krok 1.

Bierzemy macierz $A_0 \in Gl_n(\mathbb{K})$ postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 1.

... i patrzymy na pierwszą kolumnę w A_0.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \color{red}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 1.

Niech $l_1 := \max\{1 \leq k \leq n \,|\, a_{k1} \neq 0\}$. Np. $l_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 1.

Istnieją $X_1, Y_1 \in B_n(\mathbb{K})$, że iloczyn $A_1 = X_1 A Y_1$ ma postać:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \cdots & \mathbf{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{a_{n3}} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 2.

Patrzymy na drugą kolumnę macierzy A_1.

$$\begin{pmatrix} 0 & \color{red}{a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1 & \color{red}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \color{red}{a_{32}} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \color{red}{\vdots} & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \color{red}{a_{n2}} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 2.

Niech $l_2 := \max\{1 \leq k \leq n \,|\, a_{k2} \neq 0\}$. $l_2 \neq l_1$. Np. $l_2 = n$...

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \color{red}{a_{n2}} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Krok 2.

Istnieją $X_2, Y_2 \in B_n(\mathbb{K})$, że iloczyn $A_2 := X_2 A_1 Y_2$ ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dowód 1.

Itd...

$$A_{k+1} := X_{k+1} A_k Y_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Skoro wektory e_{l_i} są dla $1 \leq i \leq n$ parami różne, zatem macierz A_n jest permutacyjna. Dostajemy równość:

$$A_0 = \underbrace{(X_n X_{n-1} \ldots X_2 X_1)^{-1}}_{B_n(\mathbb{K})} A_n \underbrace{(Y_1 Y_2 \ldots Y_{n-1} Y_n)^{-1}}_{B_n(\mathbb{K})}.$$

Dowód 1.

Itd...

$$A_{k+1} := X_{k+1} A_k Y_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Skoro wektory e_{l_i} są dla $1 \leq i \leq n$ parami różne, zatem macierz A_n jest permutacyjna. Dostajemy równość:

$$A_0 = \underbrace{(X_n X_{n-1} \ldots X_2 X_1)^{-1}}_{B_n(\mathbb{K})} A_n \underbrace{(Y_1 Y_2 \ldots Y_{n-1} Y_n)^{-1}}_{B_n(\mathbb{K})}.$$

Dowód 2.

$$B_n(\mathbb{K})\,\sigma_1\,B_n(\mathbb{K}) = B_n(\mathbb{K})\,\sigma_2\,B_n(\mathbb{K})$$

Istnieją $A, B \in B_n(\mathbb{K})$, że:

$$\sigma_1 = A\sigma_2 B.$$

Zgodnie z algorytmem Gaussa:

- istnieje ciąg $W_1, W_2, \ldots, W_n$ macierzy złożeń operacji wierszowych, że: $W_1 W_2 \ldots W_n A = I$,
- istnieje ciąg $K_1, K_2, \ldots, K_n$ macierzy złożeń operacji kolumnowych, że: $BK_1 K_2 \ldots K_n = I$.

Dowód 2.

$$B_n(\mathbb{K})\,\sigma_1\,B_n(\mathbb{K}) = B_n(\mathbb{K})\,\sigma_2\,B_n(\mathbb{K})$$

Istnieją $A, B \in B_n(\mathbb{K})$, że:

$$\sigma_1 = A\sigma_2 B.$$

Zgodnie z algorytmem Gaussa:

- istnieje ciąg $W_1, W_2, \ldots, W_n$ macierzy złożeń operacji wierszowych, że: $W_1 W_2 \ldots W_n A = I$,
- istnieje ciąg $K_1, K_2, \ldots, K_n$ macierzy złożeń operacji kolumnowych, że: $BK_1 K_2 \ldots K_n = I$.

Dowód 2.

$B_n(\mathbb{K})\,\sigma_1\,B_n(\mathbb{K}) = B_n(\mathbb{K})\,\sigma_2\,B_n(\mathbb{K})$

Istnieją $A, B \in B_n(\mathbb{K})$, że:

$$\sigma_1 = A\sigma_2 B.$$

Zgodnie z algorytmem Gaussa:

- istnieje ciąg $W_1, W_2, \ldots, W_n$ macierzy złożeń operacji wierszowych, że: $W_1 W_2 \ldots W_n A = I$,
- istnieje ciąg $K_1, K_2, \ldots, K_n$ macierzy złożeń operacji kolumnowych, że: $BK_1 K_2 \ldots K_n = I$.

Dowód 2.

$$(W_1 W_2 \dots W_n)\, \sigma_1\, (K_1 K_2 \dots K_n) = \sigma_2$$

Pierwsze kolumny σ_1 i σ_2 są takie same:

- Mnożenie z prawej strony przez $K_1 K_2 \dots K_n$ nie zmienia pierwszej kolumny σ_1,
- Mnożenie z lewej strony przez $W_1 W_2 \dots W_n$ może jedynie zwiększyć ilość niezerowych elementów kolumny σ_1.

Podobnie dla kolejnych kolumn. Stąd $\sigma_1 = \sigma_2$.

Dowód 2.

$$(W_1 W_2 \dots W_n)\, \sigma_1\, (K_1 K_2 \dots K_n) = \sigma_2$$

Pierwsze kolumny σ_1 i σ_2 są takie same:

- Mnożenie z prawej strony przez $K_1 K_2 \dots K_n$ nie zmienia pierwszej kolumny σ_1,
- Mnożenie z lewej strony przez $W_1 W_2 \dots W_n$ może jedynie zwiększyć ilość niezerowych elementów kolumny σ_1.

Podobnie dla kolejnych kolumn. Stąd $\sigma_1 = \sigma_2$.

Dowód 2.

$$(W_1 W_2 \dots W_n)\,\sigma_1\,(K_1 K_2 \dots K_n) = \sigma_2$$

Pierwsze kolumny σ_1 i σ_2 są takie same:

- Mnożenie z prawej strony przez $K_1 K_2 \dots K_n$ nie zmienia pierwszej kolumny σ_1,
- Mnożenie z lewej strony przez $W_1 W_2 \dots W_n$ może jedynie zwiększyć ilość niezerowych elementów kolumny σ_1.

Podobnie dla kolejnych kolumn. Stąd $\sigma_1 = \sigma_2$.

