ALGEBRY REPREZENTOWALNE

Seminarium Badawcze Zakładu Algebry

Arkadiusz Męcel, 19.11.2020 r.

Oznaczenia:

- C – pierścień przemienny, F - ciało,
- R – algebra łączna z 1 nad C,
- algebra skończenie generowana – jako C-algebra,
- algebra afiniczna – skończenie generowana nad ciałem.

Oznaczenia:

- C – pierścień przemienny, F - ciało,
- R – algebra łączna z 1 nad C,
- algebra skończenie generowana – jako C-algebra,
- algebra afiniczna – skończenie generowana nad ciałem.

Definicja

Mówimy, że C-algebra R jest

- **słabo reprezentowalna**, jeśli R można zanurzyć w algebrę macierzy $M_n(K)$, gdzie K jest przemienną C-algebrą, dla pewnego n,

Oznaczenia:

- C – pierścień przemienny, F - ciało,
- R – algebra łączna z 1 nad C,
- algebra skończenie generowana – jako C-algebra,
- algebra afiniczna – skończenie generowana nad ciałem.

Definicja

Mówimy, że C-algebra R jest

- **słabo reprezentowalna**, jeśli R można zanurzyć w algebrę macierzy $M_n(K)$, gdzie K jest przemienną C-algebrą, dla pewnego n,
- **reprezentowalna**, jeśli R jest słabo reprezentowalna oraz K jest ciałem,

Oznaczenia:

- C – pierścień przemienny, F - ciało,
- R – algebra łączna z 1 nad C,
- algebra skończenie generowana – jako C-algebra,
- algebra afiniczna – skończenie generowana nad ciałem.

Definicja

Mówimy, że C-algebra R jest

- **słabo reprezentowalna**, jeśli R można zanurzyć w algebrę macierzy $M_n(K)$, gdzie K jest przemienną C-algebrą, dla pewnego n,
- **reprezentowalna**, jeśli R jest słabo reprezentowalna oraz K jest ciałem,
- **silnie reprezentowalna**, jeśli jest reprezentowalna nad $K = S^{-1}Z$, dla pewnej centralnej C-podalgebry Z w R oraz pewnego podzbioru multyplikatywnego S w Z, przy czym $S^{-1}R$ jest sk. wymiarowa nad K.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Twierdzenie (Greenfeld, Rowen, Small - 2020)

Każda prawostronnie i lewostronnie noetherowska PI-algebra zawierająca ciało jest słabo reprezentowalna.

Źródła:

- B. Greenfeld, L. Rowen, L. Small, ***Noetherian PI-algebras are representable***, ArXiV (2020): `arxiv.org/pdf/2008.11041.pdf`.
- L. Rowen, L. Small, ***Representability of algebras finite over their centers***, J. Algebra 442 (2015), 506–524.
- J. Farina, ***Stability Properties in Ring Theory***, University of California, San Diego (2006).
- A. Belov, Y. Karasik, L.H. Rowen, ***Computational Aspects of Polynomial Identities, Volume 1: Kemer's Theorems, 2nd Edition***, CRC Press 2016.
- L. Rowen, ***Graduate Algebra: Noncommutative View***, Graduate Studies in Mathematics 91, AMS 2006.

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)

  Przypomnienie: R jest iloczynem podprostym pierścieni $(R_i)_{i\in I}$ gdy istnieje włożenie

  $$\phi : R \hookrightarrow \prod_{i\in I} R_i$$

  takie, że $\pi_i\phi(R) = R_i$, gdzie π_i to naturalne rzutowanie,

  To jest to samo, co powiedzieć, że istnieje rodzina ideałów $J_i \lhd R$, że

  $$\bigcap_{i\in I} J_i = 0 \text{ oraz } R_i \simeq R/J_i.$$

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)

  Uzasadnienie: mamy $R/A_i \hookrightarrow W_i = M_{n_i}(K_i)$, dla $1 \leq i \leq t$ oraz $\bigcap\limits_{i=1}^{t} A_i = 0$.

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)

  Uzasadnienie: mamy $R/A_i \hookrightarrow W_i = M_{n_i}(K_i)$, dla $1 \leq i \leq t$ oraz $\bigcap_{i=1}^{t} A_i = 0$.

  A zatem
  $$R \hookrightarrow \prod_{i=1}^{t} R/A_i \hookrightarrow \prod_{i=1}^{t} W_i \hookrightarrow M_n\left(\prod_{i=1}^{t} K_i\right),$$
  gdzie n = $NWW\{n_i, 1 \leq i \leq t\}$.

