Teoriopierścieniowe własności algebr komórkowych

Arkadiusz Męcel

Seminarium Badawcze Zakładu Algebry UW, 19.04.2018r.

1 Baza komórkowa

Teoria algebr komórkowych jest przejawem jednego z dwóch naturalnych podejść do teorii reprezentacji algebr skończenie wymiarowych (a więc także do teorii reprezentacji grup czy półgrup). Pierwsze z nich to podejście przez teorię Gabriela polegającą na opisie reprezentacji przy pomocy technik związanych z różnego typu kołczanami, na przykład przez rozważanie ilorazów algebr dróg grafów podzielonych przez odpowiednie ideały dopuszczalne. Jest to podejście przydatne w uzyskiwaniu uzyskiwaniu ogólnych rezultatów, kryteriów czy ważnych klas algebr (jak np. algebry skończonego typu reprezentacyjnego). Drugie podejście do teorii reprezentacji algebr polega na wskazywaniu baz o „dobrych własnościach", które pozwalają na konstruowanie wprost ważnych z punktu widzenia struktury algebry obiektów. Ze względu na to, że teoria reprezentacji związana jest bardzo ściśle ze strukturami definiowanymi lub klasyfikowanymi przy pomocy grafów (szczególnie Dynkina i Euklidesowych), pierwsze z wymienionych podejść funkcjonuje w matematyce w zasadzie od lat 70-tych i ma bardzo bogatą literaturę. Z drugiej strony podejście kołczanowe dużo mówi o strukturze modułów, a mniej o strukturze pierścieniowej badanych obiektów. Zwłaszcza wychodząc ze świata skończenie wymiarowego do algebr nieskończenie wymiarowych zadawanych najczęściej przez generatory i relacje, język teorii reprezentacji robi się niezwykle skomplikowany i wydaje się „odległy" od uprawianej równolegle teorii pierścieni. W ostatnich 20 latach wiele ważnych typów algebr skończenie i nieskończenie wymiarowych badane jest przez pryzmat istnienia tzw. struktury komórkowej, co doprowadziło do nowych rezultatów oraz dało wgląd w pierścieniową strukturę tych algebr. Referat ten poświęcony jest przybliżeniu tego zagadnienia.

Definicja 1 (Graham, Lehrer, 96). *Niech R będzie przemienną dziedziną noetherowską. R-algebrę A nazwiemy algebrą komórkową ze strukturą komórkową (Λ, M, C, i) jeśli spełnione są następujące warunki:*

(C1) Λ jest skończonym, częściowo uporządkowanym zbiorem. Każdemu elementowi $\lambda \in \Lambda$ przyporządkowujemy skończony zbiór $M(\lambda)$ tak, że algebra A ma R-bazę złożoną ze wszystkich zbiorów postaci $C^{\lambda}_{S,T}$, gdzie $(S,T) \in M(\lambda) \times M(\lambda)$, oraz $\lambda \in \Lambda$.

(C2) Przekształcenie $i : A \to A$ jest R-liniową inwolucją (czyli antyizomorfizmem) A oraz $i^2 = id$. Co więcej, dla każdego λ mamy $i(C^{\lambda}_{S,T}) = C^{\lambda}_{T,S}$.

(C3) Dla każdego $\lambda \in \Lambda$ oraz $S,T \in M(\lambda)$ oraz dla każdego $a \in A$ mamy:

$$aC^{\lambda}_{S,T} = \sum_{U \in M(\lambda)} r_a(U,S) C^{\lambda}_{U,T} + r',$$

*gdzie współczynniki $r_a(U,S) \in R$ **nie zależą od** T zaś r' jest liniową kombinacją elementów bazowych ze zbiorów $C^{\mu}_{S',T'}$, gdzie $\mu < \lambda$.*

Przykład 1. *Niech A będzie algebrą macierzy $M_n(R)$ nad R. Wtedy:*

- $\Lambda = \{n\}$, $M(n) = \{1, \ldots, n\}$,
- $C^n_{i,j} = E_{ij}$, *gdzie* E_{ij} *to jedynki macierzowe dla* $1 \leqslant i, j \leqslant n$,
- *Dla każdego* $a = (r_{pq}) \in A$ *mamy* $aE_{ij} = \sum_k r_{ki} E_{kj}$
- i*-transpozycja*

Przykład 2. $A = k[x]/(x^{n+1})$, *gdzie k jest ciałem. Wtedy:*

- $\Lambda = \{0, 1, \ldots, n\}$ *z porządkiem odwrotnym do naturalnego.*
- $M(\lambda) = \{\lambda\}$,
- $C^\lambda_{\lambda,\lambda} = \overline{x}^\lambda$,
- *dla* $f = a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{x} + a_0$ *mamy* $f\overline{x}^\lambda = a_0 x^\lambda + r'$, *bo* $\overline{x}^s < x^\lambda$, *dla* $s > \lambda$.
- $i = id$.