Dowód 2.

$$(W_1 W_2 \dots W_n)\,\sigma_1\,(K_1 K_2 \dots K_n) = \sigma_2$$

Pierwsze kolumny σ_1 i σ_2 są takie same:

- Mnożenie z prawej strony przez $K_1 K_2 \dots K_n$ nie zmienia pierwszej kolumny σ_1,
- Mnożenie z lewej strony przez $W_1 W_2 \dots W_n$ może jedynie zwiększyć ilość niezerowych elementów kolumny σ_1.

Podobnie dla kolejnych kolumn. Stąd $\sigma_1 = \sigma_2$.

Podsumowanie

1. istnieje rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$, którego warstwy indeksowane są przez $W \simeq S_n$,
2. podobne rozkłady występują dla prostych grup Liego typów: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$,
3. warstwy powstające przy rozkładzie Bruhata grup Liego indeksowane są przez grupy Weyla-Coxetera.

Podsumowanie

1. istnieje rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$, którego warstwy indeksowane są przez $W \simeq S_n$,
2. podobne rozkłady występują dla prostych grup Liego typów: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$,
3. warstwy powstające przy rozkładzie Bruhata grup Liego indeksowane są przez grupy Weyla-Coxetera.

Podsumowanie

1. istnieje rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$, którego warstwy indeksowane są przez $W \simeq S_n$,
2. podobne rozkłady występują dla prostych grup Liego typów: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$,
3. warstwy powstające przy rozkładzie Bruhata grup Liego indeksowane są przez grupy Weyla-Coxetera.

Podsumowanie

1. istnieje rozkład $Gl_n(\mathbb{K})$, którego warstwy indeksowane są przez $W \simeq S_n$,
2. podobne rozkłady występują dla prostych grup Liego typów: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$,
3. warstwy powstające przy rozkładzie Bruhata grup Liego indeksowane są przez grupy Weyla-Coxetera.

Grupy proste

Uogólnienie wyników Bruhata

Chevalley (1955)

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem różnym od $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$. Z każdą prostą algebrą Liego nad $\mathbb{K}$ związać można grupę prostą:

- dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – wszystkie proste grupy Liego nad $\mathbb{C}$,
- dla $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ – wszystkie proste grupy algebraiczne nad $\mathbb{K}$,
- dla $|\mathbb{K}| < \infty$ – wszystkie znane wówczas serie skończonych grup prostych pochodzących od grup klasycznych, także nowe serie grup prostych.

Skończone grupy proste przed 1955r.

Skończone grupy proste znane przed końcem XIX. wieku:

- grupy cykliczne $\mathbb{Z}_p$, p – pierwsze,
- grupy alternujące A_n, dla $n > 4$,
- grupy proste pochodzące od grup klasycznych $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$,
- grupy sporadyczne pochodzące od Mathieu (1861-1873).

W pierwszej połowie XX. wieku nie znaleziono żadnych innych...

Rozszerzenia

Definicja

Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup i niech $\ker(\phi) = L$. Mówimy, że G jest **rozszerzeniem** H przez L.

Problem rozszerzeń

Niech $\mathcal{G} = \{G_\alpha, \alpha \in A\}$ będzie pewną rodziną grup prostych. Znaleźć wszystkie takie grupy G, dla których istnieje skończony ciąg homomorfizmów spełniający następujące warunki:

- $\phi_1 \quad : G \to G_{\alpha_1} \in \mathcal{G}, \quad \ker(\phi_1) = G_1,$
- $\phi_{k+1} : G_k \to G_{\alpha_2} \in \mathcal{G}, \quad \ker(\phi_{k+1}) = G_{k+1},$
- istnieje n, że $\ker(\phi_n) \in \mathcal{G}$.

Rozszerzenia

Definicja

Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup i niech $\ker(\phi) = L$. Mówimy, że G jest **rozszerzeniem** H przez L.

Problem rozszerzeń

Niech $\mathcal{G} = \{G_\alpha, \alpha \in A\}$ będzie pewną rodziną grup prostych. Znaleźć wszystkie takie grupy G, dla których istnieje skończony ciąg homomorfizmów spełniający następujące warunki:

- $\phi_1 \quad : G \quad \to G_{\alpha_1} \in \mathcal{G}, \quad \ker(\phi_1) = G_1,$
- $\phi_{k+1} : G_k \to G_{\alpha_2} \in \mathcal{G}, \quad \ker(\phi_{k+1}) = G_{k+1},$
- istnieje n, że $\ker(\phi_n) \in \mathcal{G}$.

Grupy klasyczne

Dickson (1901), Dieudonne (1948)

Niech G będzie grupą klasyczną nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$, $p \neq 2, 3$. Wówczas komutator G' grupy G jest rozszerzeniem nieabelowej grupy prostej przez centrum G'. Innymi słowy $G'/Z(G')$ jest grupą prostą.

Grupy klasyczne

Dickson (1901), Dieudonne (1948)

Niech G będzie grupą klasyczną nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$, $p \neq 2, 3$. Wówczas komutator G' grupy G jest rozszerzeniem nieabelowej grupy prostej przez centrum G'. Innymi słowy $G'/Z(G')$ jest grupą prostą.

Przykład

Od grup typu **A** pochodzi seria $PSL_{n+1}(\mathbb{F}_p) \simeq Sl_{n+1}(\mathbb{F}_p)/\mathbb{Z}_2$:

$$(Sl_{n+1}(\mathbb{F}_p))' = Sl_{n+1}(\mathbb{F}_p), \quad Z(Sl_{n+1}(\mathbb{F}_p)) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Grupy algebraiczne

Definicja

Niech G będzie spójną grupą algebraiczną nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

- G jest **rozwiązalna** jeśli jest izomorfizczna z domkniętą podgrupą $B_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,
- G jest **unipotentna** jeśli jest izomorficzna z domkniętą podgrupą $U_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,
- G jest **torusem** jeśli jest izomorficzna z domkniętą podgrupą $T_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,

Grupy algebraiczne

Definicja

Niech G będzie spójną grupą algebraiczną nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

- G jest **rozwiązalna** jeśli jest izomorfizczna z domkniętą podgrupą $B_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,
- G jest **unipotentna** jeśli jest izomorficzna z domkniętą podgrupą $U_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,
- G jest **torusem** jeśli jest izomorficzna z domkniętą podgrupą $T_n(\mathbb{K})$, dla pewnego n,

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Definicja

Niech G będzie spójną grupą algebraiczną nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Wówczas:

- **radykałem unipotentnym** $\mathcal{R}_u(G)$ grupy G nazywamy element maksymalny w zbiorze tych podgrup normalnych w G, które są domknięte, spójne i unipotentne,
- **podgrupą Borela** grupy G nazywamy element maksymalny w zbiorze tych podgrup w G, które są domknięte, spójne i rozwiązalne,
- **podgrupą Weyla** grupy G nazywamy iloraz $N(T)/T$, gdzie T jest torusem maksymalnym w G.