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny

Przypomnienie: jeśli $F_1, \ldots, F_m$ są ciałami zawierającymi wspólne podciało F oraz ideał maksymalny P w iloczynie tensorowym:

$$\widetilde{F} = F_1 \otimes_F K_2 \otimes_F \cdots \otimes_F F_m$$

wówczas iloraz $F = \widetilde{F}/P$ jest ciałem zwanym **ciałem kompozytowym.** Naturalne homomorfizmy $F_i \to \widetilde{F} \to F$ są injekcjami.

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny
- jeśli R nie ma ACC na prawostronne/lewostronne anihilatory, to nie może być reprezentowalna,

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny
- jeśli R nie ma ACC na prawostronne/lewostronne anihilatory, to nie może być reprezentowalna, ponieważ własność tą ma każda algebra noetherowska $M_r(F)$, gdzie F – ciało, i każda jej podalgebra.

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny
- jeśli R nie ma ACC na prawostronne/lewostronne anihilatory, to nie może być reprezentowalna, np. produkt prosty:

$$\prod_{m\in\mathbb{N}} F[\lambda]/(\lambda^m).$$

Kilka oczywistych uwag:

- każda dziedzina całkowitości jest reprezentowalna,
- każda skończenie wymiarowa algebra R nad ciałem jest reprezentowalna (reprezentacja regularna),
- każda podalgebra algebry reprezentowalnej jest reprezentowalna
- każdy skończony produkt podprosty R algebr słabo reprezentowalnych (odpowiednio względem pierścieni przemiennych K_i) jest słabo reprezentowalny (względem produktu prostego pierścieni K_i)
- jeśli $R_1, \ldots, R_m$ są F-algebrami reprezentowalnymi (F – ciało), to ich skończony produkt podprosty jest reprezentowalny
- jeśli R nie ma ACC na prawostronne/lewostronne anihilatory, to nie może być reprezentowalna,
- jeśli R ma ACC na ideały dwustronne, to jest produktem podprostym algebr nierozkładalnych (przecięcie niezerowych ideałów jest niezerowe).

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).
2. Przemienny pierścień artinowski jest skończoną sumą prostą przemiennych lokalnych pierścieni artinowskich.

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).
2. Przemienny pierścień artinowski jest skończoną sumą prostą przemiennych lokalnych pierścieni artinowskich.
3. Przemienna lokalna k-algebra artinowska R jest reprezentowalna.

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).
2. Przemienny pierścień artinowski jest skończoną sumą prostą przemiennych lokalnych pierścieni artinowskich.
3. Przemienna lokalna k-algebra artinowska R jest reprezentowalna.

   Wyjaśnienie: jeśli J to ideał maksymalny w R, to na mocy tw. Cohena (1946) pierścień R zawiera podciało K izomorficzne z R/J.

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).
2. Przemienny pierścień artinowski jest skończoną sumą prostą przemiennych lokalnych pierścieni artinowskich.
3. Przemienna lokalna k-algebra artinowska R jest skończenie wymiarowa.

Wyjaśnienie: jeśli J to ideał maksymalny w R, to na mocy tw. Cohena (1946) pierścień R zawiera podciało K izomorficzne z R/J. Ideał J jest nilpotentny, powiedzmy indeksu r, więc mamy:

$$R \supsetneq J \supsetneq J^2 \supsetneq \cdots \supsetneq J^r = 0.$$

Twierdzenie (Malcev, 1943)

Każda skończenie generowana algebra przemienna jest reprezentowalna.

1. Każdy przemienny pierścień noetherowski zanurza się w przemienny pierścień artinowski (ważne uogólnienie na później - tw. Gordona).
2. Przemienny pierścień artinowski jest skończoną sumą prostą przemiennych lokalnych pierścieni artinowskich.
3. Przemienna lokalna k-algebra artinowska R jest skończenie wymiarowa.

Wyjaśnienie: jeśli J to ideał maksymalny w R, to na mocy tw. Cohena (1946) pierścień R zawiera podciało K izomorficzne z R/J. Ideał J jest nilpotentny, powiedzmy indeksu r, więc mamy:

$$R \supsetneq J \supsetneq J^2 \supsetneq \cdots \supsetneq J^r = 0.$$

R jest artinowski, więc J^i/J^{i+1} to skończenie generowany R/J-moduł, czyli algebra skończenie wymiarowa nad K.

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?
- **(1948) Kaplansky** – afiniczna algebraiczna PI-algebra jest sk. wymiarowa (bez afiniczności – Shirshov, 1957), prymitywna PI-algebra jest skończenie wymiarowa nad swoim centrum,

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?
- **(1948) Kaplansky** – afiniczna algebraiczna PI-algebra jest sk. wymiarowa (bez afiniczności – Shirshov, 1957), prymitywna PI-algebra jest skończenie wymiarowa nad swoim centrum,
- **(1952) Amitsur** – każda półpierwsza PI-algebra jest reprezentowalna.