Przykład 3. *Algebra grupowa $k\Sigma_n$ jest komórkowa, gdzie Σ_n to grupa permutacji zbioru n-elementowego.*

- Λ *to zbiór podziałów n, gdzie dla podziałów $\lambda_1 = (p_1, \ldots)$ oraz $\lambda_2 = (q_1, \ldots)$ wprowadzamy porządek $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \geqslant 1$ mamy $p_1 + \ldots + p_k \leqslant q_1 + \ldots + q_k$ (do sum tych dopisujemy zera, jeśli to konieczne),*
- $M(\gamma)$ *- zbiór standardowych tablic Younga kształtu λ. Wiadomo, że zachodzi równość $\sum_{\lambda\in\Lambda}(t_\lambda)^2 = n!$, gdzie t_λ to liczba standardowych diagramów dla danego kształtu λ,*
- $C^\gamma_{P,Q} = w \in \Sigma_m$, *gdzie γ, P, Q są jednoznacznie wyznaczone przez w.*
- *inwolucja $w \mapsto w^{-1}$ – wiadomo, że jeśli w odpowiada para tableaux postaci (P, Q) to w^{-1} odpowiada para (Q, P).*

2 Moduły komórkowe i formy kwadratowe

Definicja algebr komórkowych powstała w kontekście teorii reprezentacji algebr Heckego. Nie ma tu miejsca by przytoczyć całą historię tym bardziej, że naszym celem jest skupienie się raczej na „pierścieniowych" własnościach tych algebr. Warto jednak przypomnieć kilka kwestii (przynajmniej w pewnym uproszczeniu). Jednym z wciąż otwartych problemów teorii reprezentacji grup skończonych jest opis reprezentacji nieprzywiedlnych grupy symetrycznej nad ciałem charakterystyki dodatniej. Dzięki wynikom Jamesa z lat 70'tych mamy naturalne parametryzacje tych reprezentacji w języku teorii tzw. modułów Spechta, a późniejsze wyniki pozwoliły na rozstrzygnięcie pewnych szczególnych przypadków, ale w ogólności nie są znane nawet combinatoryczne wzory na wymiary modularnych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy symetrycznej! Analogiczny problem w charakterystyce 0 rozwiązany został przez Frobeniusa niemal 120 lat temu. W szerszym kontekście problem ten jest szczególnym przypadkiem problemu opisu reprezentacji nieprzywiedlnych tzw. algebr Iwahori-Heckego. Przypomnijmy możliwie prostą wersję definicji tych algebr, właśnie dla grupy symetrycznej.

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 oraz niech q będzie dowolnym elementem pierścienia R. Algebra Iwahori-Hecke $\mathcal{H}_{R,q}$ grupy Σ_n to R-algebra z 1 generowana przez $T_1, \ldots, T_{n-1}$ oraz relacje:

(1) $(T_i = q)(T_i + 1) = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

(2) $T_iT_j = T_jT_i$, dla $1 \leqslant i < j - 1 \leqslant n - 2$,

(3) $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Relacje (2), (3) odpowiadają relacjom definiującym grupę symetryczną jako grupę Coxetera. Algebrę Iwahori-Hecke można definiować dla dowolnej grupy Coxetera, czy ogólniej dla grup Weyla czy grup reduktywnych. W przypadku wyboru innej grupy relacje te są odpowiednio modyfikowane. Warto myśleć o tej algebrze $\mathcal{H}_{R,q}$ jako o elemencie rodziny R-algebr zależnych od parametru q. W takim przypadku gdy $q = 1$ relacja (1) redukuje się do $T_i^2 = 1$ i algebra $\mathcal{H}_{R,1}$ to po prostu pierścień grupowy $R\Sigma_n$. W przypadku, gdy q jest potęgą liczby pierwszej oraz $R = \mathbb{C}$ można pokazać, że H_q jest półprostą algebrą izomorficzną z $e_B\mathbb{C}Gl_n(q)e_B$, gdzie e_B jest idempotentem związanym z rozkładem Bruhat grupy $Gl_n(q) = \bigcup_{w\in\Sigma_n} BwB$ względem podgrupy Borela (złożonej z macierzy górnotrójkątnych). Pozwala to na opis reprezentacji nieprzywiedlnych grupy liniowej nad ciałem skończonym przy pomocy reprezentacji grupy symetrycznej, a wiec w tym przypadku – za pomocą modułów nad algebrą półprostą.