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Definicja

Spójną grupę algebraiczną G nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ nazywamy **grupą reduktywną**, jeśli $\mathcal{R}_u(G) = 1_G$.

Przykłady

- $G = Gl_n(\mathbb{K})$ jest grupą reduktywną. Jeśli $B \lhd G$, to:
  - $B \subseteq Z(G) = \{tI, t \in \mathbb{K}^*\}$ lub
  - $B \supseteq Sl_n(\mathbb{K})$
- $G = B_n(\mathbb{K})$ nie jest grupą reduktywną dla $n \geq 2$. $\mathcal{R}_u(G) = U_n(\mathbb{K})$.

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Definicja

Spójną grupę algebraiczną G nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ nazywamy **grupą redukcyjną**, jeśli $\mathcal{R}_u(G) = 1_G$.

Przykłady

- $G = Gl_n(\mathbb{K})$ jest grupą reduktywną. Jeśli $B \lhd G$, to:
  - $B \subseteq Z(G) = \{tI, t \in \mathbb{K}^*\}$ lub
  - $B \supseteq Sl_n(\mathbb{K})$
- $G = B_n(\mathbb{K})$ nie jest grupą reduktywną dla $n \geq 2$. $\mathcal{R}_u(G) = U_n(\mathbb{K})$.

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Definicja

Spójną grupę algebraiczną G nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ nazywamy **grupą redukcyjną**, jeśli $\mathcal{R}_u(G) = 1_G$.

Przykłady

- $G = Gl_n(\mathbb{K})$ jest grupą reduktywną. Jeśli $B \triangleleft G$, to:
  - $B \subseteq Z(G) = \{tI, t \in \mathbb{K}^*\}$ lub
  - $B \supseteq Sl_n(\mathbb{K})$
- $G = B_n(\mathbb{K})$ nie jest grupą reduktywną dla $n \geq 2$. $\mathcal{R}_u(G) = U_n(\mathbb{K})$.

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Definicja

Spójną grupę algebraiczną G nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ nazywamy **grupą redukcyjną**, jeśli $\mathcal{R}_u(G) = 1_G$.

Przykłady

- $G = Gl_n(\mathbb{K})$ jest grupą reduktywną. Jeśli $B \lhd G$, to:
  - $B \subseteq Z(G) = \{tI, t \in \mathbb{K}^*\}$ lub
  - $B \supseteq Sl_n(\mathbb{K})$
- $G = B_n(\mathbb{K})$ nie jest grupą reduktywną dla $n \geq 2$. $\mathcal{R}_u(G) = U_n(\mathbb{K})$.

Rozkład Bruhata w grupach algebraicznych

Twierdzenie

Niech G będzie grupą reduktywną nad $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, B – podgrupą Borela w G, zaś W – grupą Weyla w G. Wówczas:

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} BwB.$$

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest reduktywna.

- grupa $B_n(\mathbb{C})$ jest podgrupą Borela w $Gl_n(\mathbb{C})$,
- grupa $T_n(\mathbb{C})$ jest maksymalnym torusem w $Gl_n(\mathbb{C})$
- grupa $N(T_n(\mathbb{C}))$ są to te elementy grupy $Gl_n(\mathbb{C})$, które w każdym wierszu i w każdej kolumnie mają dokładnie jeden element niezerowy
- podgrupa Weyla $N(T_n(\mathbb{C}))/T_n(\mathbb{C})$ grupy $Gl_n(\mathbb{C})$ jest izomorficzna z S_n.

$Gl_n(\mathbb{C})$ – jeszcze raz

Grupa $Gl_n(\mathbb{C})$ jest generowana przez $B = B_n(\mathbb{C})$ i $N = N(T_n(\mathbb{C}))$. Co więcej:

$$T_n(\mathbb{C}) = B \cap N \lhd N$$

Iloraz $N/(B \cap N)$ jest izomorficzny z grupą generowaną przez skończony zbiór inwolucji.

Abstrakcyjny odpowiednik

Niech G będzie grupą, w której:

- T1 $G = \langle B, N \rangle$, gdzie $B, N \leq G$,
- T2 $(B \cap N) \lhd N$ oraz iloraz $W = N/(B \cap N)$ jest generowany przez skończony zbiór inwolucji S.

Tits (koniec lat 50')

Znaleźć takie warunki, by:

$$w, w' \in W \Rightarrow (BwB = Bw'B \Leftrightarrow w = w').$$

Abstrakcyjny odpowiednik

Niech G będzie grupą, w której:

- T1 $G = \langle B, N \rangle$, gdzie $B, N \leq G$,
- T2 $(B \cap N) \triangleleft N$ oraz iloraz $W = N/(B \cap N)$ jest generowany przez skończony zbiór inwolucji S.

Tits (koniec lat 50')
Znaleźć takie warunki, by:

$$w, w' \in W \Rightarrow (BwB = Bw'B \Leftrightarrow w = w').$$

System Titsa

Definicja (Tits, 1962)

Niech G będzie grupą skończoną spełniającą $T1, T2$. Powiemy, że G jest **systemem Titsa** (lub **grupą z (B,N)-parą**) jeśli spełnione są następujące warunki:

T3 $sBw \subseteq BwB \cup BswB$, dla $s \in S, w \in W$,

T4 $sBs \neq B$, dla $s \in S$.

System Titsa

Definicja (Tits, 1962)

Niech G będzie grupą skończoną spełniającą $T1, T2$. Powiemy, że G jest **systemem Titsa** (lub **grupą z (B,N)-parą**) jeśli spełnione są następujące warunki:

T3 $sBw \subseteq BwB \cup BswB$, dla $s \in S, w \in W$,

T4 $sBs \neq B$, dla $s \in S$.

System Titsa

Definicja (Tits, 1962)

Niech G będzie grupą skończoną spełniającą $T1$, $T2$. Powiemy, że G jest **systemem Titsa** (lub **grupą z (B,N)-parą**) jeśli spełnione są następujące warunki:

T3 $sBw \subseteq BwB \cup BswB$, dla $s \in S, w \in W$,

T4 $sBs \neq B$, dla $s \in S$.

