Afiniczne algebry reprezentowalne
Seminarium Zakładu Algebry, 21.10.2021 r.
Arkadiusz Męcel

Podczas tego referatu przyjmuję następujące oznaczenia. Przez C rozumieć będę pierścień przemienny, przez F - ciało. Algebrę łączną z 1 nad C oznaczamy przez R, Mówimy, że algebra jest **afiniczna**, jeśli jest skończenie generowana (jako algebra[1]) nad ciałem.

Definicja 1. *Algebrę R nad pierścieniem C nazywamy **reprezentowalną**, jeśli R można zanurzyć w algebrę macierzy $M_n(K)$, gdzie K jest przemienną F-algebrą, dla pewnego n, Każdą taką algebrę K nazywamy **algebrą współczynników** algebry R.*

Skupienie się na algebrach afinicznych można rozumieć dwojako. Z jednej strony algebra macierzy zawiera bogaty świat podalgebr nieskończenie generowanych. Z drugiej strony, klasyczny argument Lewina mówi o tym, że „większość" algebr afinicznych nie jest reprezentowalna. Weźmy choćby obrazy homomorficzne $R = \mathbb{Q}\langle x_1, x_2\rangle$. Jest ich oczywiście nieprzeliczalnie wiele. Dla dowolnego podzbioru I w $\mathbb{N}$ określić można ideał J_I generowany przez elementy

$$x_2 x_1^i x_2, i \in I$$

i wśród algebr A/J_I jest nieprzeliczalnie wiele algebr nieizomorficznych (jest między nimi jedynie przeliczalnie wiele izomorfizmów, bo każdy zadany jest na skończonym zbiorze generatorów i ciało $\mathbb{Q}$ jest przeliczalne). Tymczasem mamy następujący fakt.

Uwaga 1. *Liczba reprezentowalnych afinicznych $\mathbb{Q}$-algebr (z dokładnością do izomorfizmu) jest przeliczalna.*

Dowód. Niech A będzie afiniczną algebrą reprezentowalną generowaną nad $\mathbb{Q}$ przez $a_1, \ldots, a_k$. Możemy ją więc traktować jako podalgebrę w $M_n(K)$, dla pewnej $\mathbb{Q}$-algebry przemiennej K. Każdy generator a_k można zapisać jako macierz $n \times n$ postaci macierzy $(a_{ij}^{(k)})$, gdzie $a_{ij}^{(k)} \in K$ i wygenerować z tego skończonego zbioru wyrazów macierzy afiniczną podalgebrę H algebry K. A zatem możemy traktować A jako podalgebrę $M_n(H)$, gdzie H jest przemienna i afiniczna. Ale przemiennych afinicznych $\mathbb{Q}$-algebr jest przeliczalnie wiele, więc algebr typu $M_n(H)$ jest przeliczalnie wiele. Co więcej, każda afiniczna algebra nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest przeliczalna i ma przeliczalnie wiele afinicznych podalgebr. □

Argumentację tę można poprawić do afinicznych PI-algebr nad $\mathbb{Q}$ – nieprzeliczalnie wiele nieizomorficznych PI-algebr afinicznych nad $\mathbb{Q}$ nie jest reprezentowalne. Argument Lewina nie działa natomiast dla noetherowskich algebr afinicznych nad $\mathbb{Q}$. Tych jest bowiem przeliczalnie wiele. Prowadziło to do intensywnych badań w tej klasie (można zamienić $\mathbb{Q}$ na dowolne ciało). Przypomnę kilka najważniejszych własności algebr reprezentowalnych, które pokazywałem kiedyś i teraz nie będę już dowodził.

- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr reprezentowalnych jest reprezentowalny,
- jeśli R nie ma ACC na prawostronne/lewostronne anihilatory, to nie może być reprezentowalny,

[1] Algebra może być nieskończone generowana jako C-moduł, a być skończenie generowana jako algebra nad C - na przykład $C[x]$. Oczywiście także algebry nieskończenie generowane mogą być reprezentowalne.

Duże twierdzenia związane z reprezentowalnością.

- Skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (repr. regularna).
- (Malcev, 1943) Każda afiniczna algebra przemienna jest reprezentowalna.
- (Amitsur, 1952) Każda półpierwsza PI-algebra jest reprezentowalna. Kaplansky postawił hipotezę, że można zrezygnować z półpierwszości, która została obalona.
- (Drazin, Cohn. 1961) algebra zewnętrzna nieskończenie wymiarowej przestrzeni nad ciałem charakterystyki 0 spełnia $[x, [y, z]] = 0$, ale nie spełnia żadnej tożsamości standardowej. Nie każda PI-algebra jest reprezentowalna.
- (Formanek, Razmysłow, 1972-1973) Każda pierwsza PI-algebra posiada pierścień klasycznych ułamków izomorficzny z macierzami nad algebrą z dzieleniem, która ma skończony wymiar nad swoim centrum.
- (Irwing, 1981) Istnieją algebry o liniowym wzroście i PI, które nie są reprezentowalne.
- (Ananin, 1992) Afiniczne lewostronnie noetherowskie PI-algebry są reprezentowalne.

Przypomnijmy też, że dwa główne problemy otwarte w teorii algebr reprezentowalnych są:

- Czy każda skończenie prezentowalna PI algebra nad ciałem jest reprezentowalna?
- Czy każda jednostronnie noetherowska PI algebra jest reprezentowalna?

Więcej o tych rezultatach i ich współczesnych wzmocnieniach przeczytać można w pozycjach podanych w bibliografii. Celem tego referatu jest opowiedzenie nieco o tym „jak porządna" może być algebra współczynników afinicznej algebry reprezentowalnej. Nie jest to zagadnienie nowe, ale w pierwszej połowie roku pojawiła się w archiwum preprintów praca Martina Lorenza, znanego specjalisty w zakresie reprezentowalności, pod tytułem *A note on afiine representable algebras*. Porządkuje ona szereg klasycznych znanych wyników i podaje pewne nowe dowody. Jej dwa główne rezultaty są następujące.

Twierdzenie 1. *Każda afiniczna reprezentowalna F-algebra A ma algebrę współczynników równą $F[x_1, \ldots, x_n]$, dla pewnego n. Dokładniej, jeśli C jest jakąkolwiek afiniczną algebrą współczynników algebry A, można przyjąć, że $n = \mathrm{GKdim}\, C$.*

Twierdzenie 2. *Niech R będzie afiniczną reprezentowalną k-algebrą. Istnieje wówczas afiniczna przemienna algebra D nad ciałem K o tym samym wzroście, co R. W szczególności, wymiar Gelfanda-Kiryłowa algebry R jest liczbą całkowitą.*

Pierwszy z rezultatów może być, według Lorenza, folklorem. Jak zobaczymy uzasadnienie korzysta ze stosunkowo standardowych pomysłów. Drugi rezultat to rozwinięcie wyniku znanego jako tw. Markowa. Praca Markowa z końcówki lat 80' była w istocie dwustronicowym, nieopublikowanym manuskryptem, przekazanym Lorenzowi przez L. Smalla w 1991 roku. Po dopracowaniu szczegółów, wynik został opublikowany w książce Krausego i Lenagana (wydanej w 2000 roku), jako podrozdział 12.10. Zaprezentowane tu argumenty idą właściwie tą samą linią. Poniższa prezentacja jest krótkim szkicem najważniejszych idei w dowodach.

Rozważmy dowolną skończenie wymiarową podprzestrzeń V algebry A, która generuje A, czyli na przykład $V = span\{a_1, \ldots, a_n\}$. Niech:

$$V^0 = F, \quad \ldots, \quad V^k = span_F\{a_{i_1} \ldots a_{i_k} \,|\, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Definicja 2. *Niech A będzie algebrą, zaś V dowolną skończenie wymiarową podprzestrzenią generującą A. Niech*

$$A_n = V^0 + V^1 + \ldots + V^n,$$

gdzie $n \geqslant 0$. Wówczas:

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

oraz A jest sumą mnogościową wszystkich A_i. Określamy $d_V : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, gdzie:

$$d_V(n) = \dim_F(A_n)$$

jako funkcję wzrostu odpowiadającą przestrzeni V. Jest to funkcja niemalejąca.

