Algebry o algebraicznym szeregu Hilberta
Seminarium Zakładu Algebry, 31.10.2019 r.
Arkadiusz Męcel

Szereg Hilberta wielu ważnych klas algebr jest funkcją wymierną, co pozwala na orzekanie licznych regularności w strukturze tych algebr, między innymi związanych ze wzrostem, istnieniem tożsamości wielomianowych, czy noetherowskością. Można jednak osłabić założenie o wymierności i rozważać sytuację, gdy szereg Hilberta jest elementem algebraicznym nad ciałem funkcji wymiernych. Można też rozważać szeregi niealgebraiczne – przestępne. Kryteria wymierności i algebraiczności szeregów jako funkcji zmiennej rzeczywistej czy zespolonej były tematem dociekań wielu wybitnych XIX-wiecznych matematyków. W XX wieku posłużyły m.in. Mahlerowi w rozwinięciu teorii liczb przestępnych. Gdy powstała współczesna geometria algebraiczna szereg Hilberta stał się jednym z podstawowych narzędzi w pracach Chevalleya, Serre'a i innych. Zaczęto także poszukiwać klas algebr nieprzemiennych o wymiernym szeregu Hilberta. Spektakularnym zastosowaniem teorii szeregów Hilberta były wyniki Gołoda i Shafarevicha (1963) dające negatywne odpowiedzi na problem Kurosha (czy skończenie generowana nil algebra nad K musi być skończenie wymiarowa – a więc nilpotentna) oraz na ogólny problem Burnside'a (dla każdej liczby pierwszej p i liczby całkowitej $d \geqslant 2$ istnieje nieskończona d-generowana p-torsyjna grupa). Współcześnie metody te przeżywają „drugą młodość" m.in. dzięki pracom Agaty Smoktunowicz. Dzięki przełomowym pracom Anicka do badania szeregu Hilberta algebr nieprzemiennych zaprzągnięte zostały potężne metody homologiczne, które dziś wykorzystywane są m.in. w badaniu grup kwantowych, algebr kwadratowych, algebr Koszula i wielu innych klas.

Niezależnie od powyższych kierunków badań, na przełomie lat 50' i 60' pojawił się zupełnie nowy – kombinatoryczny kontekst – związany z szeregami potęgowymi. Powstawała teoria języków formalnych. Chomsky i Schützenberger wprowadzili abstrakcyjnie definiowane nieprzemienne szeregi formalne nad półpierścieniami, których składniki indeksowane są słowami tychże języków. W języku tychże szeregów wyrazili pojęcia wymierności i algebraiczności, a także dokonali wiele przełomowych odkryć w kombinatoryce w latach 70' i 80'. Aplikowalność ich wyników do zagadnień algebraicznych długo pozostawała niezauważona. W latach 80' prace Ufnarovskiego pozwoliły na związanie pojęcia wzrostu algebry ze wzrostem grafów im odpowiadających. W ostatnich latach podejście do algebry nieprzemiennej przez „automaty" wykorzystywane jest w pracach, m.in. Bella, Piontkovskiego czy Iyudu i Shkarina.

Definicje

Przypomnijmy, że jeśli obierzemy skończony zbiór generatorów $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ to dowolny homomorfizm wychodzący z algebry wolnej nad ciałem $k\langle X\rangle \to k\langle X\rangle/I$ zadaje prezentację pewnej algebry skończenie generowanej. Jeśli określimy dodatkowo odpowiedni porządek w zbiorze jednomianów algebry $k\langle X\rangle$, to możemy mówić o jednomianach wiodących w elementach tej algebry. Przez zbiór słów normalnych $N(A)$ algebry $A = k\langle X\rangle/I$ (z zadaną prezentacją i porządkiem jednomianowym) nazywamy zbiór wszystkich słów, które nie są jednomianami wiodącymi w ideale I (te zaś nazywamy – obstrukcjami).

Zbiór słów normalnych określonej długości generuje podprzestrzeń liniową A_n algebry A. Algebra A jest w istocie sumą prostą przestrzeni A_n. Co więcej, w sposób oczywisty zachodzi warunek $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, a więc z określeniem zbioru $N(A)$ wiąże się również gradacja algebry A. Zakładamy, że algebra jest skończenie generowana, a zatem każda z algebr A_n jest skończenie wymiarowa. Pozwala to na określenie formalnego szeregu H_A postaci:

$$H_A = H_A(t) = \sum_0^\infty (\dim A_n) t^n,$$

zwanego `szeregiem Hilberta` algebry A. Obiekt ten niesie informacje o asymptotycznym zachowaniu algebry A. Zanim przyjrzymy się szczegółowo różnym wynikom, między innymi współczesnym, przypomnijmy kilka klasyczych definicji i faktów z teorii szeregów.

Szeregi potęgowe – wymierność i algebraiczność

Rozważmy szereg potęgowy o współczynnikach całkowitych postaci:

$$f(x) = \sum_0^\infty d_n x^n \in \mathbb{Z}[[x]]. \tag{0.1}$$

Szeregi tego typu badane były od XVI wieku pod kątem analitycznym, z czasem pojawiły się rozmaite kombinatoryczne interpretacje dotyczace ich współczynników. Przykładem jest następujący rezultat, którego szczególny przypadek wywodzi się od Eulera.