Związek z klasyfikacją skończonych grup prostych

Tits (1964)

Niech G będzie systemem Titsa takim, że:

- $\bigcap_{g \in G} gBg^{-1} = 1.$
- B jest grupą rozwiązalną
- $S = S_1 \uplus S_2 \Rightarrow [S_1, S_2] \neq 1$

Wówczas G jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $G = G'$.

Rozkład Bruhata

Tits (1962)

Niech G będzie systemem Titsa. Wówczas:

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} B n_w B.$$

Rozkład Bruhata

Tits (1962)

Niech G będzie systemem Titsa. Wówczas:

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} B n_w B.$$

Dowód:

1. $G = BNB$
2. $B n_w B = B n_{w'} B \Rightarrow w = w'$

Dowód 1.

G = BNB

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 1.

G = BNB

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 1.

$G = BNB$

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 1.

G = BNB

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 1.

G = BNB

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 1.

G = BNB

Zbiór BNB jest podgrupą w G:

- BNB zawiera 1_G, bo $B, N \leq G$,
- BNB jest zamknięty na branie odwrotności,
- BNB jest zamknięty na mnożenie:
  - $B(BNB) \subseteq BNB$
  - $N(BNB) \subseteq BNB$, bo $(B \cap N)(BNB) \subseteq BNB$ oraz (T3):

$$n_s(BnB) = (n_s Bn)B \subseteq Bn_s nB \cup BnB \subseteq BNB.$$

Dowód 2.

Funkcja długości

Niech $w \in W$ będzie elementem rzędu większego od 1.

- Istnieje $l > 0$ oraz $s_{k_1}, s_{k_2}, \ldots, s_{k_l} \in S$, że $w = s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}$.
- Najmniejsze takie l oznaczamy przez $l(w)$ i nazywamy **długością** w. Długość jedynki wynosi 0.
- Jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}} = w$, to $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}}$ nazywamy **postacią zredukowaną** w.
- Istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.

Dowód 2.

Funkcja długości

Niech $w \in W$ będzie elementem rzędu większego od 1.

- Istnieje $l > 0$ oraz $s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_l} \in S$, że $w = s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_l}$.
- Najmniejsze takie l oznaczamy przez $l(w)$ i nazywamy **długością** w. Długość jedynki wynosi 0.
- Jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_{l(w)}} = w$, to $s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_{l(w)}}$ nazywamy **postacią zredukowaną** w.
- Istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.

Dowód 2.

Funkcja długości

Niech $w \in W$ będzie elementem rzędu większego od 1.

- Istnieje $l > 0$ oraz $s_{k_1}, s_{k_2}, \ldots, s_{k_l} \in S$, że $w = s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}$.
- Najmniejsze takie l oznaczamy przez $l(w)$ i nazywamy **długością** w. Długość jedynki wynosi 0.
- Jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}} = w$, to $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}}$ nazywamy **postacią zredukowaną** w.
- Istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.

Dowód 2.

Funkcja długości

Niech $w \in W$ będzie elementem rzędu większego od 1.

- Istnieje $l > 0$ oraz $s_{k_1}, s_{k_2}, \ldots, s_{k_l} \in S$, że $w = s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}$.
- Najmniejsze takie l oznaczamy przez $l(w)$ i nazywamy **długością** w. Długość jedynki wynosi 0.
- Jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}} = w$, to $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}}$ nazywamy **postacią zredukowaną** w.
- Istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.

Dowód 2.

Funkcja długości

Niech $w \in W$ będzie elementem rzędu większego od 1.

- Istnieje $l > 0$ oraz $s_{k_1}, s_{k_2}, \ldots, s_{k_l} \in S$, że $w = s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}$.
- Najmniejsze takie l oznaczamy przez $l(w)$ i nazywamy **długością** w. Długość jedynki wynosi 0.
- Jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}} = w$, to $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_{l(w)}}$ nazywamy **postacią zredukowaną** w.
- Istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.

Dowód 2.

$Bn_w B = Bn_{w'} B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_w B = Bn_{w'} B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_s n_w B \neq Bn_s n_{w'} B$, $Bn_s n_w B \neq Bn_{w'} B$. Zatem

$$(Bn_s n_w B) \cap (Bn_s B)(Bn_{w'} B) \subseteq Bn_s n_w B \cap Bn_s n_{w'} B = \emptyset$$

$$(Bn_s n_w B) \subseteq (Bn_s B)(Bn_w B)$$

Stąd $Bn_w B \neq B_{w'} B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_sn_wB \neq Bn_sn_{w'}B$, $Bn_sn_wB \neq Bn_{w'}B$. Zatem

$$(Bn_sn_wB) \cap (Bn_sB)(Bn_{w'}B) \subseteq Bn_sn_wB \cap Bn_sn_{w'}B = \emptyset$$

$$(Bn_sn_wB) \subseteq (Bn_sB)(Bn_wB)$$

Stąd $Bn_wB \neq B_{w'}B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_w B = Bn_{w'} B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_w B = Bn_{w'} B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_s n_w B \neq Bn_s n_{w'} B$, $Bn_s n_w B \neq Bn_{w'} B$. Zatem

$$(Bn_s n_w B) \cap (Bn_s B)(Bn_{w'} B) \subseteq Bn_s n_w B \cap Bn_s n_{w'} B = \emptyset$$

$$(Bn_s n_w B) \subseteq (Bn_s B)(Bn_w B)$$

Stąd $Bn_w B \neq B_{w'} B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_sn_wB \neq Bn_sn_{w'}B$, $Bn_sn_wB \neq Bn_{w'}B$. Zatem

$$(Bn_sn_wB) \cap (Bn_sB)(Bn_{w'}B) \subseteq Bn_sn_wB \cap Bn_sn_{w'}B = \emptyset$$

$$(Bn_sn_wB) \subseteq (Bn_sB)(Bn_wB)$$

Stąd $Bn_wB \neq B_{w'}B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_sn_wB \neq Bn_sn_{w'}B$, $Bn_sn_wB \neq Bn_{w'}B$. Zatem

$$(Bn_sn_wB) \cap (Bn_sB)(Bn_{w'}B) \subseteq Bn_sn_wB \cap Bn_sn_{w'}B = \varnothing$$
$$(Bn_sn_wB) \subseteq (Bn_sB)(Bn_wB)$$

Stąd $Bn_wB \neq B_{w'}B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_sn_wB \neq Bn_sn_{w'}B$, $Bn_sn_wB \neq Bn_{w'}B$.Zatem

$$(Bn_sn_wB) \cap (Bn_sB)(Bn_{w'}B) \subseteq Bn_sn_wB \cap Bn_sn_{w'}B = \varnothing$$
$$(Bn_sn_wB) \subseteq (Bn_sB)(Bn_wB)$$

Stąd $Bn_wB \neq B_{w'}B$. Sprzeczność.