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?
- **(1948) Kaplansky** – afiniczna algebraiczna PI-algebra jest sk. wymiarowa (bez afiniczności – Shirshov, 1957), prymitywna PI-algebra jest skończenie wymiarowa nad swoim centrum,
- **(1952) Amitsur** – każda półpierwsza PI-algebra jest reprezentowalna.
- **(1957) Amitsur** – radykał Jacobsona sk. generowanej PI algebry jest nil.

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?
- **(1948) Kaplansky** – afiniczna algebraiczna PI-algebra jest sk. wymiarowa (bez afiniczności – Shirshov, 1957), prymitywna PI-algebra jest skończenie wymiarowa nad swoim centrum,
- **(1952) Amitsur** – każda półpierwsza PI-algebra jest reprezentowalna.
- **(1957) Amitsur** – radykał Jacobsona sk. generowanej PI algebry jest nil.
- **(1957) Kaplańsky** – Czy każda PI algebra jest reprezentowalna?

Fakt (wniosek z tw. Amitsura-Levitzkiego z 1950 r.)

Każda algebra słabo reprezentowalna jest PI, bo dla każdej algebry przemiennej A pierścień $M_n(A)$ spełnia tożsamość:

$$s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{2n,\sigma(2n)} = 0.$$

- **(1941) Problem Kurosha** – Niech R będzie skończenie generowaną algebrą afiniczną taką, że R jest algebraiczna. Czy R jest skończenie wymiarowa?
- **(1948) Kaplansky** – afiniczna algebraiczna PI-algebra jest sk. wymiarowa (bez afiniczności – Shirshov, 1957), prymitywna PI-algebra jest skończenie wymiarowa nad swoim centrum,
- **(1952) Amitsur** – każda półpierwsza PI-algebra jest reprezentowalna.
- **(1957) Amitsur** – radykał Jacobsona sk. generowanej PI algebry jest nil.
- **(1957) Kaplańsky** – Czy każda PI algebra jest reprezentowalna?
- **(1961) Drazin, Cohn** – algebra zewnętrzna nieskończenie wymiarowej przestrzeni nad ciałem charakterystyki 0 spełnia $[x,[y,z]] = 0$, ale nie spełnia żadnej tożsamości standardowej.

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman –** istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman –** istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.
- (**1974) Levin –** istnieje nieprzeliczalnie wiele algebr afinicznych, które spełniają wszystkie tożsamości $M_3(\mathbb{Q})$, ale nie są reprezentowalne (ani nie są noetherowskie).

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman** – istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.
- (**1974) Levin** – istnieje nieprzeliczalnie wiele algebr afinicznych, które spełniają wszystkie tożsamości $M_3(\mathbb{Q})$, ale nie są reprezentowalne (ani nie są noetherowskie).
- **(1982) Braun** – radykał Jacobsona afinicznej PI algebry jest nilpotentny.

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman** – istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.
- (**1974) Levin** – istnieje nieprzeliczalnie wiele algebr afinicznych, które spełniają wszystkie tożsamości $M_3(\mathbb{Q})$, ale nie są reprezentowalne (ani nie są noetherowskie).
- **(1982) Braun** – radykał Jacobsona afinicznej PI algebry jest nilpotentny.
- **(1983) Irwing** – istnieją algebry o liniowym wzroście i PI, które nie są reprezentowalne (mają acc na anihilatory), spełniając tożsamości $M_n(F)$.

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman** – istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.
- (**1974) Levin** – istnieje nieprzeliczalnie wiele algebr afinicznych, które spełniają wszystkie tożsamości $M_3(\mathbb{Q})$, ale nie są reprezentowalne (ani nie są noetherowskie).
- **(1982) Braun** – radykał Jacobsona afinicznej PI algebry jest nilpotentny.
- **(1983) Irwing** – istnieją algebry o liniowym wzroście i PI, które nie są reprezentowalne (mają acc na anihilatory), spełniając tożsamości $M_n(F)$.
- **(1987) Irwing, Small** – pierścień $K\langle x, y\rangle/(x^2, yxy)$ jest słabo reprezentowalny (do $M_2(K[t])$), ale ma niereprezentowalne obrazy homomorfizczne postaci R/I, gdzie $I = (xy^ix : i \in J)$, gdzie J są pewnymi podzbiorami $\mathbb{N}$.

Historia (w dużym skrócie).

