Grupa izometrii płaszczyzny hiperbolicznej

Arkadiusz Męcel

O różnych geometriach
21 października 2008r.

UWAGA: Notatki te były pisane szybko i niechlujnie (choć starałem się). Czytelników przepraszam.

Inwersje w $\overline{\mathbb{C}}$

Przypomnijmy, że na poprzednich zajęciach zdefiniowaliśmy grupę $H(2)$ będącą grupą generowaną przez wszystkie inwersje względem prostych należących do naszego modelu geometrii hiperbolicznej – dysku Poincare'go. Celem tej krótkiej notatki jest podanie podstawowych intuicji (i referencji do szczegółowych dowodów) tego, że $H(2) \simeq PS^*L(\mathbb{R})$, gdzie $PS^*L(\mathbb{R})$ jest grupą macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych i wyznaczniku równym 1 lub -1 podzieloną przez swoje centrum (a więc podgrupę normalną złożoną z $\{I, -I\}$).

Wróćmy na moment do pojęcia inwersji. Tym razem będziemy na nie patrzeć jako na przekształcenie rozszerzonej płaszczyzny zespolonej w siebie. Przypomnijmy, że rozumiemy przez to $\mathbb{C}$ uzupełnioną tzw. punktem w nieskończoności, który oznaczać będziemy przez ∞. Nie ma w takim obiekcie nic dziwnego. Można o tym myśleć tak: przeprowadzamy płaszczyznę za pomocą rzutu stereograficznego na sferę bez 'bieguna' i jako 'biegun' obieramy właśnie nieskończoność. Daje nam to porządne rozumienie co to znaczy, że 'rozszerzona prosta' to zwykła prosta zawierająca punkt w nieskończoności itd. W dalszej części będziemy swobodnie posługiwali się tą konwencją.

Jakie są różnice pomiędzy zwykłą inwersją, a inwersją na $\overline{\mathbb{C}}$? Są dwie podstawowe:

- Środek okręgu inwersyjnego przechodzi przy inwersji na ∞ (i odwrotnie),
- Dowolna prosta rozszerzona w $\overline{\mathbb{C}}$ jest traktowana jako okrąg o promieniu ∞. Inwersja względem tej prostej obcięta do $\mathbb{C}$ to zwykła symetria względem tej prostej. Inwersja ta przeprowadza ∞ na siebie.

Ta konwencja pochodzi jeszcze od znanego twierdzenia Apolloniusza:

Twierdzenie 1 *Niech A, B to dowolne różne punkty płaszczyzny. Rozważmy rodzinę zbiorów indeksowaną liczbami dodatnimi: $S_k = \{P : \mathbb{C} : |PA| = k|PB|\}$. Wówczas:*

- *Jeśli $k \neq \frac{1}{2}$, to S_k jest okręgiem o środku O i promieniu r takim, że A, B, O są współliniowe oraz $|AO||BO| = r^2$.*
- *Jeśli $k = \frac{1}{2}$, to $S_{\frac{1}{2}}$ jest symetralną odcinka AB.*

Jest zatem naturalne myśleć o inwersji względem prostej nawet w klasycznym sensie jako o zwykłej symetrii.

Zauważmy teraz, że grupa $H(2)$, którą zdefiniowaliśmy na poprzednich zajęciach jest generowana przez uogólnione inwersje, a więc takie, które idą z $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Istotnie, przecież średnice dysku Poincare'go są także prostymi w naszej geometrii, a więc inwersje względem tych prostych współgenerują $H(2)$.