W kontekście opisu reprezentacji modularnych grupy symetrycznej algebry Heckego nie są półproste. Wiązano jednak nadzieje z badaniem tych algebr ze względu na to, że są one często tzw. specjalizacjami generycznej algebry Iwahori-Hecke, zadanej dla pierścienia Laurenta $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Nad ciałem ułamków (R) algebra generyczna $\mathcal{H}_{R,q}$ jest półprosta. Czym zaś jest specjalizacja?

Dla dowolnych pierścieni R, R' oraz homomorfizmu $f : R \to R'$ pieścień R' traktowany być może jako R-moduł z działaniem $rr' = \phi(r)r'$. Specjalizacja R-algebry A zadana przez f to algebra $A \otimes_R R'$. W interesującym nas kontekście zachodzą następujące fakty:

- jeśli f jest jak wyżej i przeprowadza $q \in R$ na $q' \in R'$ to mamy izomorfizm R'-algebr $\mathcal{H}_{R',q'} \simeq \mathcal{H}_{R,q} \otimes_R R'$,
- jeśli A jest R-algebrą o strukturze komórkowej (Λ, M, C, i), to $A \times_R R'$ jest komórkowa z bazą $C^\lambda_{U,V} \otimes_R 1_{R'} \mid \lambda \in \Lambda, U, V \in M(\lambda)$.

Fakty te pozwalają rozważać jednocześnie teorię reprezentacji nad różnymi pierścieniami. W szczególności pozwala na przechodzenie z reprezentacji w charakterystyce zero (związanych z modułami algebr półprostych) to reprezentacji w charakterystyce dodatniej. Jak za chwilę zobaczymy, problem opisu reprezentacji nieprzywiedlnych algebr komórkowych sprowadza się do problemu badania pewnych form dwuliniowych. Pokażemy pokrótce jak wygląda ta redukcja. Jest ona ugólnieniem wyników dotyczących tzw. modułów Spechta i wyników Jamesa z 1978 roku. Zakładamy przy tym, dla pewnego uproszczenia, że R jest ciałem.

Zaznaczyć przy tym należy, że osobną dziedziną badania reprezentacji algebr Heckego jest przypadek $q = 0$, zupełnie odporny na techniki związane ze specjalizacją. Algebra 0-Hecke grupy symetrycznej to algebra półgrupowa tzw. monoidu Coxetera grupy symetrycznej. Badanie reprezentacji tych monoidów i ich afinicznych wersji to osobny ważny wątek teorii reprezentacji (półgrup).

Niech $A = (\Lambda, M, C, i)$ będzie algebrą komórkową. Dla każdego $\lambda \in \Lambda$ określamy moduł komórkowy $W(\lambda)$ jako wolny A-moduł o bazie $C_S, s \in M(\lambda)$ i strukturze zadanej wzorem

$$aC_S = \sum_{U \in M(\lambda)} r_a(T,S)C_T,$$

gdzie współczynniki $r_a(T,S)$ są takie, jak w definicji (C3) (przypomijmy, że moduły Spechta grupy symetrycznej mają bazę wyznaczoną przez standardowe tableau Younga, co odpowiada opisowi podanemu w przykładzie trzecim). Dla każdego takiego modułu $W(\lambda)$ określamy formę dwuliniową $\Phi_\lambda : W(\lambda) \times W(\lambda) \to k$ wzorem:

$$C^\lambda_{S,S} C^\lambda_{T,T} = \Phi_\lambda(C_S, C_T) C^\lambda_{S,T} \bmod J^{<\lambda} \tag{2.1}$$