Twierdzenie 1 (Sylvester (1882))**.** *Liczba rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych $h_{s_1}, \ldots, h_{s_k}$ równania:*

$$h_{s_1}s_1 + \ldots + h_{s_k}s_k = n,$$

gdzie n oraz $s_1, \ldots, s_k$ są ustalonymi liczbami całkowitymi nieujemnymi równa jest współczynnikowi stojącemu przy x^n w rozwinięciu w szereg wokół zera funkcji wymiernej:

$$((1 - x^{s_1})(1 - x^{s_2}) \ldots (1 - x^{s_k}))^{-1}.$$

Szereg (0.1) nazywamy `wymiernym`, jeśli stanowi rozwinięcie wokół zera funkcji wymiernej

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie $P(x), Q(x) \in K[x]$. Gdy K jest ciałem liczb wymiernych – a tak możemy zakładać, przyjmuje się – na mocy klasycznego lematu Fatou, że $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $Q(0) = 1$.

Powiemy, że szereg (0.1) jest `algebraiczny`, jeśli jest rozwinięciem wokół zera pewnego pierwiastka równania wielomianowego postaci

$$\phi_0(x)w^n + \phi_1(x)w^{n-1} + \ldots + \phi_{n-1}(x)w + \phi_n(x) = 0,$$

gdzie $\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x) \in K[x]$ są wielomianami stopnia nie wyższego od n. Alternatywnie można powiedzieć, że szereg jest algebraiczny, jeśli jest rozwinięciem w zerze pewnego pierwiaska równania wielomianowego o współczynnikach w ciele funkcji wymiernych $K(x)$. Szereg, który nie jest algebraiczny nazywamy `przestępnym`.

Rozstrzyganie kiedy szereg formalny sumuje się do funkcji wymiernej było zagadnieniem rozważanym w zasadzue w XIX wieku. Przypomnijmy kilka bardzo klasycznych rezultatów:

Twierdzenie 2. *Koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, by szereg potęgowy o współczynnikach wymiernych reprezentował funkcję wymierną jest to, by wspłczynniki c_i spełniały rekurencję liniową:*

$$a_1 d_{n-1} + a_2 d_{n-2} + \ldots + a_r d_{n-r} = 0,$$

dla każdego $n \geqslant n_0$, przy czym r oraz współczynniki $a_1, a_2, \ldots, a_r$ są wymierne i niezależne od n. Co więcej wszystkie rozwinięcia funkcji wymiernych nad $\mathbb{Q}$ powstają w ten sposób.

Archetypem dla tego typu obserwacji jest rekurencja określająca ciąg Fibonacciego f_n dany przez $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ i $f_{h_2} = f_{h+1} + f_h$, którego funkcją generującą jest:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{h=0}^{\infty} f_h x^h.$$

Załóżmy, że funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozwija się wokół zera w szereg $w(x) = \sum_0^{\infty} d_n x^n \in \mathbb{Z}[[x]]$, oraz $Q(x) = \sum_{i=0}^{r} g_i x^i$, przy czym $g_0 = 1$. Porównujemy współczynniki przy x^n w $w(x) \cdot Q(x)$ oraz w $P(x)$ i dostajemy: $\sum_{i=0}^{r} g_i d_{n-i} = 0$, dla $n > \deg(P(x))$. Szukane współczynniki to $a_i := -g_i$. Jeśli natomiast współczynniki szeregu potęgowego $w(s)$ postaci (0.1) spełniają rekurencję liniową $d_n = a_1 d_{n-1} + \ldots + a_r d_{n-r}$, to kładąc $Q(x) = 1 - a_1 x - \ldots - a_r x^t$ sprawdzamy bez trudu, że współczynniki szeregu $P(x) = w(x) \cdot Q(x)$ znikają dla dostatecznie dużych n, a zatem $P(x)$ jest w istocie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 3 (Kronecker)**.** *Szereg* (0.1) *reprezentuje funkcję wymierną wtedy, i tylko wtedy, gdy wyznaczniki:*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \ldots & d_m \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m & d_{m+1} & \ldots & d_{2m} \end{vmatrix}$$

są wszystkie równe 0*, dla dostatecznie dużych m.*

W 1916 roku Ernest Wilczyński w artykule przeglądowym [17] dla American Math Monthly podjął – raczej dobrze znany – tak uważał – problem sformułowania odpowiedniego analogicznego do powyższych kryteriów wymierności kryterium algebraicznści dla szeregu formalnego.

Kryterium Wilczyńskiego można wyrazić również w języku macierzy. Jeśli $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ jest rozwinięciem szukanej funkcji algebraicznej w szereg, oraz jeśli $w^k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)} z^i$ jest rozwinięciem k tej potęgi funkcji w, to warunkiem koniecznym i wystarczającym algebraiczności szeregu w jest to, aby istniały takie m i n, że zerują się wszystkie wyznaczniki stopnia mn w macierzy o mn kolumnach i nieskończenie wielu wierszach postaci:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{m+1} & \ldots & a_1 & a_{m+1}^{(2)} & \ldots & a_1^{(2)} & \ldots & a_{m+1}^{(n)} & \ldots & a_1^{(n)} \\ a_{m+2} & \ldots & a_2 & a_{m+2}^{(2)} & \ldots & a_2^{(2)} & \ldots & a_{m+2}^{(n)} & \ldots & a_2^{(n)} \\ a_{m+3} & \ldots & a_3 & a_{m+3}^{(2)} & \ldots & a_3^{(2)} & \ldots & a_{m+3}^{(n)} & \ldots & a_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Widzimy zatem, że od czysto algebraicznej strony kryteria przedstawiania szeregu potęgowego jako funkcji wymiernej i algebraicznej były dobrze znane już na początku XX wieku. Mimo wszystko stwierdzenie, że dany szereg nie jest algebraiczny nie jest zupełnie elementarne. Poniższy przykład szeregu przestępnego pochodzi od Mahlera z roku 1930.