Dowód 2.

$Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w = w'$

Indukcja ze względu na $\min\{w, w'\}$. Niech $l(w) \leq l(w')$. Wówczas:

- Jeśli $l(w) = 0$, to $B = Bn_wB = Bn_{w'}B \Rightarrow w' = 1$.
- Jeśli $l(w) > 0$, to istnieje $s \in S$, że $l(sw) < l(w)$.
  Jeśli $w \neq w'$, to $sw \neq sw'$ oraz $sw \neq w'$.
- Z założenia, $Bn_sn_wB \neq Bn_sn_{w'}B$, $Bn_sn_wB \neq Bn_{w'}B$.Zatem

$$(Bn_sn_wB) \cap (Bn_sB)(Bn_{w'}B) \subseteq Bn_sn_wB \cap Bn_sn_{w'}B = \emptyset$$
$$(Bn_sn_wB) \subseteq (Bn_sB)(Bn_wB)$$

Stąd $Bn_wB \neq B_{w'}B$. Sprzeczność.

Warunek wymiany

Warunek wymiany

Definicja

Niech W będzie grupą generowaną przez skończony zbiór inwolucji $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Powiemy, że zbiór S spełnia **warunek wymiany**, jeśli:

$$l(s_{i_1} \ldots s_{i_n}) = n \quad \wedge \quad l(s_{i_0} s_{i_1} \ldots s_{i_n}) < n + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\exists_k : s_{i_0} s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} = s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} s_{i_k}.$$

Warunek wymiany

Definicja

Niech W będzie grupą generowaną przez skończony zbiór inwolucji $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Powiemy, że zbiór S spełnia **warunek wymiany**, jeśli:

$$l(s_{i_1} \ldots s_{i_n}) = n \quad \wedge \quad l(s_{i_0} s_{i_1} \ldots s_{i_n}) < n+1$$

$$\Downarrow$$

$$\exists_k : s_{i_0} s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} = s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}} s_{i_k}.$$

Twierdzenie Matsumoto

Matsumoto (1964)

Niech W będzie grupą generowaną przez skończony zbiór inwolucji $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ spełniający warunek wymiany. Dla każdej pary (i, j), $i \neq j$, niech m_{ij} oznacza rząd elementu $s_i s_j$. Wówczas:

$$\begin{cases} (s_i s_j)^{k_{ij}} = (s_j s_i)^{k_{ij}} & \text{, dla } m_{ij} = 2k_{ij} \\ (s_i s_j)^{k_{ij}} s_i = (s_j s_i)^{k_{ij}} s_j & \text{, dla } m_{ij} = 2k_{ij} + 1 \end{cases}$$

Mnożenie w grupie Weyla

Zbiór S generatorów grupy Weyla spełnia warunek wymiany.

Niech G będzie systemem Titsa, a W – grupą Weyla G. Jeśli $u, w \in W, s \in S$, to:

- $l(sw) \neq l(w)$
- $l(sw) = l(w) \pm 1$
- $l(sw) < l(w) \Rightarrow sB \subseteq BwBw^{-1}B$

Podsumowanie

1. Istnienie rozkładu Bruhata znalazło zastosowanie w problemie klasyfikacji struktur prostych (grupy Liego, grupy algebraiczne, skończone grupy proste).
2. Rozkład Bruhata można rozważać dla grup abstrakcyjnych spełniających aksjomaty Titsa.

Podsumowanie

1. Istnienie rozkładu Bruhata znalazło zastosowanie w problemie klasyfikacji struktur prostych (grupy Liego, grupy algebraiczne, skończone grupy proste).
2. Rozkład Bruhata można rozważać dla grup abstrakcyjnych spełniających aksjomaty Titsa.

Podsumowanie

1. Istnienie rozkładu Bruhata znalazło zastosowanie w problemie klasyfikacji struktur prostych (grupy Liego, grupy algebraiczne, skończone grupy proste).
2. Rozkład Bruhata można rozważać dla grup abstrakcyjnych spełniających aksjomaty Titsa.

Algebry Hecke'go

Algebry Heckego

Motywacje

Niech G będzie grupą z (B, N)–parą, gdzie W jest grupą Weyla. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Jaki jest związek pomiędzy

$$\mathbb{C}[W] \text{ i } \mathbb{C}[G] \text{ ?}$$

$$\text{Np. } \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{???} \mathbb{C}[Gl_n(\mathbb{F}_p)]$$

- splot na grupach lokalnie zwartych, np. na sferze
- grupy kwantowe
- teoria węzłów

Algebry Heckego

Motywacje

Niech G będzie grupą z (B, N)−parą, gdzie W jest grupą Weyla. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Jaki jest związek pomiędzy

$$\mathbb{C}[W] \text{ i } \mathbb{C}[G] \text{ ?}$$

$$\text{Np. } \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{???} \mathbb{C}[Gl_n(\mathbb{F}_p)]$$

- splot na grupach lokalnie zwartych, np. na sferze
- grupy kwantowe
- teoria węzłów

Algebry Heckego

Motywacje

Niech G będzie grupą z $(B, N)-$parą, gdzie W jest grupą Weyla. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Jaki jest związek pomiędzy

$$\mathbb{C}[W] \text{ i } \mathbb{C}[G] \text{ ?}$$

$$\text{Np. } \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{???} \mathbb{C}[Gl_n(\mathbb{F}_p)]$$

- splot na grupach lokalnie zwartych, np. na sferze
- grupy kwantowe
- teoria węzłów

Algebry Hecke'go

Definicja (koniec lat 50')

Niech G będzie (B,N)–parą, zaś $\mathbb{C}[G]$ – algebrą grupową G rozumianą jako zbiór funkcji $F = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ z naturalnym dodawaniem i mnożeniem określonym przez splot:

$$(fg)(x) = \sum_{g \in G} f(xy)g(y^{-1}), \quad f, g \in F, x \in G.$$

Wówczas **algebrą Hecke** grupy G, ozn. $\mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{B})$, określamy $F' \subset F$ złożony z funkcji stałych na (B,B)–warstwach grupy G.