gdzie $J^{<\lambda}$ to ideał generowany przez wszystkie elementy bazowe $C^\mu_{U,V}$, gdzie $\mu < \lambda$. Zobaczmy, że wzór ten ma sens, ponieważ $C^\lambda_{S,S} C^\lambda_{T,T}$ równy jest, modulo $J^{<\lambda}$, z jednej strony sumie $\sum\limits_{U \in M(\lambda)} r_{C^\lambda_{S,S}}(U,T) C^\lambda_{U,T}$, a z drugiej strony sumie $\sum\limits_{U \in M(\lambda)} r_{C^\lambda_{T,T}}(T,U) C^\lambda_{T,U}$. Skoro jednak przedstawienie tego elementu w bazie A musi być jednoznaczne, to nośnik obydwu tych sum musi być jednakowy. Jest to właśnie element $C_{S,T}$. A zatem przez rozszerzenie liniowe na każdej współrzędnej dostajemy formę dwuliniową. Zauważmy jeszcze, że forma ta jest symetryczna. Na mocy (C2) mamy $i(\Phi_\lambda(C_S, C_T) C^\lambda_{S,T}) = \Phi_\lambda(C_S, C_T) i(C^\lambda_{S,T}) = \Phi_\lambda(C_S, C_T) C^\lambda_{T,S}$. Z drugiej strony elementy $C^\lambda_{S,S} C^\lambda_{T,T}$ oraz $C^\lambda_{T,T} C^\lambda_{S,S}$ przechodzą na siebie przy inwolucji i. A zatem $\Phi_\lambda(C_S, C_T) = \Phi_\lambda(C_T, C_S)$.

Twierdzenie 2 (Graham, Lehrer). *Niech $A = (\Lambda, M, C, i)$ będzie k-algebrą komórkową. Zbiór $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \,|\, \Phi_\lambda \neq 0\}$ parametryzuje wszystkie proste moduły algebry A. Dokładniej, jeśli przez $rad(\lambda)$ oznaczymy zbiór $\{x \in W(\lambda) \,|\, \Phi_\lambda(x,y) = 0, \forall_{y \in W(\lambda)}\}$, to jest to A-podmoduł $W(\lambda)$, a dokładniej jest to radykał tego modułu. Co więcej $W(\lambda)/rad(\lambda)$ jest modułem prostym. Każdy A-moduł prosty jest tej postaci. W szczególności algebra A jest półprosta jako lewostronny moduł nad sobą wtedy i tylko wtedy, gdy forma Φ_λ jest niezdegenerowana. Natomiast w ogólnym przypadku wymiary modułów prostych to $|M(\lambda)| - \dim_k(rad(\lambda)$.*

Nawet w przypadku algebr nad ciałem praktyczne wyznaczanie wymiarów modułów prostych w języku podanym przez Twierdzenie Grahama-Lehrera jest oczywiście dość trudne, ale w szczególnych przypadkach okazało się możliwe (i jednocześnie ujednolicało wcześniejsze niełatwe rezultaty). Dotyczy to między innymi algebr algebr Schura typu A, Temperleya-Lieba, Brauera, Jonesa i innych algebr typu diagramowego. Naszym celem są raczej rozważania dotyczące struktury pierścieniowej algebr komórkowych. Zobaczymy teraz, że zamiast rozważania algebr posiadających bazy o bardzo specyficznych własnościach (C1)-(C3), rozważać można równoważnie algebry z inwolucją posiadające szczególną filtrację przy pomocy ideałów dwustronnych. Odpowiadać ona będzie niejako ideałom $J^{<\lambda}$ opisanym wyżej i pozwoli na uogólnienie rozważań także do algebr nieskończenie wymiarowych.

3 Ideały komórkowe

Stwierdzenie 3 (Koenig, Xi, 1998). *Niech A będzie R-algebrą, przy czym R jest przemienną noetherowską dziedziną. Załóżmy, że i jest inwolucją algebry A. Dwustronny ideał J algebry A nazwamy ideałem komórkowym wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- *$i(J) = J$,*
- *istnieje lewostronny ideał $\Delta \subset J$ taki, że Δ jest skończenie generowany i wolny nad R oraz istnieje izomorfizm A-bimodułów $J \simeq \Delta \otimes_R i(\Delta)$ taki, że następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & \Delta \otimes_R i(\Delta) \arrow[d, "x\otimes y \mapsto i(y)\otimes i(x)"] \\
J \arrow[r, "\alpha"'] & \Delta \otimes_R i(\Delta)
\end{tikzcd}$$

Algebra A z inwolucją i jest komórkowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego n istnieje rozkład A na sumę prostą R-modułów postaci:

$$A = J_1' \oplus J_2' \oplus \ldots \oplus J_n',$$

gdzie $i(J_j') = J_j'$ dla każdego j oraz taki, że kładąc $J_j = \oplus_{l=1}^{j} J_l'$ daje wstępujący łańcuch dwustronnych ideałów A takich, że dla każdego j iloraz $J_j' = J_j/J_{j-1}$ jest ideałem komórkowym w A/J_{j-1}.