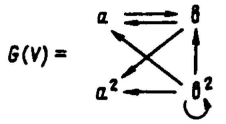
$$H(t) = t + t^2 + t^4 + t^8 + t^{16} + \dots$$

W jaki sposób od rezultatów tego typu można przejść do związków szeregów formalnych z językami formalnymi i algebrami z nimi związanymi? Zanim wspomnimy o ogólnych rezultatach warto zobaczyć prosty przykład, będący zastosowaniem powyższych rezultatów.

Twierdzenie 4. *Każda monomianowa skończenie generowana algebra A o skończonej bazie Gröbnera ma wymierny szereg Hilberta.*

Dowód. Przypomnijmy, że przy obranej prezentacji $A \simeq K\langle X\rangle/I$ i porządku w zbiorze jednomianów mamy pewien zbiór słów wiodących w ideale I, które nazywamy zbiorem F obstrukcji. Bazą algebry A jest natomiast zbiór $N = X \setminus F$ - słów normalnych (algebra jest monomianowa). Niech V będzie podzbiorem niepustym słów normalnych w. Konstruujemy graf $G(V)$, którego wierzchołkami są słowa z V oraz krawędź $f \to g$ występuje jedynie wówczas, gdy $fg \in N$ oraz gdy nie istnieje takie $v \in N$, dla którego f byłoby właściwym prefiksem, i który byłby prefiksem dla fg (niekoniecznie właściwym).

Oto graf, dla ideału $I = \langle a^2, ab^2, a^2b\rangle$ oraz zbioru V o elementach a, b, a^2, b^2.



Lemat 5. *Załóżmy, że V jest zbiorem wszystkich właściwych suffiksów obstrukcji F algebry A wraz ze zbiorem generatorów X. Wówczas istnieje bijekcja pomiędzy ścieżkami w grafie (każdy wierzchołek to ścieżka długości 0) oraz słowami normalnymi N algebry A.*

Dla skończonego grafu G niech $d_G(n)$ oznacza liczbę dróg w grafie G długości nie większej niż n. `Szeregiem Hilberta grafu` G nazywamy szereg potęgowy postaci:

$$P_G(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m t^m, \quad c_m = d_G(m) - d_G(m-1).$$

Zauważmy, że w przypadku algebr, o których mowa w lemacie, a więc na przykład algebr monomianowych o skończonej bazie Grobnera, opisany wyżej szereg Hilberta grafu G jest dokładnie szeregiem Hilberta algebry monomianowej A takiej, że $G = G(A)$. Jak pokazać, że szereg ten jest wymierny?

Jeśli $B = (b_{ij})$ jest macierzą incydencji grafu G, gdzie b_{ij} oznacza liczbę krawędzi z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j, to wyraz (i, j) macierzy B^m jest równy liczbie ścieżek długości m idących z v_i do v_j. Zatem c_m jest sumą wszystkich wyrazów w B^m. Z Twierdzenia Cayleya-Hamiltona wynika, że istnieje liniowa rekurencja postaci: $c_n = z_1c_{n-1} + \ldots + z_rc_{n-r}, \quad z_i \in \mathbb{Z}$, dla dostatecznie dużych n. $\square$

Języki, automaty i nieprzemienny szereg Hilberta

Uogólnienie wyniku naszkicowanego wyżej polega na lepszym zrozumieniu związków między teorią grafów, a teorią słów normalnych. Zajmuje się tym teoria automatów. Przypomnijmy klasyczne definicje. `Automat` $\mathcal{A}$ składa się z `alfabetu` A, skończonego zbioru Q zwanego zbiorem stanów, zbioru $I \subseteq Q$ stanów początkowych, zbioru $F \subseteq Q$ stanów akceptujących oraz relacji $\delta \subseteq Q \times A \times Q$ zwanej relacją przejścia. Bieg automatu to ścieżka w diagramie automatu, czyli ciąg tranzycji $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$. Mówimy, że bieg jak powyżej jest biegiem po słowie $w = a_1 \ldots a_n$ ze stanu q_0 do stanu q_n. Zapisujemy to krótko $q_0 \xrightarrow{w} q_n$. Bieg akceptujący zaczyna się w stanie początkowym, a kończy w stanie akceptującym. Przez $L(\mathcal{A}) \subseteq A^*$ oznaczamy zbiór wszystkich słów, które są rozpoznawalne przez automat A. `Automat deterministyczny` to taki, który ma jeden tylko stan początkowy i dla każdego stanu p i litery a jest dokładnie jeden taki stan q, że $p \xrightarrow{a} q$. Dla każdego słowa $w \in A^*$ automat deterministyczny ma dokładnie jeden bieg po tym słowie.