Co to ma wszystko z grupami macierzy? Okazuje się, że niemało. Stwierdziliśmy na razie, że $H(2)$ jest pewną podgrupą grupy wszystkich uogólnionych inwersji. Oczywiście nie jest każdą z nich. Element grupy $H(2)$ musi zachowywać dysk Poincare'go (zakładamy tu milcząco, że dysk ten jest zanurzony w $\overline{\mathbb{C}}$). Powiemy więc coś więcej o $I(2)$. Jak już wiemy, $I(2)$ zawiera wszystkie inwersje względem prostych rozszerzonych. W szczególności, gdyby rozważać elementy $I(2)$ obcięte do płaszczyzny $\mathbb{C}$ bez ∞, byłyby to zwykłe symetrie. Możemy jednak łatwo rozszerzyć symetrię s z $\mathbb{C}$ do $\overline{\mathbb{C}}$ kładąc $s(\infty) = \infty$. Jest więc widoczne, że $I(2)$ zawiera podgrupę izomorficzną z $S(2)$ - grupą generowaną przez wszystkie symetrie płaszczyzny. Jak wiemy, wszystkie izometrie płaszczyzny należą właśnie do tej grupy. Ostatecznie więc widzimy, że $I(2)$ zawiera podgrupę złożoną z rozszerzonych do ∞ izometrii płaszczyzny euklidesowej. W szczególności mamy takie przekształcenia jak:

- r_0 - odbicie względem prostej rzeczywistej
- t_c - przesunięcie o wektor $[c, 0]$.

Kluczowym i intuicyjnie jasnym twierdzeniem jest następujące:

Twierdzenie 2 $S(2)$ *jest podgrupą* $I(2)$ *złożoną ze wszystkich przekształceń, dla których* ∞ *jest punktem stałym.*

Oczywiście nie wszystkie elementy $I(2)$ należą do $S(2)$. Przykładem jest inwersja:

$$i_r(z) = \begin{cases} \frac{r^2}{\overline{z}}, & z \neq 0, \infty \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty \end{cases}.$$

Przekształcenia Mobiusa

Jak to się wszystko ma do tych grup macierzy? Teraz jesteśmy już gotowi odpowiedzieć na to pytanie. Wprowadzamy tzw. grupę przekształceń Mobiusa. Niech a, b, c, d to takie liczby zespolone, że $ad - bc \neq 0$. Wówczas określamy: $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ wzorem:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty, cz + d \neq 0 \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \\ \infty, & c = 0 \text{ i } z = \infty \text{ lub } z = -\frac{d}{c} \end{cases}.$$

Z każdym takim przekształceniem możemy stowarzyszyć macierz 2×2 o niezerowym wyznaczniku postaci:

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Okazuje się, że składanie przekształceń Mobiusa jest dokładnie tym samym co mnożenie macierzy z nimi związanymi. Skoro macierze są odwracalne, to dostajemy w ten sposób grupę przekszłtałceń. Zauważmy teraz, że np.

$$f(z) = \frac{z+2}{z+3} = \frac{2z+4}{2z+6}.$$

Wynika stąd, że przyporządkowanie przekształceniu macierzy nie jest jednoznaczne. Niewątpliwie z jednym przekształceniem stowarzyszona jest każda z poniższych macierzy:

$$M_f = \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ \gamma c & \gamma d \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{C}^*.$$

Jeżeli dodać założenie, że wyznacznik macierzy powinien być równy 1, wówczas przekształcenie ma wyznaczoną macierz z dokładnością do znaku (bo można powstawiać minusy i też wyjdzie ten sam wyznacznik). Ogólnie zatem grupa przekształceń Mobiusa jest w jednoznacznej odpowiedniości z grupą macierzy $SL(2,\mathbb{C})$ podzieloną przez podgrupę $\{I, -I\}$, a więc dokładnie z $PSL(2,\mathbb{C})$.

Przekształcenia Mobiusa a I(2)

W grupie $I(2)$ można wyodrębnić podgrupę przekształceń zachowujących skierowanie kątów, tzw. $I^+(2)$. Zauważmy, że zwykła inwersja odwraca skierowanie kątów, zatem na przykład złożenie dwóch inwersji zawsze je zachowuje. W szczególności, $I^+(2)$ jest podgrupą normalną indeksu 2 w $I(2)$. Podstawowy fakt łączący wszystkie nasze dotychchzasowe dywagacje jest następujący:

Twierdzenie 3 $I^+(2) \simeq PSL(2,\mathbb{C})$.