Dowód. Zobaczmy najpierw, że algebra komórkowa o strukturze (Λ, M, C, i) spełnia warunki podane w stwierdzeniu. Weźmy minimalny możliwy indeks λ. Niech $J(\lambda)$ będzie generowany jako R-moduł przez elementy bezowe $C_{S,T}^{\lambda}$. Jest to, na mocy (C3) dwustronny ideał w A (bo λ jest minimalne). Na mocy (C2) jest mamy $i(J(\lambda)) = J(\lambda)$. Weźmy dowolny indeks T. Jako Δ kładziemy podmoduł generowany przez $C_{S,T}^{\gamma}$, gdzie T jest ustalone. Wówczas nietrudno widzieć, że $(J(\lambda) \simeq \Delta \otimes_R i(\Delta)$. A zatem $J(\lambda)$ jest ideałem komórkowym. Dalej postępujemy przez indukcję. Widzimy, innymi słowy, że $A = \oplus_{\lambda \in \Lambda} J(\lambda)$.

Dowodzimy drugą implikację. Załóżmy, że algebra spełnia założenia podane w stwierdzeniu. Bazę komórkową konstruujemy indukcyjnie ze względu na długość łańcucha ideałów komórkowych. Weźmy minimalny ideał J w łańcuchu J_i. Z definicji J ma skończenie generowany podmoduł Δ o bazie $\{C_S\}$. Niech $C_{S,T}$ będzie przeciwobrazem $\alpha^{-1}(C_S \otimes i(C_T))$. Skoro Δ jest lewostronnym modułem to warunek (C3) zachodzi dla tak skontruowanej bazy J. (C2) zachodzi z przemienności diagramu wypisanego wyżej. Indukcja daje nam zatem bazę komórkową algebry A/J. Biorąc więc dowolne jej przeciwobrazy razem z elementami bazowymi J dostajemy bazę komórkową A. □

Widzimy zatem, że dwie podane definicje są równoważne. Jak wyglądają ideały komórkowe? Pokażmy dwa fakty z tym związane.

Stwierdzenie 4. *Niech A będzie R-algebrą o ideale komórkowym $J = A$. Wówczas A jest izomorficzna z pierścieniem $M_n(R)$.*

Dowód. Pokażemy dowód, gdy R jest ciałem. Nieduże modyfikacje pozwalają uzyskać dowód w przypadku ogólnym (noetherowska dziedzina). Istnienie ideału komórkowego oznacza, że A ma inwolucję i, a zatem $A \simeq \Delta \otimes_R i(\Delta)$, dla pewnego ideału lewostronnego Δ. Mamy zatem izomorfizmy:

$$A \simeq End_A(A) \simeq Hom_A(\Delta \otimes_R i(\Delta), A) \simeq Hom_R(i(\Delta), Hom_A(\Delta, A)).$$

Niech $m = \dim_R(\Delta)$. Wówczas $\dim_R(A) = m^2$ oraz jako lewostronny A-moduł A jest izomorficzna do m kopii Δ. Moduł $Hom_A(\Delta, A)$ jest podmodułem w $Hom_R(\Delta, A)$, a zatem ma wymiar co najmniej m. Ale powyższy izomorfizm pokazuje, że nie może mieć większego wymiaru. Więc $E = End_A(\Delta, \Delta)$ ma wymiar 1 i zawiera R, a wiec jest mu równy. Stąd $End({}_AA) \simeq Hom_A(\oplus\Delta^m, \oplus\Delta^m) \simeq M_n(E) = M_m(R)$. □

Okazuje się, że nad ciałem są tylko dwa rodzaje ideałów komórkowych. Jeden z nich wiąże się z ważną klasą algebr.