Twierdzenie 6 (Kleene (1956))**.** *Język rozpoznawalny przez automat deterministyczny otrzymać można ze skończonego alfabetu przez skończoną liczbę operacji sumy zbiorów, konkatenacji i gwiazdki (czyli brania monoidu wolnego z elementu).*

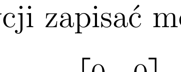
Języki opisane w twierdzeniu Kleene nazywamy `regularnymi`. Algebry, których język słów normalnych tych algebr jest regularny nazywamy `automatowymi`. Dla takich algebr dowodzi się, że ich szereg Hilberta jest wymierny. Metody korzystając również z teorii grafów słów normalnych – konstruowanych w nieco bardziej zaawansowanych sposób niż w przypadku algebr o skończonej bazie Grobnera.

W latach $60'$ Schützenberger i jego otoczenie zaproponowali nowe podejście do szeregów Hilberta, które dało początek twierdzeniem dotyczącym bardziej ogólnych języków i wiązało się z algebraicznością. Wiązało się ono z wprowadzeniem tzw. nieprzemiennych szeregów Hilberta. Pokażę kilka przykładów i sformułuję pewne rezultaty.

Rozważmy język o alfabecie $\{a, b, c\}$ postaci: $L = (ab \cup c)^*$. Elementy tego języka możemy wyrazić za pomocą szeregu formalnego: $\sum_{n \geqslant 0} (ab + c)^n$. Szereg ten, jako szereg geometryczny można oczywiście formalnie sumować i otrzymać wyrażenie wymierne postaci:

$$L = \frac{1}{1 - ab - c}.$$

Problemem jest oczywiście fakt, że a, b, c nie są przemiennymi zmiennymi, więc więc wkraczamy na nowy obszar. Język powyższy można zrozumieć w jeszcze inny sposób. Automat deterministyczny, który rozpoznaje ten język ma postać:



Zauważmy, że działanie operacji tranzycji zapisać można w sposób macierzowy:

$$\delta a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W istocie δ można rozszerzyć do liniowej reprezentacji monoidu wolnego $\langle a, b, c \rangle$ w $M_2(\mathbb{Z})$.

Formalizacja tego pomysłu to dzieło Schützenbergera z początku lat 60'. Niech A będzie alfabetem, a $\mathbb{N}$–zbiorem liczb naturalnych (choć ogólnie rozważa się tu dowolne półpierścienie). Odwzorowania $r : A^* \to \mathbb{N}$ nazywamy `formalnymi szeregami potęgowymi`. Wartości r oznaczamy jako (r, w) i nazywamy współczynnikami szeregu r. Piszemy też zwyczajowo:

$$r = \sum_{w \in A^*} (r, w)w.$$

Wszystkie szeregi formalne nad alfabetem A określamy jako $S\langle\langle A^* \rangle\rangle$.

Mówimy, że szereg formalny $S \in k\langle\langle A \rangle\rangle$ jest `rozpoznawalny`, jeśli istnieje liczba całkowita $n \neq 1$ oraz morfizm monoidów $\mu : A^* \to M_n(k)$ oraz dwie macierze $\lambda \in M_{1\times n}, \gamma \in M_{n\times 1}$ takie, że dla wszystkich słów w mamy $S(w) = \lambda\mu(w)\gamma$.

Fundamentalne twierdzenie teorii szeregów nieprzemiennych brzmi następująco.

Twierdzenie 7 (Kleene (1956)-Schützenberger (1961))**.** *Nieprzemienny szereg potęgowy jest wymierny (to znaczy, mówiąc nieformalnie – jest wyrażeniem złożonym z nieprzemiennych jednomianów wielu zmiennych, na których wykonano operacje algebraiczne i operację odwracania) wtedy i tylko wtedy, gdy jest jest rozpoznawalny.*

Kolejnym krokiem było badanie szeregów będących rozwiązaniami tzw. $\mathbb{N}$-algebraicznych układów. Rozważmy alfabet A o k elementach oraz $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ – zbiór (alfabet) zmiennych. Wówczas przez układ $\mathbb{N}$-algebraiczny rozumieć będziemy zbiór równań postaci: $y_i = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $p_i \in \mathbb{N}\langle\langle (A \cup Y)^* \rangle\rangle$. Układ nazwamy właściwym jeśli dla wszystkich i oraz j mamy $(p_i, \epsilon) = 0$ oraz $(p_i, y_j) = 0$. Mówiąc poglądowo chodzi o to, by szeregi p_i nie miały wyrazów wolnych i aby zmienne y_i nie stały po prawej stronie równości wypisanych wyżej.

Podstawowe pytanie będące przedłużeniem twierdzenia Kleene-Schützenbergera brzmi: jakie języki są rozpoznawalne (w języku reprezentacji) lub po prostu uzyskiwane (jak w przykładzie wcześniej) przez algebraiczne szeregi formalne. Okazało się, że są to dokładnie tzw. języki bezkontekstowe. Dokładniej, zachodzi twierdzenie.