- (**1970) Bergman** – istnieje skończony pierścień (nie zawierający ciała), który nie jest słabo reprezentowalny:

$$R = Hom_{\mathbb{Z}}(G, G), \text{ gdzie } G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2},$$

  gdzie p-pierwsza.
- (**1974) Levin** – istnieje nieprzeliczalnie wiele algebr afinicznych, które spełniają wszystkie tożsamości $M_3(\mathbb{Q})$, ale nie są reprezentowalne (ani nie są noetherowskie).
- **(1982) Braun** – radykał Jacobsona afinicznej PI algebry jest nilpotentny.
- **(1983) Irwing** – istnieją algebry o liniowym wzroście i PI, które nie są reprezentowalne (mają acc na anihilatory), spełniając tożsamości $M_n(F)$.
- **(1987) Irwing, Small** – pierścień $K\langle x, y\rangle/(x^2, yxy)$ jest słabo reprezentowalny (do $M_2(K[t])$), ale ma niereprezentowalne obrazy homomorficzne postaci R/I, gdzie $I = (xy^i x : i \in J)$, gdzie J są pewnymi podzbiorami $\mathbb{N}$.
- (**1987) Kemer** – afiniczne PI algebry nad ciałem char 0 są reprezentowalne.

Twierdzenie (Markov, 1990)

Każda afiniczna algebra reprezenrowalna A ma całkowity wymiar Gelfanda-Kiryłowa.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Twierdzenie (Markov, 1990)

Każda afiniczna algebra reprezenrowalna A ma całkowity wymiar Gelfanda-Kiryłowa.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Pytania otwarte:

1. Załóżmy, że pierścień przemienny C zawiera ciało oraz M jest skończenie generowany nad C. Czy $End_C(M)$ jest słabo reprezentowalny?

Twierdzenie (Markov, 1990)

Każda afiniczna algebra reprezenrowalna A ma całkowity wymiar Gelfanda-Kiryłowa.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Pytania otwarte:

1. Załóżmy, że pierścień przemienny C zawiera ciało oraz M jest skończenie generowany nad C. Czy $End_C(M)$ jest słabo reprezentowalny?
2. Czy każda algebra nad ciałem, skończona (jako moduł) nad swoim centrum, spełniająca ACC na prawostronne anihilatory, lokalna i nierozkładalna taka, że każdy ideał pierwszy jest maksymalny, jest słabo reprezentowalna?

Twierdzenie (Markov, 1990)

Każda afiniczna algebra reprezenrowalna A ma całkowity wymiar Gelfanda-Kiryłowa.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Pytania otwarte:

1. Załóżmy, że pierścień przemienny C zawiera ciało oraz M jest skończenie generowany nad C. Czy $End_C(M)$ jest słabo reprezentowalny?
2. Czy każda algebra nad ciałem, skończona (jako moduł) nad swoim centrum, spełniająca ACC na prawostronne anihilatory, lokalna i nierozkładalna taka, że każdy ideał pierwszy jest maksymalny, jest słabo reprezentowalna?
3. Czy każda skończenie prezentowalna PI algebra nad ciałem jest reprezentowalna?

Twierdzenie (Markov, 1990)

Każda afiniczna algebra reprezenrowalna A ma całkowity wymiar Gelfanda-Kiryłowa.

Twierdzenie (Anan'in 1992)

Każda afiniczna lewostronnie noetherowska PI-algebra jest reprezentowalna.

Pytania otwarte:

1. Załóżmy, że pierścień przemienny C zawiera ciało oraz M jest skończenie generowany nad C. Czy $End_C(M)$ jest słabo reprezentowalny?
2. Czy każda algebra nad ciałem, skończona (jako moduł) nad swoim centrum, spełniająca ACC na prawostronne anihilatory, lokalna i nierozkładalna taka, że każdy ideał pierwszy jest maksymalny, jest słabo reprezentowalna?
3. Czy każda skończenie prezentowalna PI algebra nad ciałem jest reprezentowalna?
4. Czy każda jednostronnie noetherowska PI algebra jest reprezentowalna?

Główne wyniki w ostatnich latach (Rowen, Small, Greenfield):

- (2015) Każda lewostronnie noetherowska algebra nad ciałem F, skończenie generowana jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą, jest reprezentowalna jako F-algebra, jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr,

Główne wyniki w ostatnich latach (Rowen, Small, Greenfield):

- (2015) Każda lewostronnie noetherowska algebra nad ciałem F, skończenie generowana jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą, jest reprezentowalna jako F-algebra, jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr,
- (2015) Jeśli algebra R nad ciałem F jest skończenie prezentowalna jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą Z oraz jeśli R spełnia ACC na anihilatory elementów Z, wówczas R jest reprezentowalna jako F-algebra.