Dowód: Zauważmy, że dla każdego $c \in \mathbb{C}$ możemy zdefiniować przekształcenie:

$$j_c(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-c}, & z \neq c, \infty \\ 1, & z = \infty \\ \infty, & z = c \end{cases}$$

należy do obydwu rozważanych grup. Istotnie, zgodnie ze wzorem nalezy do $PSL(2,\mathbb{C})$, zaś do $I^+(2)$ należy jako złożenie: $(i_1 \circ r_0) \circ t_{-c}$, które to dwa przekształcenia należą do $I^+(2)$. Pokażemy, że każda z rozważanych grup jest generowana przez $S(2)$ oraz j_c. Z poprzednich uwag wiemy, że $S(2)$ jest podgrupą tych przekształceń z $I(2)$, że ∞ jest punktem stałym. Niech $t \in I^+(2)$ oraz $t(\infty) = c$. Wówczas $j_c \circ t(\infty) = \infty$, zatem złożenie to nalezy do $S(2)$. W szczególności element t jest złożeniem elementu z $S(2)$ oraz j_c. Podobnie dla $PSL(2,\mathbb{C})$. Element tej grupy trzyma w miejscu nieskończoność wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 0$. Wtedy $m(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \in S(2)$. Dlaczego? Mnożenie liczby zespolonej przez $\frac{a}{d}$ to obrót, zaś dodanie $\frac{b}{d}$ to translacja. Zatem są to izometrie, a te należą do $S(2)$. Zatem także w tej grupie $S(2)$ to dokładnie wszystkie przekształcenia trzymające nieskończoność. Teraz za pomocą identycznego argumentu jak dla $I^+(2)$ wykazujemy tezę.

Teraz jest już jasne, że każdy element grupy $I(2)$ jest postaci $m(z)$, gdzie $m(z) \sim M \in PSL(2,\mathbb{C})$, lub $m(\overline{z})$, gdy nie jest to element $I^+(2)$. Przekształcenie, które ustala bijekcję pomiędzy warstwami $I^+(2)$ w $I(2)$ to $z \to \overline{z}$.

Grupa hiperboliczna

Namęczyliśmy się bardzo, by móc wyznaczyć ogólną postać grupy $I(2)$. Czy mamy z tego jakąkolwiek korzyść w przypadku grupy $H(2)$? Otóż mamy! Odejdźmy na chwilę od modelu dysku Poincare'go i przejdźmy do modelu półpłaszczyzny. Wtedy grupa $H(2)$ jest taką podgrupą grupy $I(2)$, której elementy zachowują górną półpłaszczyznę zespoloną (a inwersje wykonujemy oczywiście względem prostych tego modelu). Teraz wystarczy przypomnieć sobie następujący fakt:

Twierdzenie 4 *Każda homografia h, która zachowuje $\overline{\mathbb{R}}$ ma tę własnośc, że $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

Dowód: Homografia h przeprowadza prostą rzeczywistą na siebie, w szczegóności $h(0), h(1), h(\infty)$ należą do $\overline{\mathbb{R}}$. Niech $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (w skróconej formie). Możemy bsog przyjąć, że $a = 1$. Wtedy $h(z) = \frac{z+b}{cz+d}$. Mamy: $h(0) = \frac{b}{d}, h(1) = \frac{1+b}{c+d}, h(\infty) = \frac{1}{c}$. Wszystkie te liczby muszą należeć do $\overline{\mathbb{R}}$. W szczególności widać, że $c \in \mathbb{R}$. Pozostaje wykazać, że jeśli $\frac{b}{d}$ oraz $\frac{1+b}{c+d}$ są rzeczywiste ($c \in \mathbb{R}$), to b i d też muszą być rzeczywiste. Pozostawiamy to Czytelnikowi.