Twierdzenie 8 (Chomsky, Schützenberger, 1963)**.** *Język nad alfabeten skończonym jest bezkontekstowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest* $\mathbb{N}$*-algebraiczny.*

Nie chciałbym wdawać się w tym miejscu w dokładną definicję języków bezkontekstowych. Czytelnik bez trudu uzupełni informacje w [15]. Wspomnę jedynie, że także dla takich języków istnieje klasa rozpoznających je automatów, tzw. automaty ze stosem. Za chwilę podam warunek konieczny bycia takim językiem, który powinien być znacznie bardziej przejrzysty. Rozważmy natomiast, w kontekście algebraicznym, dwa pytania:

Pytanie 1. Czy jeśli wezmę język N słów normalnych algebry A i za jego pomocą skonstruuję szereg formalny, jak wyżej – to czy to jest szereg Hilberta tej algebry?

Pytanie 2. Czy wybór prezentacji i porządku monomianowego nie ma wpływu na regularność języka słów normalnych algebry i wymierność szeregu Hilberta?

Odpowiedź na pytanie pierwsze: tak. Można każdemu językowi L przypisać szereg formalny, który będzie wiązał się ze zliczaniem słów normalnych odpowiedniej algebry. Ma on postać:

$$H_L(x) = \sum_{u \in L} x^{\deg(u)}. \tag{0.2}$$

Odpowiedź na pytanie drugie: niestety tak. Wybór prezentacji i porządku monomianowego ma wpływ, i na regularnosć zbioru słów normalnych, i na wymiernosć szeregu Hilberta.

Rozważmy ideał I algebry $K\langle a,b,x,y\rangle$ generowany przez $G = \{ax^k y^k b \mid k \geqslant 1\}$. Okazuje się (diamond Lemma), że zbiór G stanowi bazę Gröbnera algebry ilorazwej, ale G jest też standardowym przykładem zbioru nieregularnego. Mówi o tym tak zwany `lemat o pompowaniu`.

Lemat 9. *Niech L będzie językiem regularnym. Wówczas istnieje liczba całkowita $p \geqslant 1$ zależna jedynie od L taka, że każde słowo $w \in L$, $|w| \geqslant p$ może być zapisane jako $w = xyz$, gdzie: $|y| \geqslant 1$, $|xy| \leqslant p$ oraz dla każdego $n \geqslant 0$ słowa postaci $xy^n z$ należą do L.*

Nietrudno widzieć, że rozważany w przykładzie zbiór G nie spełnia tego warunku. Dowód lematu o pompowaniu nie jest znowu trudny, odsyłam do [15]. Swoją drogą można od razu sformułować lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych (będziemy mieli przynajmniej jakiś warunek konieczny dla stwierdzania czy algebra spełnia taki warunek).

Lemat 10. *Niech L będzie językiem bezkontekstowym. Wówczas istnieje liczba całkowita $p \leqslant 1$ zależna jedynie od L taka, że każde słowo $w \in L$, $|w| \geqslant p$ może być zapisane jako $w = uvsxy$, gdzie: $|vx| \geqslant 1$, $|vsy| \leqslant p$ oraz dla każdego $n \geqslant 0$ słowa postaci $uv^n wx^n y$ należą do L.*

Dzięki tej uogólnionej formie lematu o pompowaniu dowodzi się na przykład, że język $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$ nie jest bezkontekstowy.

Wróćmy jednak do naszej algebry $A = K\langle a,b,x,y\rangle/I$, gdzie I jest generowany przez G. Wystarczy drobna zamiana zmiennych $a \to a, b \to b, x \to x, y \to x+y$ i nasza algebra A ma prezentację $K\langle a,b,x,y\rangle J$, gdzie J jest generowany przez elementy postaic $ax^k(x+y)^k b$. A zatem nietrudno pokazać, że przyjmując porządek $x > y$ zbiór $G' = \{ax^{2k}b \mid k \geqslant 1\}$ jest zbiorem obstrukcji ideału J, a jest to zbiór regularny. Wiadomo (co jest proste, patrząc na interpretację w języku automatów), że regularność zbioru obstrukcji implikuje regularność zbioru słów normalnych. Swoją drogą, gdybyśmy przyjęli $y > x$, to zbiór obstrukcji miałby postać $\{ax^k y^k b, k \geqslant 1\}$, który jak wiemy nie jest regularny.

Widzimy więc, że automatowość zależna jest od prezentacji i porządku. Aż do 2017 roku otwarte było pytanie Ufnarovskiego o to czy istnieje algebra automatowa, która przy każdej prezentacji miałaby nieskończoną bazę Gröbnera. Okazało się, że tak, i odpowiedni przykład wskazali Iyudu i Shkarin. Jest to algebra o trzech generatorach x, y, z i relacjach

$$xx - xz - 2zz = 0, yz = 0, xy = 0.$$

Wynik był „produktem ubocznym" klasyfikacji algebr kwadratowych o szeregu $(1-t)^{-3}$ oraz algebr kubicznych o szeregu $H_A = (1+t)^{-1}(1-t)^{-3}$ (a prawdziwą motywacją jest badanie regularnych algebr Artina-Scheltera o wymiarze globalnym 3).

