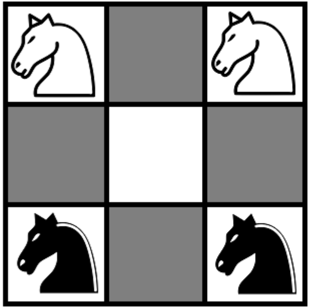
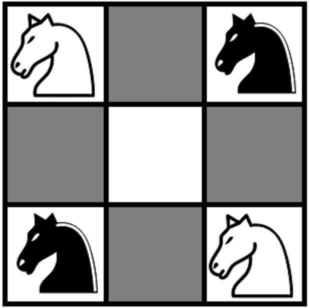
GRAFY PRZEJŚCIA

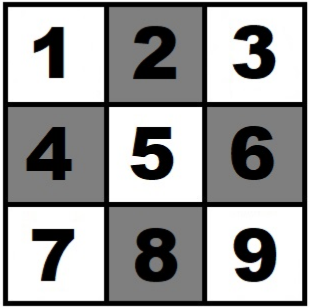
ARKADIUSZ MĘCEL (MIM UW)

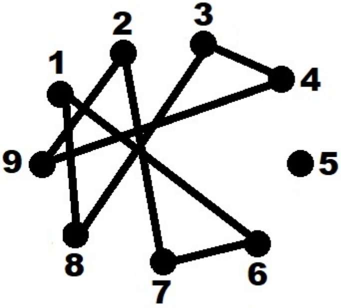
Matematyka Pogranicza, Białystok 2.12.2023 r.

Rozgrzewka. Czy można, przy pomocy zwykłych ruchów konika szachowego, przejść na szachownicy rozmiaru 3×3 z ustawienia na rysunku po lewej do tego po prawej stronie?

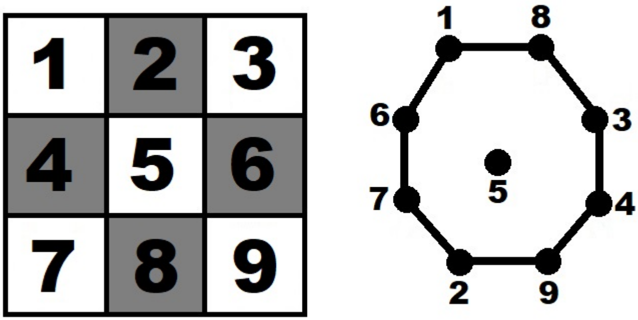



Rozgrzewka. Czy można, przy pomocy zwykłych ruchów konika szachowego, przejść na szachownicy rozmiaru 3×3 z ustawienia na rysunku po lewej do tego po prawej stronie?

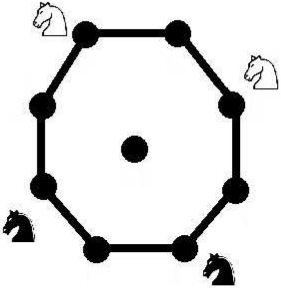


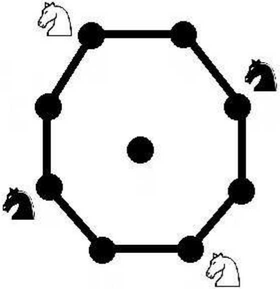


Rozgrzewka. Czy można, przy pomocy zwykłych ruchów konika szachowego, przejść na szachownicy rozmiaru 3×3 z ustawienia na rysunku po lewej do tego po prawej stronie?

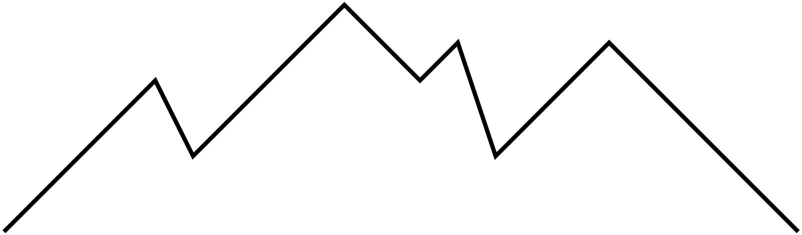


Rozgrzewka. Czy można, przy pomocy zwykłych ruchów konika szachowego, przejść na szachownicy rozmiaru 3×3 z ustawienia na rysunku po lewej do tego po prawej stronie?