Definicja 3. *Niech Φ będzie rodziną niemalejących funkcji $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Wprowadzamy relację na Φ: jeśli $f, g \in \Phi$, to*

$$f \leqslant^* g \Leftrightarrow \exists_{c,m \in \mathbb{N}}\ f(n) \leqslant cg(mn), \text{ dla prawie wszystkich } n.$$

oraz $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \leqslant^* g$ oraz $g \leqslant^* f$.

Łatwo pokazać, że $\sim$ jest relacją równoważności na Φ. Elementy $\Phi/\sim$ nazywamy wzrostami funkcji z Φ. Klasa f to $G(f)$.

Przykład. Niech A będzie algebrą skończenie wymiarową. Wówczas możemy przyjąć $V = A$. Stąd funkcja $d_V(n)$ jest stała. Zatem wzrost algebry skończenie wymiarowej jest stały.

Przykład. Niech A będzie algebrą wolną o dwóch generatorach równą $K\langle x, y\rangle$. Rozważmy zbiór $Z = \{1, x, y\} \subseteq \langle x, y\rangle$ zawarty w monoidzie wolnym o dwóch generatorach. Wówczas $d_Z(n)$ to liczba słów długości co najwyżej n w tym monoidzie. Jest ich $2^{n+1} - 1$. Zatem $d_Z(n) = 2^{n+1} - 1$.

Uwaga 2. *Niech $B \subseteq A$ będzie podalgebrą taką, że A jest skończenie generowanym (lewostronnym) A-modułem. Wówczas $GKdim(A) = GKdim(B)$.*

Uwaga 3. *Niech A będzie algebrą, zaś $C \subseteq Z(A)$. Przypuśćmy, że C jest multiplikatywnie zamknięty oraz, że C składa się z samych elementów regularnych (nie będących dzielnikami 0). Wtedy istnieje tzw. centralna lokalizacja R względem C, ozn. R_C albo RC^{-1} złożony z elementów ac^{-1}, przy pewnych utożsamieniach. Mamy wtedy $GKdim(R_C) = GKdim(R)$.*

Uwaga 4. *Niech $S \subseteq Z(A)$, przy czym S jest multiplikatywnie zamknięty oraz zawiera jedynie elementy regularne. Wówczas $GKdim(AS^{-1}) = GKdim(A)$.*

Jeśli lokalizacja jest niecentralna, to nie jest prawda. Jeśli weźmiemy A_1 – pierwszą algebrę Weyla. Można sprawdzić, że wymiar A_1 to 2, a ułamki nad nią mają wymiar nieskończony, co więcej zawierają algebrę wolną nieprzemiennych zmiennych.

Uwaga 5. *(Wniosek z tw. Posnera) $GKdim(A) = GKdim(Z(A)) \in \mathbb{N}$, jeśli A jest skończenie generowaną PI algebrą pierwszą.*

Głównym pytaniem w teorii wymiaru Gelfanda-Kiryłowa jest pytanie o to czy algebry noetherowskie mogą mieć niecałkowity skończony wymiar Gelfanda-Kiryłowa?

$$* \quad * \quad *$$

Ważne twierdzenia i definicje do ciągu dalszego.

Twierdzenie 3 (Noether o normalizacji)**.** *Niech R będzie dziedziną, skończenie generowaną jako algebra nad ciałem K. Wtedy istnieją $x_1, \ldots, x_n \in R$ takie, że $K[x_1, \ldots, x_n]$ (czyli najmniejszy pierścień zawierający: K, elementy x_i oraz 1) jest zawarty w R, przy czym R jest skończenie generowanym $K[x_1, \ldots, x_n]$-modułem, oraz $K[x_1, \ldots, x_n]$ jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów, tzn. $x_1, \ldots, x_n$ są algebraicznie niezależne nad K.*

Twierdzenie 4 (Lemat Artina-Tate'a)**.** *Niech A będzie przemiennym pierścieniem noetherowskim oraz niech $B \subseteq C$ będą przemiennymi algebrami nad A. Jeśli C jest skończenie generowaną algebrą nad A oraz C jest skończenie generowanym modułem nad B, to B jest skończenie generowaną algebrą nad A.*

Twierdzenie 5 (Posner)**.** *Jeśli A jest skończenie generowaną algebrą PI, pierwsza, to $Z(A) \setminus \{0\}$ jest multiplikatywnie zamknięty zbiór składający się z elementów regularnych w A. Zatem $A \subseteq AS^{-1}$. Co więcej, $AS^{-1} \simeq M_n(D)$, gdzie D jest dziedziną o skończonym wymiarze nad swoim centrum (równym notabene $Z(A)S^{-1}$.)*