Czy są klasy algebr, dla których wymiernosć szeregu Hilberta nie zalezy od prezentacji? Klasycznym przykładem są algebry grupowe skończenie generowanych grup abelowych. W 1983 roku Benson udowodnił, że fakt ten da się uogólnić na skończenie generowane grupy abelowe-przez-skończone. Zagadnienia te są ważne w problemach badania wzrostu rozmaitych grup. Wiadomo na przykład, że pierwsze grupa Heisenberta (prezentacja: $G = \langle x, y, z\,|, z = [x, y]\rangle$) ma wymierny szereg Hilberta przy naturalnym doborze generatorów (wyższe grupy – nie), ale od 1996 roku otwarta jest hipoteza Stolla o tym, czy jest tak przy każdej prezentacji. W 2004 roku Stafford pokazał, że istnieją PI algebry, które mają wymierny szereg Hilberta względem jednego porządku, ale mają niewymierny szereg względem innego.

Na końcu tej części powiedzmy o jeszcze jednej klasie algebr: tak zwanych jednoznacznych bezkontekstowych algebrach. Najłatwiej będzie nam zdefiniować je za pomocą szeregów potęgowych. Szereg nazywa się `jednoznacznym`, gdy może być otrzymany z wielomianów nieprzemiennych przez operacje dodawania, mnożenia i operacji $S^* = (1 - S)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} S^n$ ale w taki sposób, że wykonując te operacje nigdy nie musimy wykonywać sumowania dwóch szeregów formalnych, których nośniki miałyby niepuste przecięcie. Język bezkontekstowy, którego szereg (0.2) ma taką postać nazywamy jednoznacznym. Klasa ta jest ciekawa z powodów obliczeniowych. W 1961 roku Chomsky i Schützenberger uzyskali konstrukcję przypisującą każdemu jednoznacznemu językowi bezkontekstowemu konkretny algebraiczny układ równań (zgodnie z wcześniejszą definicją), którego język ten jest rozwiązaniem. W kontekście tych wyników w ostatnich dwóch latach pojawiły się wazne prace.

Bell (2019) pokazał, że tzw. wymierne szeregi Polyi są jednoznaczne, co było od 40 lat problemem otwartym. Szereg nieprzemienny o wyrazach z ciała K jest Polyi jeśli jego niezerowe współczynniki są zawarte w skończenie generowanej podgrupie K^*.

Piontkovski (2018) badał algebry nieprzemienne o jednoznacznym bezkontekstowym języku słów normalnych – wykazał, że jest to szeroka klasa i obliczył szeregi Hilberta ważnych klas algebr, w szczególności wskazał wiele przykładów algebr skończenie prezentowalnych o algebraicznym szeregu Hilberta (i niewymiernym), pokazując, że wyniki Govorowa z lat 80' nie wskazywały jakiś szczególnie patologicznych algebr. To właśnie spotkanie z Piontkowskim na konferencji w Lens dało mi inspirację do przygotowania tego referatu.

Dmitri Piontkovski, Lens (2019)

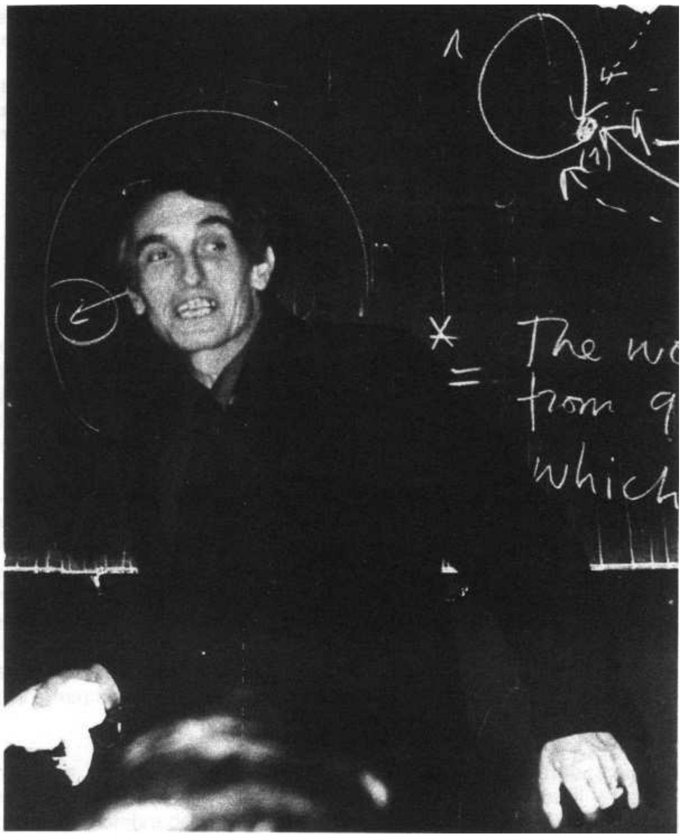
Wymierność i algebraiczność szeregu Hilberta

Poniższy przegląd wyników pokazuje najważniejsze osiągnięcia w dziedzinie rozstrzygania o wymierności i algebraiczności szeregów Hilberta algebr.