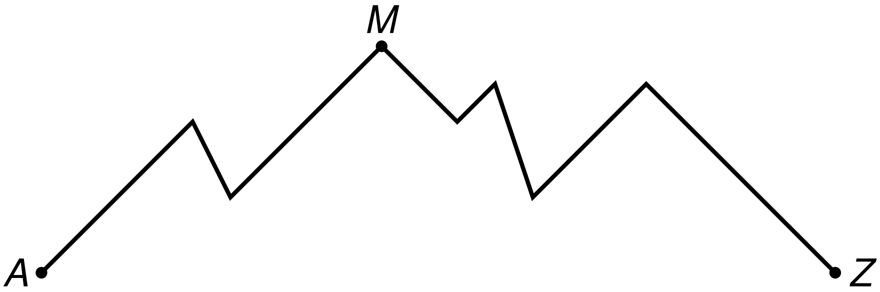




Zadanie. Dwóch wspinaczy porusza się po paśmie górskim.

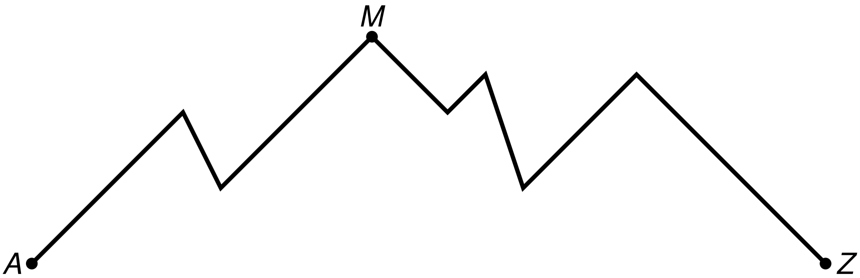


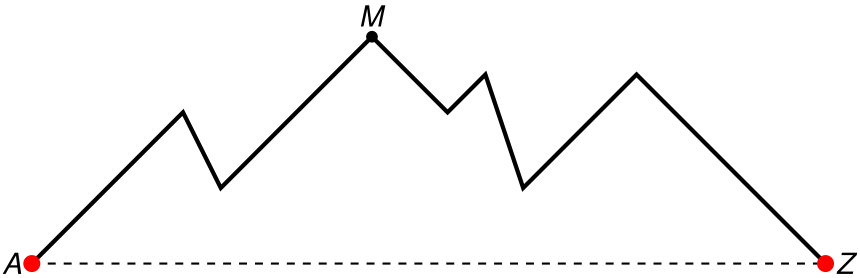
Zadanie. Dwóch wspinaczy porusza się po paśmie górskim.



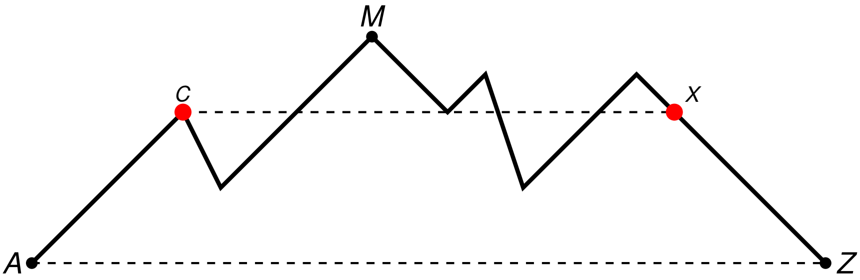
Czy wspinacze mogą spotkać się na szczycie (punkt M), jeśli:

- startują równocześnie odpowiednio z punktów A oraz Z,
- w każdym momencie drogi są na tej samej wysokości?