Główne wyniki w ostatnich latach (Rowen, Small, Greenfield):

- (2015) Każda lewostronnie noetherowska algebra nad ciałem F, skończenie generowana jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą, jest reprezentowalna jako F-algebra, jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr,
- (2015) Jeśli algebra R nad ciałem F jest skończenie prezentowalna jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą Z oraz jeśli R spełnia ACC na anihilatory elementów Z, wówczas R jest reprezentowalna jako F-algebra.
- (2015) Jeśli lewostronnie noetherowska PI-algebra R jest skończenie generowana (jako algebra) nad pewną swoją centralną podalgebrą Z oraz Z zawiera ciało F, to R jest reprezentowalna jako F-algebra.

Główne wyniki w ostatnich latach (Rowen, Small, Greenfield):

- (2015) Każda lewostronnie noetherowska algebra nad ciałem F, skończenie generowana jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą, jest reprezentowalna jako F-algebra, jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr,
- (2015) Jeśli algebra R nad ciałem F jest skończenie prezentowalna jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą Z oraz jeśli R spełnia ACC na anihilatory elementów Z, wówczas R jest reprezentowalna jako F-algebra.
- (2015) Jeśli lewostronnie noetherowska PI-algebra R jest skończenie generowana (jako algebra) nad pewną swoją centralną podalgebrą Z oraz Z zawiera ciało F, to R jest reprezentowalna jako F-algebra.
- (2020) Następujące klasy *PI*-algebr zawierających ciało są słabo reprezentowalne:
  - lewostronnie (lub prawostronnie) artinowskie,
  - lewostronnie i prawostronnie noetherowskie.

Twierdzenie (Rowen, Small, Greenfeld)

Następujące klasy *PI*-algebr zawierających ciało są słabo reprezentowalne:

- lewostronnie (lub prawostronnie) artinowskie,
- lewostronnie i prawostronnie noetherowskie.

Trudności do pokonania:

1. Redukcja do PI-algebr artinowskich.

Twierdzenie (Rowen, Small, Greenfeld)

Następujące klasy *PI*-algebr zawierających ciało są słabo reprezentowalne:

- lewostronnie (lub prawostronnie) artinowskie,
- lewostronnie i prawostronnie noetherowskie.

Trudności do pokonania:

1. Redukcja do PI-algebr artinowskich.
2. Zanurzenie w pewne algebry macierzy trójkątnych.

Twierdzenie (Rowen, Small, Greenfeld)

Następujące klasy *PI*-algebr zawierających ciało są słabo reprezentowalne:

- lewostronnie (lub prawostronnie) artinowskie,
- lewostronnie i prawostronnie noetherowskie.

Trudności do pokonania:

1. Redukcja do PI-algebr artinowskich.
2. Zanurzenie w pewne algebry macierzy trójkątnych.
3. Redukcja do przypadku algebry skończenie generowanej jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą.

Twierdzenie (Rowen, Small, Greenfeld)

Następujące klasy *PI*-algebr zawierających ciało są słabo reprezentowalne:

- lewostronnie (lub prawostronnie) artinowskie,
- lewostronnie i prawostronnie noetherowskie.

Trudności do pokonania:

1. Redukcja do PI-algebr artinowskich.
2. Zanurzenie w pewne algebry macierzy trójkątnych.
3. Redukcja do przypadku algebry skończenie generowanej jako moduł nad pewną swoją centralną podalgebrą.
4. Redukcja do przypadku algebry nierozkładalnej R, skończenie generowanej nad pewną centralną noetherowską F-algebrą Z, którą można zanurzyć w centralną lokalizację $S^{-1}R$ nad $S^{-1}Z$, przy czym $S^{-1}Z$ zawiera podciało K, nad którym jest algebraiczne.

Twierdzenie (Gordon, 1976)

Niech R będzie prawostronnie i lewostronnie noetherowskim PI-pierścieniem. Wówczas R zanurza się w pierścień artinowski.

Twierdzenie (Gordon, 1976)

Niech R będzie prawostronnie i lewostronnie noetherowskim PI-pierścieniem. Wówczas R zanurza się w pierścień artinowski.

- Uwaga: twierdzenie Gordona dotyczy ogólniejszej klasy, tzw. FBN pierścieni, dla których możliwe jest sformułowanie nieprzemiennego analogu rozkładu prymarnego (w tym także dla noetherowskich PI-pierścieni).

Twierdzenie (Gordon, 1976)

Niech R będzie prawostronnie i lewostronnie noetherowskim PI-pierścieniem. Wówczas R zanurza się w pierścień artinowski.

- Uwaga: twierdzenie Gordona dotyczy ogólniejszej klasy, tzw. FBN pierścieni, dla których możliwe jest sformułowanie nieprzemiennego analogu rozkładu prymarnego (w tym także dla noetherowskich PI-pierścieni).
- Dowód polega na zapisaniu R jako podprostego produktu prymarnych FBN-pierścieni. Te jednak, na mocy innego twierdzenia Gordona mają artinowski pierścień klasycznych ułamków. Beidar w 1978 roku pokazał, że dla pierścienia PI i prymarnego ów artinowski pierścień ułamków jest PI.