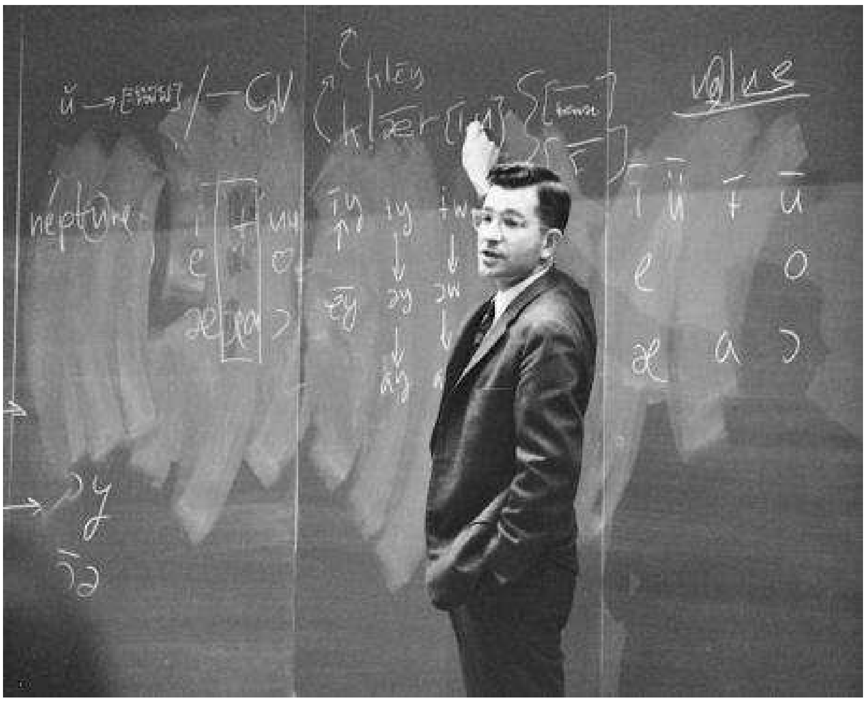
- 1890 – **Hilbert**: jeśli I jest jednorodnym ideałem w $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, wówczas $\dim_{\mathbb{C}} I_n$ jest wielomianem, dla dostatecznie dużego n. Przez I_n rozumiemy tutaj zbiór jednorodnych form w I stopnia n.
- 1927 – **Macaulay**: które ciągi liczb naturalnych występują jako współczynniki w szeregach Hilberta pewnego ideału I w R? Czy mając taki ciąg umiemy skontruować ideał? Odp. TAK dla ideałów monomianowych. Szereg Hilberta algebry przemiennej A jest równy szeregowi odpowiadającej A algebry monomianowej.
- 1937 – **Birkhoff, Witt**: szereg Hilberta algebry obwiedniej skończenie wymiarowej algebry Liego jest wymierny
- 1943 - 1951 – **Chevalley, Nagata, Serre, Nortcott, Rees i Samuel** wykorzystują szereg Hilberta do badania krotności przecięć rozmaitości algebraicznych. Samuel pokazał w 1951 roku, że w wyniku Hilberta $\mathbb{C}$ można zastąpić dowolnym artinowskim pierścieniem lokalnym (przemiennym). Rozważa się także modułową wersję tego szeregu. Powstaje tzw. twierdzenie Hilberta-Serre'a i inne uogólnienia.
- 1957 – **Kostrikin, Shafarevich**: czy skończenie wymiarowa nilpotentna łączna algebra ma zawsze wymierny szereg Hilberta? (odp. NIE)
- 1961 – **Chomsky, Schützenberger**: nieprzemienne szeregi formalne,
- 1963 – **Golod, Shafarevich**: negatywna odpowiedz na problem Kurosha i ogólną hipotezę Burnside'a (nierówności dotyczące operacji na szeregach Hilberta), a zaproponowane metody będą przez lata wykorzystywane, w ostatnich latach m.in. w pracach A. Smotkunowicz.
- 1965-1969 – **Kaplansky-Serre**: czy szereg Hilberta przemiennego lokalnego pierścienia noetherowskiego jest wymierny? (odp. NIE, Anick)
- 1972 – **Govorov**: skończenie prezentowalne algebry monomianowe mają wymierny szereg Hilberta. Hipoteza: wszystkie skończenie prezentowalne algebry zgradowane mają tę samą własność. TAK, dla algebr zgradowanych skończonego wymiaru globalnego itd. (ogólnie: NIE)
- 1980 – **Shearer**: kontrprzykład do hipotezy Govorova. Półgrupa definiująca odpowiednią algebrę miała 11 generatorów i 77 relacji. Prostrze przykłady: Kobayashi (1981) roku. Szeregi Hilberta wymienionych przykładów były funkcjami algebraicznymi. Znano wówczas przykłady uniwersalnych algebr obwiednich, których szereg Hilberta jest przestępny.
- 1983 – **Benson**: algebry grupowe grup abelowych-przez-skończone mają wymierny szereg Hilberta (niezależnie od prezentacji),