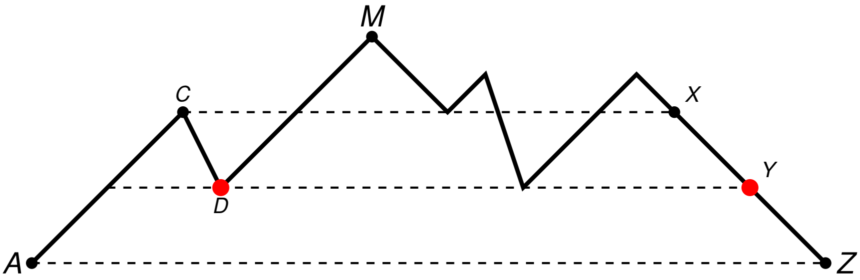

M
A
Z



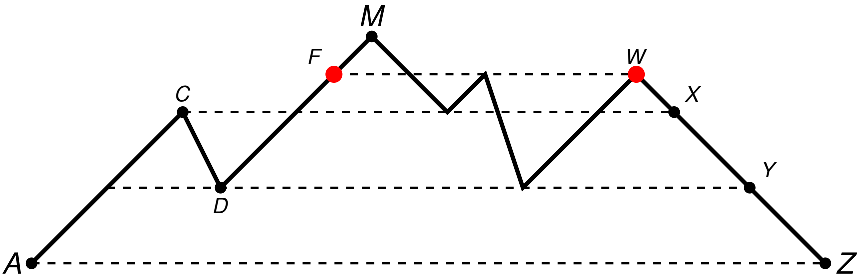
(A, Z)



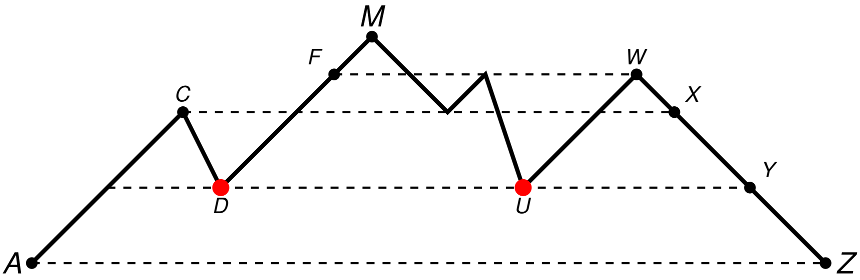
$(A, Z) \to (C, X)$



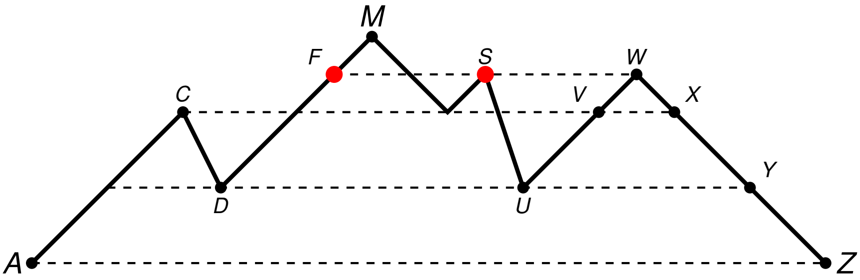
$$(A, Z) \to (C, X) \to (D, Y)$$



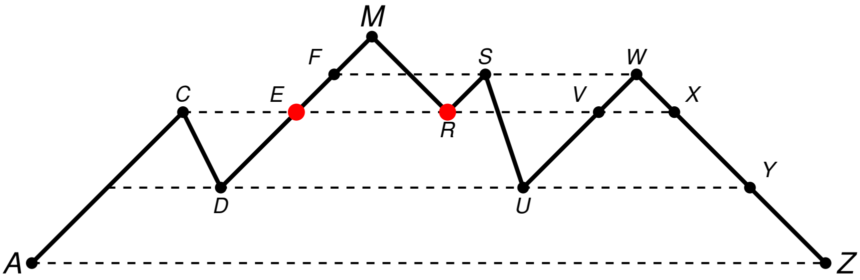
$$(A, Z) \rightarrow (C, X) \rightarrow (D, Y) \rightarrow (F, W)$$