Zauważmy jak ważna jest to dla nas uwaga! Oczywiście każdy element $H(2)$ musi zachowywać prostą rzeczywistą. Korzystając z tego, że $I^+(2) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$ widzimy, że elementy $H^+(2)$ mogą być z dokładnością do znaku stowarzyszone z macierzami rzeczywistymi o wyznaczniku równym 1, zaś elementy $H(2) \setminus H^+(2)$ o wyznaczniku -1. Dlaczego nie tylko 1? Zauważmy, że gdy w tym przypadku utożsamiamy macierze postaci:

$$M_f = \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ \gamma c & \gamma d \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{C}^*$$

i współczynniki są rzeczywiste, a więc:

$$\det \left| \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ \gamma c & \gamma d \end{pmatrix} \right| = \gamma^2 \det \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

Skoro γ^2 jest dodatnie, to niekoniecznie dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba dodatnia y, że $xy = 1$. Taka liczba istnieje, jeżeli warunek ma postać $xy = \pm 1$. Jaką to ma interpretację geometryczną? Zauważmy, że jeżeli przekształcenie należy do $H^+(2)$ to nie odwraca ono orientacji układu rozpinającego $\mathbb{C}$. Ma więc ono wyznacznik dodatni. Zgodnie z naszymi rozważaniami musi być to wyznacznik równy 1. Jeżeli jednak przekształcenie odwraca orientację, a więc jest złożeniem elementu z $H^+(2)$ z sprzężeniem zespolonym, wówczas wyznacznik jest ujemny. Zgodnie z ustaleniami może być to tylko -1. Oczywiście każdą klasę macierzy o wyznaczniku 1 i -1 możemy w ten sposób łatwo uzyskać. Dostajemy zatem łącznie dobrą intuicję tego, że: $H(2) \simeq PS^*L(2, \mathbb{R})$, zgodnie z oczekiwaniami (oczywiście $H^+(2) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$).

Coś o grupie $PSL(2, \mathbb{R})$.

Jak widzimy, dostaliśmy dość osobliwą grupę macierzy opisującą całą grupę $H(2)$. Warto wspomnieć, że z algebraicznego punktu widzenia $PSL(2, \mathbb{R})$ to grupa prosta. Ciekawsze jednak bedzie na koniec powiedzenie (bez dowodu) czym, z punktu widzenia metryki hiperbolicznej, bedą odpowiednie macierze realizujące elementy $H^+(2)$. Jak wiadomo, z każdą macierzą kwadratową M wymiaru 2×2 o wyznaczniku 1 można skojarzyć wielomian charakterystyczny postaci:

$$\lambda^2 - Tr(M)\lambda + \det(M) = \lambda^2 - Tr(M)\lambda + 1.$$

Jego pierwiastki to:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(M) \pm \sqrt{Tr(M)^2 - 4}}{2}.$$

Uzyskujemy stąd klasyfikację elementów $H^+(2)$. Jeśli:

- $|Tr(M)| < 2$, to przekształcenie jest eliptyczne,
- $|Tr(M)| = 2$, to przekształcenie jest paraboliczne,
- $|Tr(M)| > 2$, to przekształcenie jest hiperboliczne.

Okazuje się, że przekształcenia eliptyczne, rozważane już w $PSL(2, \mathbb{R})$ działają jak obroty wokół punktów właściwych w płaszczyźnie hiperbolicznej. Przekształcenia hiperboliczne odpowiadają translacjom w tej metryce. Najciekawsze są przekształcenia paraboliczne. Im odpowiadają niezwykle ciekawe operacje. Ustalamy na 'brzegu' dysku Poincare'go punkt w nieskończoności. Przez obrót graniczny wokół tego punktu rozumiemy takie przekształcenie, gdzie wszystkie punkty krążą po horosferach zaczepionych w tym wybranym punkcie w nieskończoności. Przypomnijmy, że przez horosferę określamy taką krzywą na dysku Poincare'go, że proste prostopadłe do niej w dowolnym punkcie zbiegają asymptotycznie do ustalonego punktu w nieskończoności.

Literatura

[1] http://www.maths.gla.ac.uk/ wws/cabripages/inversive/inversive0.html.

[2] http://www.maths.gla.ac.uk/ wws/cabripages/hyperbolic/hyperbolic0.html.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_half-plane_model.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/PSL2(R)