Algebry Hecke'go

Definicja (koniec lat 50')

Niech G będzie (B,N)–parą, zaś $\mathbb{C}[G]$ – algebrą grupową G rozumianą jako zbiór funkcji $F = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ z naturalnym dodawaniem i mnożeniem określonym przez splot:

$$(fg)(x) = \sum_{g \in G} f(xy)g(y^{-1}), \quad f,g \in F, x \in G.$$

Wówczas **algebrą Hecke** grupy G, ozn. $\boldsymbol{\mathcal{H}(G,B)}$, określamy $F' \subset F$ złożony z funkcji stałych na (B,B)–warstwach grupy G.

Algebry Hecke'go

Równoważne definicje $\mathcal{H}(G, B)$

Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą nad $\mathbb{C}$, zaś G niech będzie grupą z (B, N)–parą. Następujące warunki są równoważne:

- $A = \mathcal{H}(G, B)$,
- $A = e\mathbb{C}[G]e$, gdzie $e = e^2 = |B|^{-1}[B]$, gdzie $[X] = \sum_{x \in X} x$.

Podstawowe własności $\mathcal{H}(G, B)$

- $\mathcal{H}(G, B)$ jest algebrą wymiaru $|W|$
- $\mathcal{H}(G, B) = lin\{a_w, w \in W\}$, gdzie $a_w = |B|^{-1}[BwB]$,
- $\mathcal{H}(G, B)$ jest algebrą półprostą

Podstawowe własności $\mathcal{H}(G, B)$

- $\mathcal{H}(G, B)$ jest algebrą wymiaru $|W|$
- $\mathcal{H}(G, B) = lin\{a_w, w \in W\}$, gdzie $a_w = |B|^{-1}[BwB]$,
- $\mathcal{H}(G, B)$ jest algebrą półprostą
    - e jest idempotentem prymitywnym,
    - $J(eAe) = eJ(A)e$, gdzie $J(A)$ - radykał Jacobsona algebry A.

Sformułowanie twiedzenia

Tits

Niech G będzie skończoną grupą z (B, N)-parą, zaś W niech będzie grupą Weyla G. Wówczas

$$\mathcal{H}(G, B) \simeq \mathbb{C}[W].$$

Schemat dowodu

1. Podobieństwo między prezentacjami $\mathcal{H}(G, B)$ i W
2. Wspólne uogólnienie dla $\mathcal{H}(G, B)$ i $\mathbb{C}[W]$
3. Twierdzenie Titsa o deformacji

Schemat dowodu

1. Podobieństwo między prezentacjami $\mathcal{H}(G, B)$ i W
2. Wspólne uogólnienie dla $\mathcal{H}(G, B)$ i $\mathbb{C}[W]$
3. Twierdzenie Titsa o deformacji

Schemat dowodu

1. Podobieństwo między prezentacjami $\mathcal{H}(G, B)$ i W
2. Wspólne uogólnienie dla $\mathcal{H}(G, B)$ i $\mathbb{C}[W]$
3. Twierdzenie Titsa o deformacji

Schemat dowodu

1. Podobieństwo między prezentacjami $\mathcal{H}(G,B)$ i W
2. Wspólne uogólnienie dla $\mathcal{H}(G,B)$ i $\mathbb{C}[W]$
3. Twierdzenie Titsa o deformacji

Prezentacja grupy Weyla W

Generatory i relacje W (Tits, Matsumoto, 1963-64)

$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle = W$$

$$s_i^2 = 1$$

$$\begin{aligned} (s_i s_j)^{k_{ij}} &= (s_j s_i)^{k_{ij}} & \qquad m_{ij} &= 2k_{ij} \\ (s_i s_j)^{k_{ij}} s_i &= (s_j s_i)^{k_{ij}} s_j & \qquad m_{ij} &= 2k_{ij} + 1 \end{aligned}$$

Prezentacja $\mathcal{H}(G,B)$

Generatory...

$$\langle a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_n} \rangle = \mathcal{H}(G,B)$$

$$a_{s_i}^2 = q_i \cdot 1 + (q_i - 1)a_{s_i} \qquad \text{(H1)}$$

$$(a_{s_i}a_{s_j})^{k_{ij}} = (a_{s_j}a_{s_i})^{k_{ij}} \qquad m_{ij} = 2k_{ij} \qquad \text{(H2)}$$

$$(a_{s_i}a_{s_j})^{k_{ij}}a_{s_i} = (a_{s_j}a_{s_i})^{k_{ij}}a_{s_j} \qquad m_{ij} = 2k_{ij}+1 \qquad \text{(H3)}$$

Prezentacja $\mathcal{H}(G, B)$

Generatory i relacje (Iwahori, 1964)

$$\langle\, a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_n} \,\rangle = \mathcal{H}(G, B)$$

$$a_{s_i}^2 = q_i \cdot 1 + (q_i - 1) a_{s_i} \qquad \text{(H1)}$$

$$(a_{s_i} a_{s_j})^{k_{ij}} = (a_{s_j} a_{s_i})^{k_{ij}} \qquad m_{ij} = 2k_{ij} \qquad \text{(H2)}$$

$$(a_{s_i} a_{s_j})^{k_{ij}} a_{s_i} = (a_{s_j} a_{s_i})^{k_{ij}} a_{s_j} \qquad m_{ij} = 2k_{ij} + 1 \qquad \text{(H3)}$$

Mnożenie w $\mathcal{H}(G,B)$

Definicja

Niech G będzie grupą oraz $B \leq G$. Jeśli $x \in G$, to przez **indeks elementu x w** B rozumieć będziemy liczbę

$$ind(x) = \frac{|BxB|}{|B|},$$

a więc liczbę warstw lewostronnych B wzgl. G zawartych w BxB.

Niech $\{a_w = |B|^{-1}[BwB]\}$ będzie bazą $\mathcal{H}(G,B)$. Określamy $f : \mathcal{H}(G,B) \to \mathbb{C}$ wzorem $f(a_w) = ind(w)$. Po rozszerzeniu do całego $\mathcal{H}(G,B)$ dostajemy homomorfizm algebr.