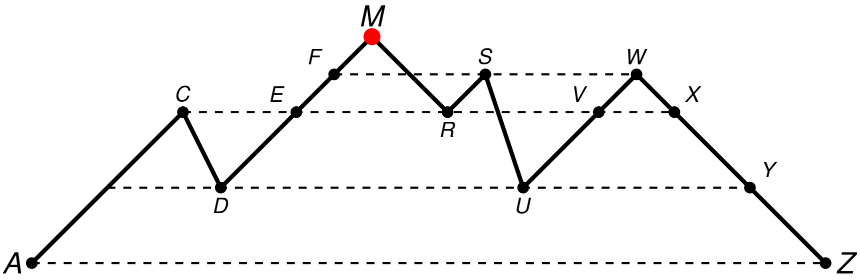
$$(A, Z) \to (C, X) \to (D, Y) \to (F, W) \to (D, U)$$



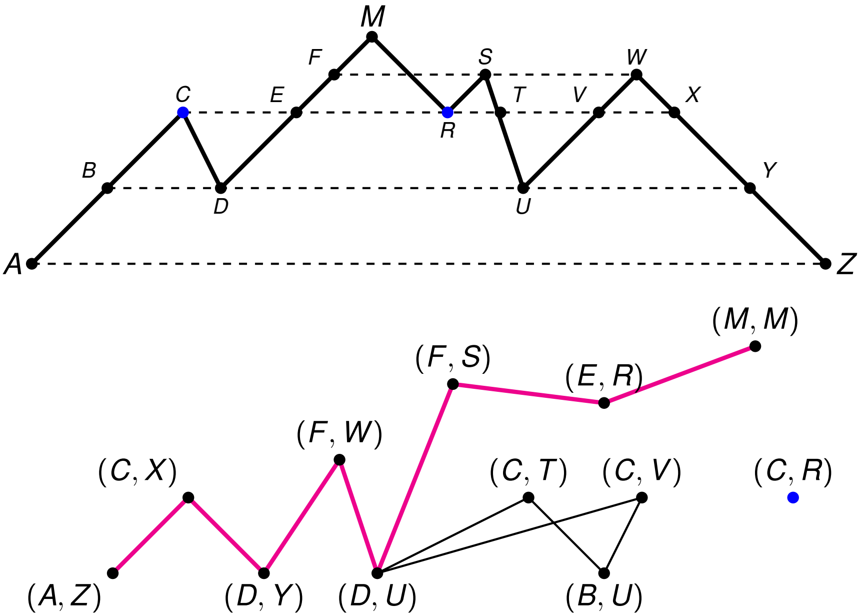
$$(A, Z) \to (C, X) \to (D, Y) \to (F, W) \to (D, U) \to (F, S)$$



$$(A, Z) \to (C, X) \to (D, Y) \to (F, W) \to (D, U) \to (F, S) \to (E, R)$$

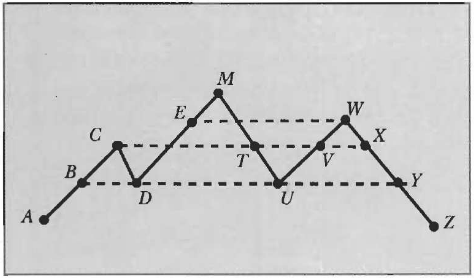


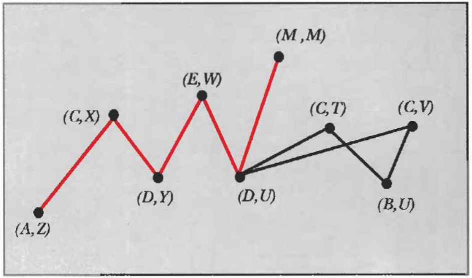
$$(A, Z) \to (C, X) \to (D, Y) \to (F, W) \to (D, U) \to (F, S) \to (E, R) \to (M, M).$$


M
F
S
W
C
E
T
V
X
R
B
Y
D
U
A
Z
(M, M)
(F, S)
(E, R)
(F, W)
(C, X)
(C, T)
(C, V)
(C, R)
(A, Z)
(D, Y)
(D, U)
(B, U)