Definicja 4. *Niech A będzie K-algebrą, która jest wolna rangi skończonej nad pewną podalgebrą C zawartą w centrum A. Dla każdego $a \in A$ niech $p_a(t) \in C[t]$ oznacza wielomian charakterystyczny macierzy $\rho \cdot a$, gdzie ρ jest reprezentacją regularną. Mamy więc:*

$$\rho : A \mapsto End_C(A) \simeq M_n(C), \quad (\rho a)b = ab.$$

Niech R będzie afiniczną K-algebrą wraz z włożeniem $R \to A$ i niech

$$T = T_{A/C}(R) \subseteq C,$$

będzie K-algebrą, która jest generowana przez współczynniki wszystkich $p_r(t)$, gdzie $r \in R$. Podalgebra A generowana przez R oraz T nazywana jest charakterystycznym domknięciem R nad C i jest równa $TR \subseteq A$.

Definicja 5. *Pierścień nazywamy lokalnym, jeśli ma jednoznacznie wyznaczony lewostronny lub prawostronny ideał maksymalny. Pierścień jest pierwszy, jeśli dla dowolnych ideałów A, B tego pierścienia z $AB = 0$ wynika, że $A = 0$ lub $B = 0$. Jest półpierwszy, jeśli z $A^2 = 0$ wynika, że $A = 0$.*

Definicja 6. *Dla lokalnego pierścienia noeherowskieego R, skończenie generowany R-moduł $M \neq 0$ nazywamy modułem Cohena-Macaulaya, jeśli długość najdłuższego ciągu regularnego równa jest wymiarowi Krulla R. Ciąg regularny $r_1, \ldots, r_n$ to taki ciąg, że r_i nie jest dzielnikiem zera na $M(r_1, \ldots, r_{i-1})$ (czyli rm = 0 implikuje $r = 0$, dla każdego m).*

$$* \quad * \quad *$$

Szkic uzasadnienia twierdzenia 1. Niech R będzie afiniczną reprezentowalną F-algebrą. Ustalmy jej zanurzenie $R \to M_d(C)$, gdzie C jest przemienną afiniczną algebrą (patrz argument z dowodu uwagi), a więc też noetherowską.

Przypadek 1. Załóżmy, że w C dowolne dwa niezerowe ideały mają niezerowe przecięcie. Wówczas:

- Każdy nie-nilpotetny element $r \in C$ jest regularny, czyli jest niezerowym nie-dzielnikiem zera. Rzeczywiście, z noetherowskości C mamy: $ann_C(r^l) = ann_C(r^{l+1}) = \ldots$, dla pewnego l, a więc $ann_R(r^l) \cap r^l R = 0$, co oznacza, że $0 = ann_R(r^l) \subseteq ann_R(r)$.
- Zgodnie z twierdzeniem Noether o normalizacji, R jest skończenie generowanym modułem nad pewną wielomianową podalgebrą P'.
- Wszystkie niezerowe elementy w P' są regularne w R (zgodnie z pierwszym punktem). W szczególności R wkłada się w algebrę $R_f = R[f^{-1}]$, czyli w lokalizację względem $\{f^n, n \geqslant 1\}$.
- Korzystamy z Lematu Grothendiecka (Generic Freeness Lemma), który mówi, że możemy dobrać f tak, by R_f był wolnym $P'_f = P'[f^{-1}]$-modułem (skończonej rangi).[2]
- Okazuje się, że algebra P'_f jest afiniczną algebrą Cohena-Macaulaya, czyli pierścieniem, gdzie „głębokość” równa jest wymiarowi Krulla. Noetherowski pierścień lokalny jest C-M, jeśli najdłuższy możliwy ciąg regularny (wszystkie mają tę samą długość) ma taką długość, jak wymiar Krulla. Dowolny pierścień noetherowski jest C-M, gdy każdy jego maksymalny ideał jest. I jest twierdzenie, które mówi, że taka algebra C-M jest modułem wolnym skończonej rangi nad pewną algebrą wielomianową $P \subseteq P'_f$. A więc R_f też jest wolny skończonej rangi nad P.
- Regularna reprezentacja zanurza R_f w macierze nad P i stąd R również zanurza się w te macierze.