Stwierdzenie 5. *Niech A będzie R-algebrą (R jest ciałem) z inwolucją i oraz J ideałem komórkowym tej algebry. Wówczas J spełnia jeden z następujących (wzajemnie wykluczających się) warunków.*

(a) $J^2 = 0$,

(b) *$J = AeA$, gdzie e jest prymitywnym idempotentem w A. Co więcej eAe równy jest $Re \simeq R$ oraz mnożenie w A zadaje izomorfizm A-bimodułów $Ae \otimes_R eA \simeq J$.*

Zanim dowiedziemy tę uwagę zauważmy, że wynika z niej ważny wniosek w przypadku algebr nad ciałem. Przypomnijmy, że ideał T k-algebry sk. wymiarowej A (czy óglnie półprymarnej) nazywamy dziedzicznym, jeśli $T^2 = T$, $TJ(A)T = 0$ oraz J_A jest projektywny. Zauważmy, że sytuacja opisana w punkcie (b) powyższego stwierdzenia opisuje ideał dziedziczny. Istotnie, skoro $eAe = e$, tzn, że $(AeA)J(A)(AeA) = AeJ(A)eA = 0$. Algebrę A nazywamy quazi dziedziczną, jeśli istnieje w niej łańcuch ideałów $0 = J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n = A$ taki, że iloraz J_i/J_{i-1} jest dziedziczny w A/J_{i-1}. Jest to ważna klasa algebr w teorii reprezentacji. Wiadomo, że każda sk. wymiarowa algebra globalnego wymiaru 2 jest taka. Powyższe stwierdzenie mówi, że w przypadku algebr komórkowych nad ciałem istnienie (dla pewnej inwolucji) łańcucha komórkowego o faktorach nie nilpotentnych oznacza, że algebra ta jest quazi dziedziczna.

Dowód. Z założenia J posiada R-bazę $C_{S,T}$ oraz iloczyny elementów bazowych spełniają regułę ($C3$). Jeśli wszystkie produkty $C_{S,T}C_{U,V}$ są zerami, to jestemy w przypadku (a). Załóżmy więc, że przynajmniej jeden z tych produktów jest niezerowy. Nietrudno widzieć, z wzoru (C3), że iloczyn ten nie zależy od S oraz V, a tylko od T, U. A zatem także iloczyn $C_{U,T}C_{U,T}$ musi być niezerowy. Zgodnie jednak z rozważaniami, które poczyniliśmy przy okazji definicji formy dwuliniowej Φ_λ, iloczyn ten to po prostu wielokrotność skalarna $C_{U,T}$. A zatem istnieje idempotent w J, a zatem także idempotent prymitywny.

Niech $0 \neq Ae$ będzie ideałem lewostronnym zawartym w J, gdzie e to idempotent prymitywny. Ideał J jest jako lewostronny A-moduł sumą prostą skończenie wielu kopii modułu Δ. Ale Ae jest podmodułem, a więc składnikiem prostym $J = Ae \oplus J(1-e)$. Oznacza to, że Ae jest także składnikiem prostym w Δ (jako moduł nierozkładalny). A zatem mamy $\Delta = Ae \oplus M$, dla pewnego A-modułu M. Skoro jednak $J \simeq \Delta \otimes_R i(\Delta)$, to możemy rozłożyć J na sumę modułów $Ae^m \oplus M^m$, gdzie m jest wymiarem Δ nad R. Oczywiście Ae^m jest zawarty w sumie wszystkich obrazów $Ae \to J$, czyli w śladzie X modułu Ae w J. Ślad ten jest zawarty w śladzie AeA modułu Ae w A. Ale wymiar AeA jest nie większy niż produkt wymiarów Ae oraz eA, z których każdy wynosi powiedzmy n, ponieważ jest kaniczna surjekcja bimodułów: $Ae \otimes_R eA \to AeA$. Zastem:

$$m \cdot \dim_R(Ae) \leqslant \dim_R(AeA) \leqslant \dim_R(Ae)\dim_R(eA) = n \dim_R(Ae),$$

czyli $m \leqslant n$. Ale n to też wymiar $Ai(e)$, który z tego samego argumentu jest składnikiem Δ. A więc $n = \dim_R(Ai(e)) \leqslant \dim_R(\Delta) = m$. Czyli $n = m$. Stąd też $i(\Delta) = i(e)A$, a zatem także $Ae = \Delta$. W szczegóności $J = AeA = Ae \otimes_R eA$. Mnożąc obustronnie przez E dostajemy $eAe \otimes_R eAe \simeq eAe$. To oznacza, że eAe jets równe $Re \simeq R$. □