GRAF PASMA GÓRSKIEGO o wierzchołkach (X_L, X_P), gdzie

- X_L oraz X_P są na tej samej wysokości w pasmie,

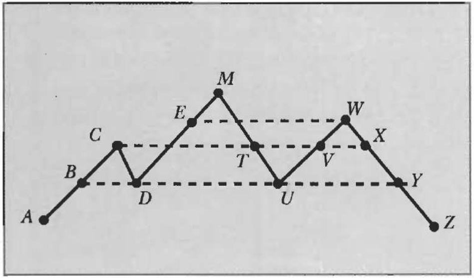


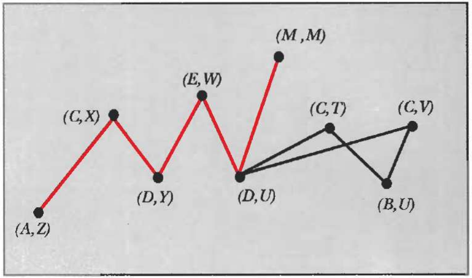


Na podstawie: Tucker A.: *The Paralell Climbing Puzzle*. Math Horizons 3 (1995): 22–24.

GRAF PASMA GÓRSKIEGO o wierzchołkach (X_L, X_P), gdzie

- X_L oraz X_P są na tej samej wysokości w pasmie,
- X_L jest na lewo, a X_P jest na prawo od punktu M (szczyt),

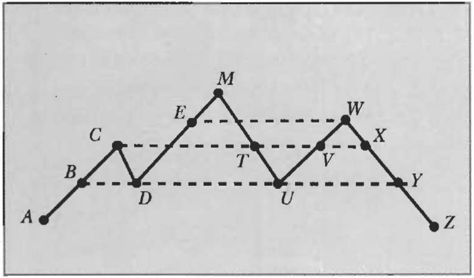


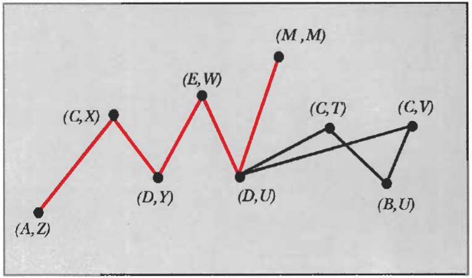


Na podstawie: Tucker A.: *The Paralell Climbing Puzzle*. Math Horizons 3 (1995): 22–24.

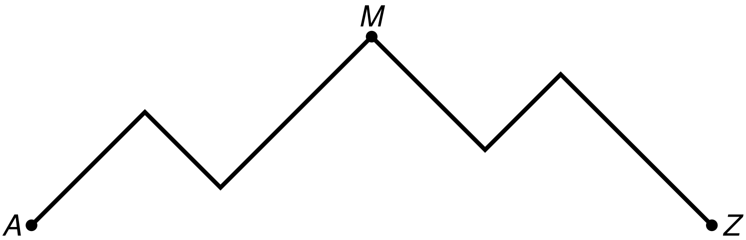
GRAF PASMA GÓRSKIEGO o wierzchołkach (X_L, X_P), gdzie

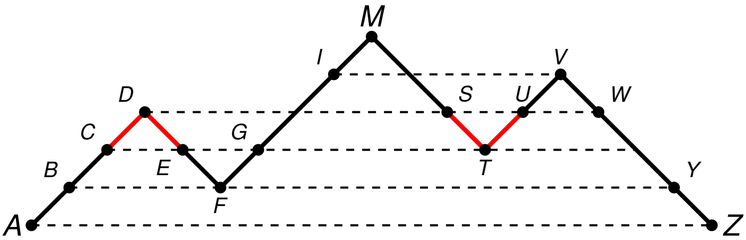
- X_L oraz X_P są na tej samej wysokości w pasmie,
- X_L jest na lewo, a X_P jest na prawo od punktu M (szczyt),
- X_L lub X_P jest w lokalnym maksimum (górka lub szczyt) lub lokalnym minimum (dołek lub start) wysokości tego pasma.