Twierdzenie (Gordon, 1976)

Niech R będzie prawostronnie i lewostronnie noetherowskim PI-pierścieniem. Wówczas R zanurza się w pierścień artinowski.

- Uwaga: twierdzenie Gordona dotyczy ogólniejszej klasy, tzw. FBN pierścieni, dla których możliwe jest sformułowanie nieprzemiennego analogu rozkładu prymarnego (w tym także dla noetherowskich PI-pierścieni).
- Dowód polega na zapisaniu R jako podprostego produktu prymarnych FBN-pierścieni. Te jednak, na mocy innego twierdzenia Gordona mają artinowski pierścień klasycznych ułamków. Beidar w 1978 roku pokazał, że dla pierścienia PI i prymarnego ów artinowski pierścień ułamków jest PI.
- Uwaga: Small podał w 1987 roku przykład reprezentowalnego PI pieścienia, który jest prawostronnie noetherowski, ale nie jest lewostronnie noetherowski, i który nie ma artinowskiego pierścienia klasycznych ułamków:

$$\left\{ \begin{bmatrix} f(0) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{bmatrix} \mid f, g \in F[x] \right\}.$$

Lemat (Anan'in, 1992)

Niech R będzie pierścieniem z jedynką nad ciałem F oraz niech $I_1, \ldots, I_d \lhd R$ będą takie, że

$$I_1 I_2 \ldots I_d = 0.$$

Wówczas istnieje algebra $\widetilde{R}$ zawierająca R oraz generowana przez R oraz zbiór parami ortogonalnych idempotentów $e_1, \ldots, e_d$ takich, że:

- $e_i \widetilde{R} e_j = 0$, dla $i > j$,
- $e_i \widetilde{R} e_j = e_i R e_i$, dla każdego $1 \leq i \leq d$,
- $\ker(R \to e_i R e_i) = I_i$, dla każdego $1 \leq i \leq d$.

Lemat (Anan'in, 1992)

Niech R będzie pierścieniem z jedynką nad ciałem F oraz niech $I_1, \ldots, I_d \lhd R$ będą takie, że

$$I_1 I_2 \ldots I_d = 0.$$

Wówczas istnieje algebra $\widetilde{R}$ zawierająca R oraz generowana przez R oraz zbiór parami ortogonalnych idempotentów $e_1, \ldots, e_d$ takich, że:

- $e_i \widetilde{R} e_j = 0$, dla $i > j$,
- $e_i \widetilde{R} e_j = e_i R e_i$, dla każdego $1 \leq i \leq d$,
- $\ker(R \to e_i R e_i) = I_i$, dla każdego $1 \leq i \leq d$.

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji), mówiącej w jaki sposób mając pierścień R oraz dwa homomorfizmy $\sigma : R \to S$ oraz $\tau : R \to T$ znaleźć *optymalny homomorfizm* (o najmniejszym możliwym jądrze) postaci:

$$\theta : R \mapsto \begin{bmatrix} S & \Omega_R(S, T) \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

gdzie $\Omega_R(S, T)$ jest $S - T$-bimodułem i przekształcenie dane jest wzorem:

$$\theta : r \mapsto \begin{bmatrix} \sigma(r) & \delta(r) \\ 0 & \tau(r) \end{bmatrix}.$$

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji)
- Niech $\phi : R \otimes_F R \to R$ będzie homomorfizmem bimodułów, polegającym na mnożeniu w R. Niech $X = \ker(\phi)$.

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji)
- Niech $\phi : R \otimes_F R \to R$ będzie homomorfizmem bimodułów, polegającym na mnożeniu w R. Niech $X = \ker(\phi)$.
- Biorąc $Y = (I_1 \otimes_F R) \cap X + (R \otimes_F I_2) \cap X$ widzimy, że X/Y jest $R/I_1 - R/I_2$ bimodułem.

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji)
- Niech $\phi : R \otimes_F R \to R$ będzie homomorfizmem bimodułów, polegającym na mnożeniu w R. Niech $X = \ker(\phi)$.
- Biorąc $Y = (I_1 \otimes_F R) \cap X + (R \otimes_F I_2) \cap X$ widzimy, że X/Y jest $R/I_1 - R/I_2$ bimodułem.
- Wówczas $\widetilde{R} = \begin{bmatrix} R/I_1 & X/Y \\ 0 & R/I_2 \end{bmatrix}$.

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji)

- Niech $\phi : R \otimes_F R \to R$ będzie homomorfizmem bimodułów, polegającym na mnożeniu w R. Niech $X = \ker(\phi)$.