Przypadek 2. Załóżmy, że w C są niezerowe ideały, które przecinają sie na zerze. Wówczas przez „indukcję noetherowską” pokazuje się, że rodzina ideałów I_j w C o własnościach:

- $\bigcap I_j = 0$,
- dowolne dwa niezerowe ideały każdego z $C_j = C/I_j$ mają niezerowe przecięcie,

jest skończona. W takim przypadku na mocy przypadku powyżej każda z C_j wkłada się w algebrę macierzy nad wielomianami P_j. Całe C możemy zrealizować jako produkt podprosty C_j, który zanurza się w produkt $M_{n_j}(P_j)$, który można diagonalnie zanurzyć w pojedyncze macierze wielomianowe. A zatem oryginalne zanurzenie R w $M_n(C)$ przedłuża się do odpowiedniego zanurzenia w $M_m(P)$.

Przejdźmy do omówienia dowodu drugiego twierdzenia. Mamy zatem afiniczną F-algebrę R reprezentowalną i chcemy znaleźć przemienną, skończenie generowaną algebrę D o tym samym wzroście. To oczywiście będzie pociągało za sobą fakt, że wymiar Gelfanda-Kiryłowa

[2] Lemat ten mówi, że jeśli A jest noetherowską dziedziną oraz M jest skończenie generowanym A-modułem, to istnieje niezerowe $f \in A$ takie, że M_f jest wolnym A_f-modułem. W naszym przypadku korzystamy z tego twierdzenia dla pierścienia wielomianów P'.

F-algebry R jest liczbą całkowitą. Idea jest taka, by w kilku krokach zastąpić R przez algebry o tym samym wzroście spełniające coraz lepsze warunki, aż dotrzemy do szukanej algebry D. W oryginalnym podejściu Lorentza postępowanie jest nieco mniej delikatne: nabudowujemy nad R nieco za dużą algebrę a w niej znajdujemy już odpowiednią algebrę przemienną. W nowej pracy algebrę tę konstruuje się bezpośrednio.

Na początku utożsamiamy R ze swoim obrazem w $M_d(K)$ oraz utożsamiamy K z centrum $M_d(K)$. Niech A będzie podalgebrą $M_d(K)$ generowaną przez R oraz K. Algebra A jest skończenie wymiarowa nad K i

$$R \subseteq A = KR.$$

Wykonamy pierwszy krok. Na mocy twierdzenia Wedderburna-Malceva, mamy izomorfizm przestrzeni liniowych:

$$A \simeq \overline{A} \oplus J(A),$$

gdzie $\overline{A}$ jest półprostą podalgebrą A oraz $J(A)$ to radykał A. Chcemy rozszerzyć R w taki sposób, aby uzyskać podobny rozkład (tu oczywiście nie będzie części półprostej, tylko półpierwsza), nie zmieniając wymiaru G-K. Następny lemat pokaże, że jest to możliwe.

Lemat 1. *Jeśli $x \in J(B)$, to $GKdim(R[x]) = GKdim(R)$.*

Dowód. Skoro $A = KR$, to możemy zapisać $x = \sum_{i=1}^{l} h_i x_i$, gdzie $x_i \in R$ oraz $h_i \in K$. Połóżmy:

$$V := F + \sum_{j=1}^{t} Fa_j + \sum_{i=1}^{l} Fx_i \subseteq R, \quad W := V + Fx \subseteq R[x]$$

w taki sposób, że V oraz W są przestrzeniami liniowymi nad F generującymi odpowiednio A oraz $A[x]$. Wybierzmy takie d, że $J(A)^d = 0$ oraz $J(A)^{d-1} \neq 0$. Wówczas każdy niezerowy monomian $\mu \in W^n$ ma postać:

$$\mu_0 x \mu_1 x \cdots x \mu_{f-1} x \mu_f, \quad \mu_i \in V_{n_i},$$

przy czym

$$\sum_{i=0}^{f} n_i = n - f$$

oraz $f < d$, ponieważ d pojawień się x sprawiłoby, że cały element wynosi 0. Wstawiając do wyrażenia wyżej $x = \sum_{i=1}^{l} h_i x_i$ dostajemy:

$$\mu = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_f \leqslant l} h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_f} \mu_0 x_{i_1} \mu_1 x_{i_2} \ldots \mu_{f-1} x_{i_f} \mu_f,$$

i skoro każdy x_{i_j} należy do V, to

$$\mu_0 x_{i_1} \mu_1 x_{i_2} \ldots \mu_{f-1} x_{i_f} \mu_f \in V^n.$$

Niech Y oznacza skończenie wymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez wszystkie iloczyny

$$h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_f} \quad f < d.$$

Widzimy, że $W^n \subseteq YV^n$ i stąd:

$$\dim(W^n) \leqslant \dim(Y) \dim(V^n).$$

A zatem dostajemy wynik, bo V jest przestrzenią generującą w A. $\square$

Weźmy teraz skończony zbiór generatorów r_i algebry R i zapiszmy je w postaci: $r_i = \overline{r_i} + n_i$, dla pewnych $\overline{r_i} \in \overline{A}$ oraz $n_i \in J(B)$. Połóżmy:

$$S = R[n_1, \ldots, n_t] = F[\overline{r_1}, \ldots, \overline{r_t}, n_1, \ldots, n_t].$$

Mamy zatem $GKdim(S) = GKdim(A)$, na mocy poprzedniego lematu.

Przyjrzyjmy się otrzymanej algebrze. Kładąc

$$\overline{S} = F[\overline{r_1}, \ldots, \overline{r_t}]$$

mamy $\overline{S} \subseteq \overline{R}$ oraz $S = \overline{S} \oplus (J(A) \cap S)$. Skoro $A = KS$, to mamy $\overline{B} = K\overline{S}$, więc $\overline{S}$ jest półpierwsza, skoro $\overline{B}$ jest półprosta. Wynika stąd, że $J(B) \cap S$ jest radykałem pierwszym S. Możemy zastąpić R przez S i założyć, że:

$$R = F[\overline{r_1}, \ldots, \overline{r_t}, n_1, \ldots, n_t] = \overline{R} \oplus J(R) \subseteq M_n(K),$$

przy czym $\overline{R} = F[\overline{r_1}, \ldots, \overline{r_t}]$ oraz $K\overline{R}$ są półproste. Rozłóżmy

$$K\overline{R} = R_1 \times \ldots \times R_s, \quad R_i \simeq M_{n_i}(K)$$

i niech $e_i = e_i^2$ oznacza element neutralny R_i. Wiadomo, że $\overline{R}e_i$ jest afiniczną F-podalgebrą R_i, która jest również pierwsza, skoro $K\overline{R}e_i = R_i$. Niech T_i oznacza charakterystyczne domknięcie (trace ring) algebry $\overline{R}e_i$. Co to takiego?

Definicja 7. *Niech A będzie K-algebrą, która jest wolna rangi skończonej nad pewną podalgebrą C zawartą w centrum A. Dla każdego $a \in A$ niech $p_a(t) \in C[t]$ oznacza wielomian charakterystyczny macierzy $\rho \cdot a$, gdzie ρ jest reprezentacją regularną. Mamy więc:*

$$\rho : A \mapsto End_C(A) \simeq M_n(C), \quad (\rho a)b = ab.$$

Niech R będzie afiniczną K-algebrą wraz z włożeniem $R \to A$ i niech

$$T = T_{A/C}(R) \subseteq C,$$

będzie K-algebrą, która jest generowana przez współczynniki wszystkich $p_r(t)$, gdzie $r \in R$. Podalgebra A generowana przez R oraz T nazywana jest charakterystycznym domknięciem R nad C i jest równa $TR \subseteq A$.