Mnożenie w $\mathcal{H}(G, B)$

Definicja

Niech G będzie grupą oraz $B \leq G$. Jeśli $x \in G$, to przez **indeks elementu x w** B rozumieć będziemy liczbę

$$ind(x) = \frac{|BxB|}{|B|},$$

a więc liczbę warstw lewostronnych B wzgl. G zawartych w BxB.

Niech $\{a_w = |B|^{-1}[BwB]\}$ będzie bazą $\mathcal{H}(G, B)$. Określamy $f : \mathcal{H}(G, B) \to \mathbb{C}$ wzorem $f(a_w) = ind(w)$. Po rozszerzeniu do całego $\mathcal{H}(G, B)$ dostajemy homomorfizm algebr.

Funkcja długości po raz drugi

Iwahori (1964)

Niech $\{a_w = |B|^{-1}[BwB]\}$ będzie bazą $\mathcal{H}(G,B)$. Wówczas dla każdych $s \in S, w \in W$ mamy:

$$a_s a_w = \begin{cases} a_{sw} & , l(sw) > l(w) \\ q_s a_{sw} + (q_s - 1)a_w & , l(sw) < l(w) \end{cases},$$

gdzie $q_s = ind(s)$.

Twierdzenie Matsumoto

Matsumoto (1964)

Niech W będzie grupą generowaną przez skończony zbiór inwolucji $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ spełniający warunek wymiany. Dla każdej pary (i, j), $i \neq j$, niech m_{ij} oznacza rząd elementu $s_i s_j$. Wówczas:

$$\begin{cases} (s_i s_j)^{k_{ij}} = (s_j s_i)^{k_{ij}} & , \text{ dla } m_{ij} = 2k_{ij} \\ (s_i s_j)^{k_{ij}} s_i = (s_j s_i)^{k_{ij}} s_j & , \text{ dla } m_{ij} = 2k_{ij} + 1 \end{cases} \tag{1}$$

...

Twierdzenie Matsumoto

Matsumoto (1964)

...

Niech M będzie monoidem z jedynką e. Jeśli $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$ spełniają (1), to istnieje dobrze określone $f : W \to M$ takie, że:

- $f(1) = e$,
- $f(s_i) = m_i, 1 \leq i \leq n$
- jeśli $s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}$ jest wyrażeniem zredukowanym w W, to:

$$f(s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_l}) = m_{k_1} m_{k_2} \ldots m_{k_l}.$$

Prezentacja $\mathcal{H}(G,B)$

Prezentacja $\mathcal{H}(G,B)$ - teza

$\mathcal{H}(G,B)$ spełnia równości (H1)-(H3). Jeśli $\mathbb{C}$-algebra A zawiera elementy $\{a_1,\ldots,a_n\}$ spełniające równości $(H1)-(H3)$, to wystarczy aby istniał homomorfizm algebr

$$f:\mathcal{H}(G,B)\to A,\ \text{że } f(a_{s_i})=a_i.$$

Z tw. Matsumoto mamy przekształcenie

$$g:W\to A,\ \text{że } g(s_i)=a_i.$$

Szukane f zadajemy na bazie $\mathcal{H}(G,B)$ wzorem:

$$f(a_{s_i}):=g(s_i).$$

Prezentacja $\mathcal{H}(G, B)$

Prezentacja $\mathcal{H}(G, B)$ - teza

$\mathcal{H}(G, B)$ spełnia równości (H1)-(H3). Jeśli $\mathbb{C}$-algebra A zawiera elementy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ spełniające równości $(H1) - (H3)$, to wystarczy aby istniał homomorfizm algebr

$$f : \mathcal{H}(G, B) \to A, \text{ że } f(a_{s_i}) = a_i.$$

Z tw. Matsumoto mamy przekształcenie

$$g : W \to A, \text{ że } g(s_i) = a_i.$$

Szukane f zadajemy na bazie $\mathcal{H}(G, B)$ wzorem:

$$f(a_{s_i}) := g(s_i).$$

Prezentacja $\mathcal{H}(G,B)$

Prezentacja $\mathcal{H}(G,B)$ - teza

$\mathcal{H}(G,B)$ spełnia równości (H1)-(H3). Jeśli $\mathbb{C}$-algebra A zawiera elementy $\{a_1,\ldots,a_n\}$ spełniające równości $(H1)-(H3)$, to wystarczy aby istniał homomorfizm algebr

$$f:\mathcal{H}(G,B)\to A,\ \text{że } f(a_{s_i})=a_i.$$

Z tw. Matsumoto mamy przekształcenie

$$g:W\to A,\ \text{że } g(s_i)=a_i.$$

Szukane f zadajemy na bazie $\mathcal{H}(G,B)$ wzorem:

$$f(a_{s_i}):=g(s_i).$$

Specjalizacja pierścienia przemiennego

Definicja

Niech R będzie dowolnym pierścieniem przemiennym, natomiast A – wolną R-algebrą postaci:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i.$$

Specjalizacja R to homomorfizm $f : R \to \mathbb{K}$.

...

Algebra specjalizacji

Definicja cd.

$\mathbb{K}$ jest $(\mathbb{K}, R)$-bimodułem. Moduł $\mathbb{K} \otimes_R A$ ma strukturę $\mathbb{K}$-algebry:

$$A_f := \mathbb{K} \otimes_R A = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i', \quad e_i' = 1 \otimes e_i.$$

A_f nazywamy **algebrą specjalizacji**. Dla $1 \leq i \leq n$ mamy:

$$e_i e_j = \sum_k r_{ijk} e_k \Rightarrow e_i' e_j' = \sum_k f(r_{ijk}) e_k'.$$

A_f jest też $R-$algebrą, dzięki działaniu R na $\mathbb{K}$ przez f. Zatem specjalizacja $f : R \to \mathbb{K}$ może być jednoznacznie rozszerzona do homomorfizmu R-algebr $f : A \to A_f$ tak, że: $f(e_i) = e_i'$.