- 1982-85 – **Anick**: przełomowe opublikowane w Annals of Mathematics dotyczące związków równań diofantycznych z szeregiem Hilberta, nowe homologiczne metody badań. Wyniki:
  - dla każdego układu równań diofantycznych $S = 0$ istnieje skończenie prezentowalna algebra A (jest to algebra Hopfa określona przez relacje kwadratowe) o wymiarze globalnym 2 wtedy i tylko wtedy, gdy układ $S = 0$ nie ma rozwiązań,
  - obalona jest hipoteza, że skończenie generowana algebra Hopfa musi mieć szereg wymierny,
  - jeśli istnieje skończenie prezentowalna algebra o pośrednim wzroście, to musi mieć przestępny szereg Hilberta,
  - jeśli $A = \langle X, F\rangle$ jest monomianową algebrą skończonego wymiaru globalnego n, wówczas jeśli A nie zawiera wolnej podalgebry o dwóch generatorach, to A jest skończenie prezentowalna oraz ma wzrost wielomianowy stopnia n, a jej szereg Hilberta jest funkcją wymierną postaci $\prod_{i=1}^{n}(1 - t^{m_i})^{-1}$, dla pewnych m_i całkowitych dodatnich, przykład: $A = \langle x, y \,|\, x^2y, yx^2\rangle$ ma szereg Hilberta postaci $(1 - t)^{-2}(1 - t^2)^{-1}$
  - nie istnieje algorytm, który pobiera na wejściu relacje definiujące algebrę i daje na wyjsciu szereg Hilberta tej algebry,
  - nie istnieje algortym pozwalający określić czy istnieje algebra o zadanym z góry szeregu Hilberta.
- 1989 – **Gateva-Ivanowa**: Niech A będzie dowolną algebrą z gradacją taką, że związana z nią algebra monomianowa ma skończony wymiar globalny n oraz wzrost wielomianowy. Wówczas wymiar globalny A jest równy n, baza Gröbnera A jest skończona, a szereg Hilberta A jest postaci $\prod_{i=1}^{n}(1 - t^{m_i})^{-1}$, dla pewnych m_i.
- 1989 – **Ufnarovski**: algebry automatowe mają wymierny szereg Hilberta,
- 1994 – **Stafford, Zhang**: noetherowskie spójne algebry zgradowane o skończonym wymiarze globalnym mają wymierny szereg Hilberta,
- 1997 – **Belov**: generyczne PI algebry mają wymierny szereg Hilberta,
- 1997 – **Stephenson, Zhang** zgradowane algebry noetherowskie o skończonym wymiarze globalnym mają wymierny szereg Hilberta,
- 2001 – **Piontkovski**: w klasie algebr kwadratowych nie da się rozpoznać algebr Koszula jedynie za pomocą ich szeregów Hilberta,
- 2004 – **Bell**: pierwsza PI algebra ma wymierny szereg Hilberta (problem postawiony przez Lorenza w 1980). Z prac Warfielda wiadomo, że sama własność PI nie wystarczy.
- 2015 – **Koçak** wskazuje pierwsze przykłady skończenie prezentowalnych algebr pośredniego wzrostu, które mają przestępny szereg Hilberta (pytanie otwarte od 30 lat).

Pytanie otwarte (?): czy szereg lewostronnie noetherowskiej PI jest wymierny?



Marcel Paul Schützenberger (1965)



Noam Chomksy – jedna z najbardziej rozpoznawalnych osób w USA w XX wieku

Literatura

[1] Anick D.: *Diophantine equations, Hilbert series and undecidable series.* Annals of Mathematics, II. Ser. 122, 87-122.

[2] Bell J.: *The Hilbert series of prime PI rings*, Israel J. Math 139 (2004) 1-10.

[3] Berstel J., Reutenauer C.: *Noncommutative Rational Series with Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 137, Cambridge University Press, Year 2010.

[4] Benson M.: *Growth series of finite extensions of $\mathbb{Z}^n$ are rational*, Invent. Math. 73 (1983), no. 2, 251–269.

[5] N. Chomsky, M. P. Schützenberger: *The algebraic theory of context-free languages*, Computer programming and formal systems (1963), North-Holland, Amsterdam.

[6] Iyudu N., Shkarin S.: *Quadratic automaton algebras and intermediate growth*, `https://arxiv.org/pdf/1705.09972.pdf`.

[7] Krause G.R., Lenagan T.H.: *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Revised edition, Grad. Stud. Math. 22, 2000, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[8] La Scala R., Piontkovski D., Tiwari K.: *Noncommutative algebras, context-free grammars and algebraic Hilbert Series.* ArXiV (2019): `https://arxiv.org/abs/1807.05143`

[9] Govorov, V.E.: *Graded algebras.* (po rosyjsku) Mat. Zametki, 12 (1972), 197204; w języku angielskim w: Math. Notes 12 (1972), 552556 (1973).

[10] Hilbert D.:*Uber die Theorie der algebraiscben Formen*, Math. Ann. 36 (1890), 471-534.

[11] Mansson J., Nordbeck P.:*Regular Gröbner Bases*, J. Symb. Comp. (2002), 163-181.

[12] Petre I., Salomaa A.: *Algebraic Systems and Pushdown Automata*, rodział 7 w: Handbook of Weighted Automata, Monographs in Theoretical Computer Science, red.: W. Brauer J. Hromkovic G. Rozenberg A. Salomaa, Springer 2009.

[13] Shearer J.B.: *A graded algebra with a nonrational Hilbert series*, J. Algebra 62 (1980), no. 1, 228-231.

[14] Stanley R.P.: *Hilbert functions of graded algebras*, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[15] Toruńczyk S.: *Języki, automaty i obliczenia*, skrypt do wykładu na wydziale MIM UW, `https://www.mimuw.edu.pl/~szymtor/jao/skrypt.pdf`.

[16] Ufnarovskii V.A.: *Combinatorial and Asymptotic Methods in Algebra*, in: Encyclopedia of Mathematical Sciences vol. 57, pp.1-196, Springer, 1995.

[17] Wilczynski E.: *On the Form of the Power Series for an Algebraic Function*, Amer. Math. Monthly 26 (1919), 9-12.