Znacznie trudniejsza jest odpowiedź na pytanie: czy jeśli łańcuch ideałów algebry komórkowej posiada faktor nilpotentny, to czy algebra już nie może być dziedziczna dla pewnego innego ciągu ideałów o komórkowych faktorach? Okazuje się, że tak w istocie jest, ale fakt ten jest już trudnym rezultatem korzystających z metod homologicznych. Co więcej, istnienie nilpotentnego faktora komórkowego implikuje, że wymiar globalny algebry komórkowej jest nieskończony (skądinąd wiadomo, że wymiar algebry quasi-dziedzicznej jest skończony). W teorii algebr quazi-dziedzicznych wiadomo, że długość najdłuższego dziedzicznego ciągu ideałów równa jest liczbie klas izomorfizmu prostych A-modułów. W przypadku komórkowym wiadomo, że jeśli tak jest, to algebra musi być quazi-dziedziczna. Jest jednak możliwe, żeby algebra miała dłuższy ciąg ideałów komórkowych niż by na to wskazywała liczba klas izomorfizmu modułów prostych.
A zatem o ile nie jesteśmy w przypadku algebr dziedzicznych, algebry komórkowe mają nieskończony wymiar globalny. Opis radykału Jacobsona tych algebr nie jest wcale prosty, kilka lat temu został opisany przypadek, gdy A jest tzw. symetryczną algebrą komórkową tj. taką, na której istnieje niezdegenerowana symetryczna forma dwuliniowa. W ostatnim czasie powstało sporo prac dotyczących tego przypadku. Inne wyniki to na przykład:

- Dla ciała k charakterystyki różnej od 2 pojęcie algebry komórkowe jest niezmiennikiem Mority. Nie jest to natomiast prawdą dla ciał charakterystyki 2.
- Jeśli A jest komórkowa nad ciałem nieparzystej charakterystyki, to jeśli P jest skończenie generowanym projektywnym A-modułem, to także $End_A(P)$ jest komórkowa.

O skończenie wymiarowych algebrach komórkowych powstaje wciąż sporo prac; niektóre dotyczą przypadku symetrycznego, inne próbują wprowadzać gradacje, osłabiać pewne warunki. Istotną klasą algebr, które „wyrosły” z algebr komórkowych są tak zwane afiniczne algebry komórkowe, o których powiem teraz kilka słów.

4 Afiniczne ideały komórkowe

Niech k będzie noetherowską dziedziną z jedynką. Przypomnijmy, że przemienną k-algebrę B nazywamy afiniczną jeśli B jest obrazem homomorficznym pierścienia wielomianów (przemiennnych) o skończenie wielu zmiennych nad k. Aby zdefiniować aficzną algebrę komórkową należy dodać modyfikację do definicji ideału komórkowego algebry skończenie wymiarowej zaproponowanej przez Koeniga i Xi. Zakładamy mianowicie dalej, że dana jest algebra A z inwolucją, ale ideał J nazwiemy komórkowym jeśli $J \simeq \Delta \otimes_B \Delta'$, gdzie B jest algebrą afiniczną, zaś $\Delta = V \otimes_k B$ jest $A - B$-bimodułem, gdzie strukra prawostronnego B modułu dana jest przez działanie modułu B_B, zaś V jest skończonej rangi wolnym k-modułem. Również w tym przypadku wypisać należy stosowne kryteria kompatybilności. Definicja afinicznej algebry komórkowej jest już analogiczna do definicji podanej na początku.

Wprawdzie sama definicja afinicznej algebry komórkowej jest w wielu aspektach bardzo podobna do przypadku komórkowego, wyróżnia ją obecność algebr B_j, które są jakby sztucznym tworem - a priori niezwiązanym z algebrą A. Powiedzieliśmy, że pojedynczy ideał w skończenie wymiarowej algebrze komórkowej ma strukturę macierzową nad pierścieniem k. W naszym przypadku jest podobnie, przy czym ideał komórkowy traktować można, jako A-bimoduł jako tzw. swich pieścień $(M_n(B), \phi)$, dla pewnego ϕ. Przypomnijmy, że jeśli R jest pierścieniem łącznym oraz $r \in R$ to $\overline{R} = (R, r)$ definiujemy jako pierścień łączny z mnożeniem $a \star b = arb$. W przypadku algebr komórkowych widzimy zatem, że ideały są izomorficzne z uogólnioną strukturą macierzową, ale niestety nie da się wskazać naturalnego homomorfizmu pierścieni z B do J, którego obraz zawarty był w centrum J. Tego typu problemy sprawiają, że badanie afinicznych ideałów komórkowych wymaga innych metod. Następujący rezultat jest dalekim uogólnieniem wyniku opisującego ideały komórkowe w przypadku skończenie wymiarowym.