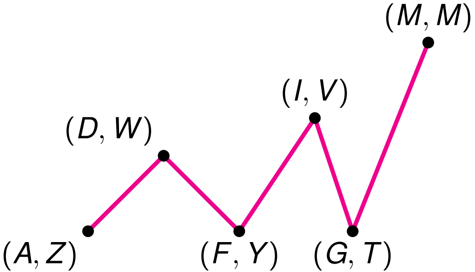


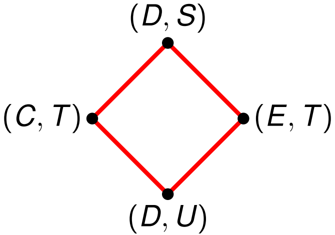


Na podstawie: Tucker A.: *The Paralell Climbing Puzzle*. Math Horizons 3 (1995): 22–24.


M
A
Z


M
I
V
D
S
U
W
C
G
B
E
T
Y
A
F
Z

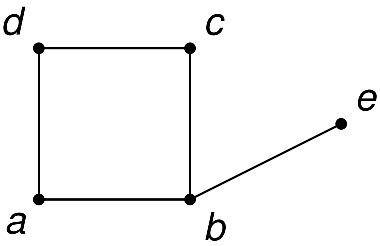

(M, M)
(I, V)
(D, W)
(A, Z)
(F, Y)
(G, T)


(D, S)
(C, T)
(E, T)
(D, U)

Definicja

Skończony graf prosty to para $G = (V, E)$, gdzie:

- V — skończony zbiór (wierzchołków),
- E — zbior par różnych elementów z V (krawędzi).

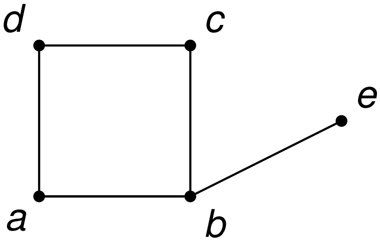


$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, e\}\}$$

Definicja

Stopień wierzchołka v w skończonym grafie prostym to liczba $\deg(v)$ krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem, czyli takich które go zawierają (jest on ich *końcem*).



$$\deg(a) = \deg(c) = \deg(d) = 2$$

$$\deg(b) = 3, \quad \deg(e) = 1$$

Lemat o uściskach dłoni

W skończonym grafie prostym $G = (V, E)$ suma stopni wierzchołków równa jest dwukrotności liczby krawędzi, czyli

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

W szczególności w G jest parzyście wiele wierzchołków nieparzystego stopnia.

Lemat o uściskach dłoni

W skończonym grafie prostym $G = (V, E)$ suma stopni wierzchołków równa jest dwukrotności liczby krawędzi, czyli

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

W szczególności w G jest parzyście wiele wierzchołków nieparzystego stopnia.

Przykład. W grupie nieparzyście wielu osób ktoś ma parzyście wielu znajomych.

Lemat o uściskach dłoni

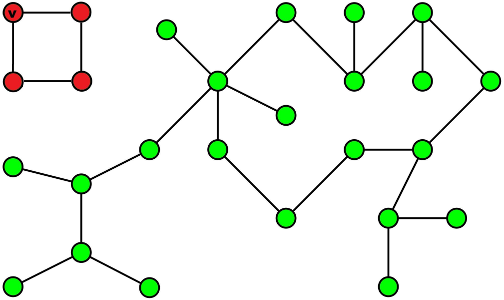
W skończonym grafie prostym $G = (V, E)$ suma stopni wierzchołków równa jest dwukrotności liczby krawędzi, czyli

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

W szczególności w G jest parzyście wiele wierzchołków nieparzystego stopnia.

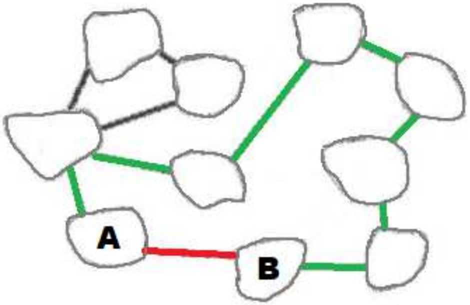
Przykład. W żadnej skończonej grupie osób nie może być tylko jednej osoby o nieparzyście wielu znajomych.