- Biorąc $Y = (I_1 \otimes_F R) \cap X + (R \otimes_F I_2) \cap X$ widzimy, że X/Y jest $R/I_1 - R/I_2$ bimodułem.

- Wówczas $\widetilde{R} = \begin{bmatrix} R/I_1 & X/Y \\ 0 & R/I_2 \end{bmatrix}$.

- R przekształca się homomorficznie do $\widetilde{R}$ poprzez:

$$i : r \mapsto \begin{bmatrix} \bar{r} & \overline{1 \otimes r - r \otimes 1} \\ 0 & \bar{r} \end{bmatrix}$$

- Dowód jest indukcyjny i opiera się na następującej konstrukcji dla $d = 2$, pochodzącej od Levina, Bergmana i Dicksa (połowa lat 70', kontekst – teoria tzw. uniwersalnych lokalizacji)
- Niech $\phi : R \otimes_F R \to R$ będzie homomorfizmem bimodułów, polegającym na mnożeniu w R. Niech $X = \mathrm{ker}(\phi)$.
- Biorąc $Y = (I_1 \otimes_F R) \cap X + (R \otimes_F I_2) \cap X$ widzimy, że X/Y jest $R/I_1 - R/I_2$ bimodułem.
- Wówczas $\widetilde{R} = \begin{bmatrix} R/I_1 & X/Y \\ 0 & R/I_2 \end{bmatrix}$.
- R przekształca się homomorficznie do $\widetilde{R}$ poprzez:
$$i : r \mapsto \begin{bmatrix} \bar{r} & \overline{1 \otimes r - r \otimes 1} \\ 0 & \bar{r} \end{bmatrix}$$
- Anan'in pokazuje (kombinatorycznie), że $ker(i) = I_1 I_2 = 0$, czyli i jest włożeniem.

- Niech R – artinowski PI, $N = J(R)$ – nilpotentny indeksu d, czyli $N^d = 0$.

- Niech R – artinowski PI, $N = J(R)$ – nilpotentny indeksu d, czyli $N^d = 0$.
- Mamy włożenie ϕ pierścienia R w
$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} R/N & * & \cdots & * \\ 0 & R/N & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & R/N \end{bmatrix}$$
przy czym ϕ wysyła element $r \in R$ na macierz, której wyrazy na przekątnej są identycznymi warstwami R/N oraz
$$\phi(N) = \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Niech $C = \{cI \mid c \in Z(R/N)\}$. Zbiór ten utożsamiamy dalej z centrum R/N.

- Niech $C = \{cI \mid c \in Z(R/N)\}$. Zbiór ten utożsamiamy dalej z centrum R/N.
- Niech R' będzie F-podalgebrą $\widetilde{R}$ generowaną przez $\phi(R)$ oraz C. Niech $N' \lhd R'$ będzie ideałem w R' generowanym przez $\phi(N)$. Oczywiście N' jest skończenie generowanym ideałem nilpotentnym.

- Niech $C = \{cI \mid c \in Z(R/N)\}$. Zbiór ten utożsamiamy dalej z centrum R/N.
- Niech R' będzie F-podalgebrą $\widetilde{R}$ generowaną przez $\phi(R)$ oraz C. Niech $N' \lhd R'$ będzie ideałem w R' generowanym przez $\phi(N)$. Oczywiście N' jest skończenie generowanym ideałem nilpotentnym.
- Rozważmy przekształcenie $\psi : R/N \to R'/N'$ dane wzorem:

$$\psi : r + N \mapsto \phi(r) + N'.$$

- Niech $C = \{cI \mid c \in Z(R/N)\}$. Zbiór ten utożsamiamy dalej z centrum R/N.
- Niech R' będzie F-podalgebrą $\widetilde{R}$ generowaną przez $\phi(R)$ oraz C. Niech $N' \lhd R'$ będzie ideałem w R' generowanym przez $\phi(N)$. Oczywiście N' jest skończenie generowanym ideałem nilpotentnym.
- Rozważmy przekształcenie $\psi : R/N \to R'/N'$ dane wzorem:
$$\psi : r + N \mapsto \phi(r) + N'.$$
- Oczywiście ψ to homomorfizm oraz jeśli $r + N \in \ker \psi$, to $\phi(r)$ jest ściśle górnotrójkątna, a zatem $r \in N$. Stąd ψ jest włożeniem.

- Niech $C = \{cI \mid c \in Z(R/N)\}$. Zbiór ten utożsamiamy dalej z centrum R/N.

- Niech R' będzie F-podalgebrą $\widetilde{R}$ generowaną przez $\phi(R)$ oraz C. Niech $N' \lhd R'$ będzie ideałem w R' generowanym przez $\phi(N)$. Oczywiście N' jest skończenie generowanym ideałem nilpotentnym.