A zatem wykonujemy domknięcie R_e nad K_e w A_e, ozn.

$$T_e = T_{A_e}/K_e.$$

Czym jest to domknięcie? Wiadomo, że T_i jest pierwszą algebrą afiniczną, będącą skończonym modułem nad swoim centrum. Określamy T jako podalgebrę KR postaci:

$$T = F[T_1, \ldots, T_s, n_1, \ldots, n_t].$$

Mamy też rozkład:

$$T = \overline{T} \oplus J(T),$$

gdzie $\overline{T} = F[T_1, \ldots, T_s] \subseteq K \cdot \overline{A}$ jest półpierwsza, ponieważ $K\overline{T} = K\overline{A}$ oraz $J(T)$ jest nilpotentny. Co więcej, można pokazać:

Lemat 2. *Niech A i T będą jak wyżej. Wówczas:*

- *$\overline{T}$ jest skończenie generowanym modułem nad swoim centrum (jasne, bo każdy z T_i jest),*
- *$GKdim(T) = GKdim(A)$.*

Do wykonania kolejnych kroków kolejne będzie wprowadzenie pewnych klas rozszerzeń. W tym miejscu przedstawimy jedynie definicje, odsyłając Czytelnika do źrodłowej pracy.

Lemat 3. *Niech S oraz T będą F-algebrami.*

(a) Jeśli bimoduł ${}_SM_T$ ma tę własność, że ${}_SM$ jest wierny oraz M_T jest skończenie generowany, to $S \preceq T$.

(b) Jeśli $T \subseteq S$ oraz S jest skończenie generowany jako lewostronny lub prawostronny T-moduł, to $S \equiv T$.

Dowód. Ustalmy skończony zbiór generatorów $m_1, \ldots, m_r$ modułu M_T i rozważmy przekształcenie $\mu : S \to M^r$ zadane wzorem:

$$s \mapsto (sm_1, sm_2, \ldots, sm_r).$$

Jest to włożenie, ponieważ ${}_SM$ jest wierny. Niech $X \subseteq S$ będzie skończonym podzbiorem i dla $s \in X$ połóżmy:

$$sm_j = \sum_i m_i t_{ij}(s), \qquad \text{gdzie } t_{ij}(s) \in T.$$

Biorąc $Y = \{t_{ij}(s), s \in X,\}$ oraz $Z = \sum_j Fm_j$ otrzymujemy:

$$\mu(X^{(n)}) \subseteq (ZY^{(n)})^r,$$

dla wszystkich n. Zatem $\dim X^{(n)} \leqslant r^2 \dim Y^{(n)}$, co oznacza, że $S \preceq T$.

Pokazaliśmy (a) i teraz (b) jest łatwym wnioskiem. Mamy oczywiście $T \preceq S$, natomiast $S \preceq T$ dostajemy kładąc w (a) $M = S$. □

Definicja 8. *Rozszerzenie $S \subseteq U$ algebr nad F nazywamy* ***centralizującym****, jeśli $U = C_U(S)S$, gdzie*

$$C_U(S) = \{u \in U \mid su = us, \forall_{s \in S}\}$$

nazywany centralizatorem S w U. Każde podrozszerzenie $S \subseteq T$, gdzie $T \subseteq U$ nazywamy ***podcentralizującym****. Dla skończonego podzbioru X w U przez $S[X]$ oznaczamy podalgebrę U generowaną przez S oraz X.*

Lemat 4. *Niech $S \subseteq T \subseteq U$ będą F-algebrami, przy czym $S \subseteq U$ jest centralizujące oraz $T = S[X]$. Wówczas każdy z poniższych warunków implikuje $S \equiv T$:*

- *$cX \subseteq S$ oraz $(c - d)X = 0$, dla pewnego $d \in S, c \in C_U(S)$ oraz c regularnego w U (w szczególności mamy znany fakt: centralne lokalizacje $S \equiv S[X^{-1}]$, gdzie $X \subset ZS$ jest podzbiorem złożonym z elementów regularnych w S),*
- *$(XS)^m = 0$, dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m,*
- *$\dim F[X] < \infty$ oraz $S = F[N \cup Y]$, gdzie $(NT)^m = 0$ oraz $sx = xs$, dla każdego $s \in Y$, $x \in X$.*

Literatura

[1] Lorenz M.: *A note on afiine representable algebras*, `https://arxiv.org/abs/2104.14488v3`.

[2] Kanel-Belov A., Karasik Y., Rowen L. H.: *Computational Aspects of Polynomial Identities. Volume l,* CRC Press, 2016.

[3] Krause G.R., Lenagan T.H.: *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, Revised edition, Grad. Stud. Math. 22, 2000, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[4] Okniński J.: *Faithful representations of algebras and semigroups*, Semigroup Representations, ICMS, Edinburgh, April 2013.