Do których wierzchołków możemy dojść ścieżką?



Każdy wierzchołek ma swoją spójną składową — graf złożony ze wszystkich ścieżek, które zawierają ten wierzchołek.

Zadanie. W pewnym królestwie z każdego miasta wychodzi setka połączeń prowadzących do innych miast. Z każdego miasta można dotrzeć ścieżką dróg do jakiegokolwiek innego. Pewnego dnia jedna z dróg zostaje zamknięta do remontu. Czy dalej można dotrzeć z każdego miasta do każdego?



Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,
- P — dołek, Q — dołek, stopień (P, Q) — 4,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,
- P — dołek, Q — dołek, stopień (P, Q) — 4,
- P — górka, Q — dołek, stopień (P, Q) — 0,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,
- P — dołek, Q — dołek, stopień (P, Q) — 4,
- P — górka, Q — dołek, stopień (P, Q) — 0,
- P — dołek, Q — górka, stopień (P, Q) — 0,

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,
- P — dołek, Q — dołek, stopień (P, Q) — 4,
- P — górka, Q — dołek, stopień (P, Q) — 0,
- P — dołek, Q — górka, stopień (P, Q) — 0,
- pozostałe przypadki — stopień 2.

Czy punkt (M, M) jest w składowej spójnej punktu (A, Z)?

Stopnie wierzchołków (P, Q) w GRAFIE PASMA GÓRSKIEGO:

- P — start, Q — start, stopień (P, Q) — 1,
- P — szczyt, Q — szczyt, stopień (P, Q) — 1,
- P — górka, Q — górka, stopień (P, Q) — 4,
- P — dołek, Q — dołek, stopień (P, Q) — 4,
- P — górka, Q — dołek, stopień (P, Q) — 0,
- P — dołek, Q — górka, stopień (P, Q) — 0,
- pozostałe przypadki — stopień 2.

Wniosek. Tylko (A, Z) oraz (M, M) mają nieparzyste stopnie. Wierzchołki te należą więc do wspólnej spójnej składowej.

Jak brzmi matematyczne sformułowanie problemu?

Dane są funkcje ciągłe $f, g : [0,1] \to [0,1]$ spełniające warunki:

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(1) = g(1) = 1.$$

Czy istnieją funkcje $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to [0,1]$ spełniające

$$\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0, \quad \sigma_1(1) = \sigma_2(1) = 1,$$

dla których

$$f \circ \sigma_1 = g \circ \sigma_2?$$

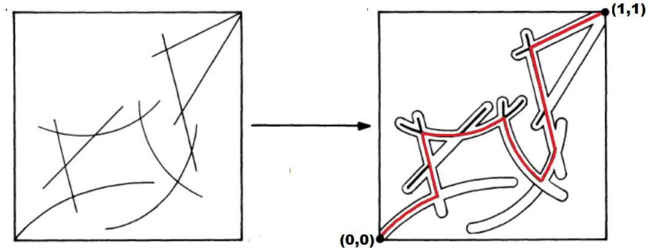
Odpowiedź: jeśli f, g nie zmieniają znaku i są kawałkami monotoniczne, wówczas — TAK. Ogólnie — NIE.

Jak brzmi matematyczne sformułowanie problemu?

Równoważny problem: rozważamy podzbiór postaci:

$$G(f,g) = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid f(x) = g(y)\}.$$

Wówczas istnienie funkcji σ_1, σ_2 jest równoważne istnieniu krzywej w $G(f,g)$ łączącej punkty $(0,0)$, $(1,1)$.