- Rozważmy przekształcenie $\psi : R/N \to R'/N'$ dane wzorem:
$$\psi : r + N \mapsto \phi(r) + N'.$$

- Oczywiście ψ to homomorfizm oraz jeśli $r + N \in \ker \psi$, to $\phi(r)$ jest ściśle górnotrójkątna, a zatem $r \in N$. Stąd ψ jest włożeniem.

- ψ jest także surjekcją, bo $\psi(C) = C$ (element $c \in R/N$ przechodzi na macierz skalarną o wyrazach c na przekatnej). Zatem $R'/N' \simeq R/N$ jako C-algebry.

- Skoro R jest lewostronnie noetherowska, to N^i to skończenie generowany R-moduł, czyli także $(N')^i$ to skończenie generowany R'-moduł.

- Skoro R jest lewostronnie noetherowska, to N^i to skończenie generowany R-moduł, czyli także $(N')^i$ to skończenie generowany R'-moduł.
- Także poniższe ilorazy są skończenie generowanymi R'-modułami:
$$R'/N', (N'/N')', \ldots, (N')^{d-1}.$$

- Skoro R jest lewostronnie noetherowska, to N^i to skończenie generowany R-moduł, czyli także $(N')^i$ to skończenie generowany R'-moduł.
- Także poniższe ilorazy są skończenie generowanymi R'-modułami:
$$R'/N', (N'/N')', \ldots, (N')^{d-1}.$$
- Co więcej R'/N' jest skończenie generowanym modułem nad swoim centrum C', więc R' jest skonczenie generowanym modułem nad C'.

- Skoro R jest lewostronnie noetherowska, to N^i to skończenie generowany R-moduł, czyli także $(N')^i$ to skończenie generowany R'-moduł.
- Także poniższe ilorazy są skończenie generowanymi R'-modułami:

$$R'/N', (N'/N')', \ldots, (N')^{d-1}.$$

- Co więcej R'/N' jest skończenie generowanym modułem nad swoim centrum C', więc R' jest skonczenie generowanym modułem nad C'.
- A zatem problem słabej reprezentowalności R redukuje się do problemu słabej reprezentowalności R', która wynika z twierdzenia Rowena i Smalla z 2015 roku.

- Skoro R jest lewostronnie noetherowska, to N^i to skończenie generowany R-moduł, czyli także $(N')^i$ to skończenie generowany R'-moduł.
- Także poniższe ilorazy są skończenie generowanymi R'-modułami:

$$R'/N', (N'/N')', \ldots, (N')^{d-1}.$$

- Co więcej R'/N' jest skończenie generowanym modułem nad swoim centrum C', więc R' jest skonczenie generowanym modułem nad C'.
- A zatem problem słabej reprezentowalności R redukuje się do problemu słabej reprezentowalności R', która wynika z twierdzenia Rowena i Smalla z 2015 roku.
- Twierdzenie (Rowen, Small) Każda lewostronnie noetherowska algebra R nad ciałem F, która jest skończenie generowanym modułem nad swoją centralną podalgebrą Z, jest słabo reprezentowalna jako F-algebra – jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr nierozkładalnych.

- Twierdzenie (Rowen, Small) Każda lewostronnie noetherowska algebra R nad ciałem F, która jest skończenie generowanym modułem nad swoją centralną podalgebrą Z, jest reprezentowalna jako F-algebra – jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr nierozkładalnych.

- Twierdzenie (Rowen, Small) Każda lewostronnie noetherowska algebra R nad ciałem F, która jest skończenie generowanym modułem nad swoją centralną podalgebrą Z, jest reprezentowalna jako F-algebra – jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr nierozkładalnych.
- Idea dowodu: biorąc od uwagę oczywiste redukcje zakładamy, że R jest nierozkładalna.

- Twierdzenie (Rowen, Small) Każda lewostronnie noetherowska algebra R nad ciałem F, która jest skończenie generowanym modułem nad swoją centralną podalgebrą Z, jest reprezentowalna jako F-algebra – jest w istocie skończonym produktem podprostym silnie reprezentowalnych algebr nierozkładalnych.
- Idea dowodu: biorąc od uwagę oczywiste redukcje zakładamy, że R jest nierozkładalna.
- Dowodzi się następujący fakt. Załóżmy, że R ma dolny nilradykał N oraz centralną podalgebrę Z nad ciałem F. Jeśli R jest nierozkładalny i ma ACC na ideały postaci RI, gdzie $I \lhd Z$, to R można zanurzyć przez centralną lokalizację w algebrę $W := S^{-1}R$ nad $S^{-1}Z$, która ma podciało K, nad którym $S^{-1}Z$ jest algebraiczna, i dla której
$$S^{-1}Z/S^{-1}(Z \cap N) \simeq K.$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!