Twierdzenie 6. *Niech J będzie afinicznym ideałem algebry A przy czym $J \simeq (M_n(B), \phi)$. Niech I będzie ideałem w B generowanym przez wszystkie wyrazy macierzy ϕ. Wówczas:*

- *Jeśli B/I jest skończenie generowanym k-modułem, wtedy J jes skończenie generowanym A-modułem.*
- *J jest ideałem idempotentnym wtedy i tylko wtedy, gdy $B = I$.*
- *J jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(\phi)^{-1} \in B$. W tym przypadku $J = Ae$, gdzie e jest centralnym idempotentem oraz $A \simeq A/J \times M_n(B)$.*

Wymienimy teraz kilka rezultatów strukturalnych dla algebr komórkowych przy założeniu, że są zadane przez ciąg ideałów komórkowych $0 = J_0 \subset \dots J_n = A$ oraz $J_i/J_{i-1} \simeq (M_{n_i}(B_i), \phi_i)$ jako ideały komórkowe w A/J_{i-1}.

Twierdzenie 7. *Niech A będzie algebrą komórkową. Jeśli $\det(\phi_j) \in U(B_j)$, dla każdego j, wówczas $A \simeq M_{n_1}(B_1) \times \dots M_{m_n}(B_n)$. W takim przypadku $GKdim(A)$ jest maximum ze zbioru $\{Kdim(B_j)\}$.*

Twierdzenie 8. *Afiniczna algebra komórkowa spełnia tożsamość wielomianową. Dokładniej, pokazuje się, że jeśli pierścień R spełnia tożsamość wielomianową moniczną f, to $\overline{R}$ spełnia tożsamość f^2.*

To pytanie prowadzi do następującego pytania otwartego. **Kiedy afiniczna algebra komórkowa jest prawostronnie noetherowska?** Na mocy tw. Posnera wiadomo, że półpierwszy PI pierścień R jest prawostronnie noetherowski i skończenie generowany nad swoim centrum wtedy i tylko wtedy, gdy jego centrum jest noetherowskie. W przypadku afinicznych algebr komórkowych nie wiadomo jednak nawet czy ich centrum jest afiniczne komórkowe. Wiadomo natomiast, że nie każda algebra afiniczna komórkowa jest noetherowska. Przykładem jest $R = k[x, y]/\langle x, y\rangle$. Ideałem komórkowym jest $J \simeq (k[x], x)$ i nie jest on jako ideał lewostronny skończenie generowany. W przypadku gdy pierścienie B_i są zredukowane, $Kdim(B_j) \leqslant 1$ oraz $\det(\phi_j)$ nie jest dzielnikiem zera można pokazać, na mocy tw. Smalla-Warfielda, że A jest lewostronnie i prawostronnie noetherowska oraz skończenie generowana nad swoim centrum $c(A)$. Co więcej w takim przypadku $c(A)$ jest zredukowaną afiniczną k-algebrą i $Kdim(c(A)) \leqslant 1$.

Twierdzenie 9. *Niech A będzie afiniczną algebrą komórkową. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- *A/J_j jest półpierwsza dla każdego j,*
- *B_j jest zredukowany oraz $\det(\phi_j)$ nie jest dzielnikiem zera w B_j dla każdego j.*

W każdym z tych przypadków istnieje zanurzenie Φ algebry A w iloczyn macierzy nad pierścieniami B_j oraz centrum algebry A jest przeciwobrazem produktu $B_m \times \dots \times B_0$ przy Φ.

Literatura

[1] J. J.Graham, G. I. Lehrer, Cellular algebras, Invent. Math. 123 (1996), 1–34.

[2] S. König, C.C.Xi, On the structure of cellular algebras, w: I. Reiten, S.Smalø, Ø. Solberg (Eds.) Algebras and Modules II, Canadian Society Conference Proceedings, vol. 24, 1998, 365–386.

[3] S. König, C.C.Xi, When is a cellular algebra quasi-hereditary? Math. Ann. 315 (1999), 281–293.

[4] S. König, C.C.Xi, Affine cellular algebras, Adv. Math. 229 (2012), no 1, 139–182.

[5] P. Carvalho, S. König, C. Lomp, A. Shalile, Ring theoretical properties of affine cellular algebras, J. Algebra (2017), 494–518.