Na podstawie: Goodman J., Pach, J., Yap, C., *Mountain climbing, ladder moving, and the ring-width of a polygon*

On uniformization of functions (I)

by

R. Sikorski and **K. Zarankiewicz** (Warszawa)

Let I be the unit interval $0 \leqslant x \leqslant 1$, and let $\mathfrak{F}$ be the class of all continuous mappings f of I into itself such that $f(0)=0$ and $f(1)=1$. If $f, \varphi \epsilon \mathfrak{F}$, then $f\varphi \epsilon \mathfrak{F}$ too. The symbol $f\varphi$ denotes always the superposition of f and φ.

We shall prove the following

THEOREM I[1]). *If $f_1, f_2, \ldots, f_n \epsilon \mathfrak{F}$ are functions such that*

(α) *for each $i=1,2,\ldots,n$, there is a sequence $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_r$ such that f_i is either non-decreasing or non-increasing in every interval $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$, $j=1,2,\ldots,r$,*

then there exist functions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \epsilon \mathfrak{F}$ such that

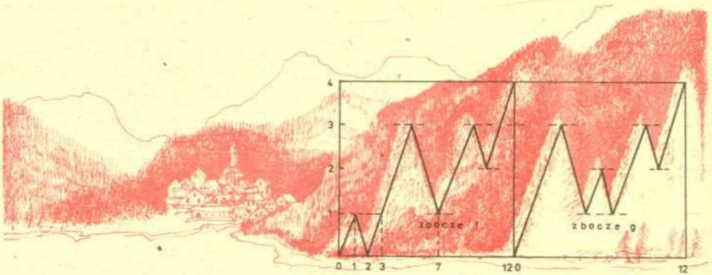
$$f_1\varphi_1 = f_2\varphi_2 = \ldots = f_n\varphi_n. \tag{1}$$

Theorem I has the following simple interpretation. There are n paths which are going to the top of a mountain. The paths need not always go upwards, some segments of the paths may be directed downwards. On each of the paths a tourist is climbing. Theorem I asserts that the tourists can climb to the top of the mountain in such a way that, at every moment, all of them are on the same level (of course, it may happen that, in some time intervals, some of the tourists must return from the previously covered segments of the paths). To make it clear, let us suppose that the paths are the curves

Dwaj taternicy...

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

Dwaj taternicy, wychodząc z miejsc leżących na tym samym poziomie wchodzą na szczyt, jeden po zboczu o profilu $y = f(x)$, a drugi po zboczu o profilu $y = g(x)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi o wartościach w odcinku $[0, 1]$; zmienna x też przebiega odcinek $[0, 1]$, załóżmy, że $f(0) = g(0) = 0$ (poziom wyjściowy) i $f(1) = g(1) = 1$ (szczyt).



Rys. 1. Funkcje f i g są tu bardzo proste: określa je pięć wartości $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ na zbiorze $\{0, 1, \ldots, 12\}$, poza tym są liniowe.

Czy mogą tak ułożyć marszruty, aby w każdej chwili być na tym samym ze sobą poziomie? Bardziej matematycznie: czy istnieją funkcje ciągłe $x = a(t)$ i $y = b(t)$ takie, że $f(a(t)) = g(b(t))$ dla każdego t z odcinka $0 \leq t \leq 1$ i takie, że $a(0) = b(0) = 0$ i $a(1) = b(1) = 1$?

Przykładowa bibliografia

- Homma T., *A theorem on continuous functions*, Kodai Mathematical Seminar Reports 4 (1952), 13–16.
- Mioduszewski J., *Dwaj taternicy*, Delta 5/1982, `https://deltami.edu.pl/media/articles/1982/05/delta-1982-05-dwaj-taternicy.pdf`.
- Sikorski R., Zarankiewicz K., *On uniformization of functions. I*, Fundamenta Mathematicae, 41 (1955), 339–344.
- Whittaker J. V., *A mountain-climbing problem*, Canadian Journal of Mathematics, 18 (1966), 873–882.
- Goodman J., Pach, J., Yap, C., *Mountain climbing, ladder moving, and the ring-width of a polygon*, American Mathematical Monthly, 96 (1989), 494–510.
- Buchin K., Buchin M., Knauer, Ch. Rote G. Wenk C., *How difficult is it to walk the dog?*, Proc. 23rd European Workshop on Computational Geometry (Graz, 2007), 170–173.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!