Algebra generyczna

Fakt

Niech G, W, S – jw. Określamy

$$R_W := \mathbb{Q}[u_1, u_2, \dots, u_n], \text{ przy czym } u_i = u_j \Leftrightarrow s_i =_W s_j.$$

Niech A będzie wolnym R_W-modułem z bazą $\{e_w, w \in W\}$. Wówczas istnieje R_W-algebra, nazywana **algebrą generyczną** grupy Weyla W nad R_W, jako R_W-moduł równa A, w której mnożenie wyznaczone jest formułami:

$$e_{s_i} e_w = \begin{cases} e_{s_i} e_w, & l(s_i w) > l(w) \\ u_i e_{s_i w} + (u_i - 1) e_w, & l(s_i w) < l(w) \end{cases}$$

Generatory i relacje

Niech A będzie algebrą generyczną (W, S). Wówczas ma ona, jako R_W-algebra, prezentację postaci:

$$\langle\, e_{s_1}, e_{s_2}, \ldots, e_{s_n} \,\rangle = A$$

$$e_{s_i}^2 = u_i \cdot 1 + (u_i - 1) e_{s_i} \qquad \text{(G1)}$$

$$(e_{s_i} e_{s_j})^{k_{ij}} = (e_{s_j} e_{s_i})^{k_{ij}} \qquad m_{ij} = 2k_{ij} \qquad \text{(G2)}$$

$$(e_{e_i} e_{s_j})^{k_{ij}} e_{s_i} = (e_{s_j} e_{s_i})^{k_{ij}} e_{s_j} \qquad m_{ij} = 2k_{ij} + 1 \qquad \text{(G3)}$$

$\mathbb{C}[W]$ i $\mathcal{H}(G,B)$ są specjalizacjami

Fakt

Niech A będzie algebrą generyczną grupy Weyla W nad pierścieniem $R_W = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, zaś $\mathbb{K}$ – dowolnym ciałem. Wówczas:

- jeśli $f' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f'(u_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$
to $\mathbf{A_{f'}} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{W}]$,
- jeśli $f'' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f''(u_i) = q_i = ind(s_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$
wówczas $\mathbf{A_{f''}} \simeq \mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{B})$.

$\mathbb{C}[W]$ i $\mathcal{H}(G, B)$ są specjalizacjami

Fakt

Niech A będzie algebrą generyczną grupy Weyla W nad pierścieniem $R_W = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, zaś $\mathbb{K}$ – dowolnym ciałem. Wówczas:

- jeśli $f' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f'(u_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$
to $\mathbf{A_{f'}} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{W}]$,
- jeśli $f'' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f''(u_i) = q_i = ind(s_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$
wówczas $\mathbf{A_{f''}} \simeq \mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{B})$.

$\mathbb{C}[W]$ i $\mathcal{H}(G,B)$ są specjalizacjami

Fakt

Niech A będzie algebrą generyczną grupy Weyla W nad pierścieniem $R_W = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, zaś $\mathbb{K}$ – dowolnym ciałem. Wówczas:

- jeśli $f' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f'(u_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$
to $\mathbf{A_{f'}} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{W}]$,
- jeśli $f'' : R_W \to \mathbb{C}$ jest specjalizacją taką, że
$$f''(u_i) = q_i = ind(s_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$
wówczas $\mathbf{A_{f''}} \simeq \mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{B})$.

Algebry rozdzielcze

Definicja

$\mathbb{K}$-algebrę A nazywamy **rozdzielczą** jeśli dla każdego rozszerzenia ciał $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ algebra $A^{\mathbb{L}} := \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} A$ jest półprosta.

Jeśli A jest rozdzielcza nad ciałem $\mathbb{K}$, to **niezmiennikami numerycznymi** A nazywamy wymiary prostych $A^{\overline{\mathbb{K}}}$-modułów lewostronnych.

Rozdzielczość $\mathbb{C}[W]$ i $\mathcal{H}(G, B)$

Niech A będzie $\mathbb{K}$-algebrą. A jest rozdzielcza wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\overline{\mathbb{K}}}$ jest półprosta. Zatem $\mathbb{C}[W]$ oraz $\mathcal{H}(G, B)$ są rozdzielcze.

Algebry rozdzielcze

Definicja

$\mathbb{K}$-algebrę A nazywamy **rozdzielczą** jeśli dla każdego rozszerzenia ciał $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ algebra $A^{\mathbb{L}} := \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} A$ jest półprosta.

Jeśli A jest rozdzielcza nad ciałem $\mathbb{K}$, to **niezmiennikami numerycznymi** A nazywamy wymiary prostych $A^{\overline{\mathbb{K}}}$-modułów lewostronnych.

Rozdzielczość $\mathbb{C}[W]$ i $\mathcal{H}(G,B)$

Niech A będzie $\mathbb{K}$-algebrą. A jest rozdzielcza wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\overline{\mathbb{K}}}$ jest półprosta. Zatem $\mathbb{C}[W]$ oraz $\mathcal{H}(G,B)$ są rozdzielcze.

Porównywanie algebr specjalizacji

Twierdzenie Titsa o deformacji

Niech $R_W = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $f : R_W \to \mathbb{K}$ niech będzie specjalizacją R_W, zaś A - algebrą generyczną W nad R. Wówczas jeśli A_f i $A^{(R_W)}$ są rozdzielcze, to A_f i $A^{(R_W)}$ mają identyczne współczynniki numeryczne.

Zakończenie dowodu

Algebry $\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}(G, B)$ są rozdzielczymi algebrami specjalizacji algebry generycznej. Jeśli $A^{(R_W)}$ jest rozdzielcza, wówczas mają $\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}(G, B)$ mają identyczne współczynniki numeryczne. Są one więc, jako algebry nad ciałem algebraicznie domkniętym, izomorficzne.

Porównywanie algebr specjalizacji

Twierdzenie Titsa o deformacji

Niech $R_W = \mathbb{Q}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $f : R_W \to \mathbb{K}$ niech będzie specjalizacją R_W, zaś A - algebrą generyczną W nad R. Wówczas jeśli A_f i $A^{(R_W)}$ są rozdzielcze, to A_f i $A^{(R_W)}$ mają identyczne współczynniki numeryczne.

Zakończenie dowodu

Algebry $\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}(G, B)$ są rozdzielczymi algebrami specjalizacji algebry generycznej. Jeśli $A^{(R_W)}$ jest rozdzielcza, wówczas mają $\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}(G, B)$ mają identyczne współczynniki numeryczne. Są one więc, jako algebry nad ciałem algebraicznie domkniętym, izomorficzne.

Diagram na zakończenie

Od grup do monoidów

$$\begin{array}{ccc} M \ (= M_n) & \rightsquigarrow & R \ (= I_n) \\ \cup & & \cup \\ G \ (= Gl_n) & \rightsquigarrow & W \ (= S_n) \end{array}$$

Dziękuję za uwagę!