Zasada szufladkowa Dirichleta

V Warsztaty Matematyczne I LO - wrzesień 2011

Celem tego wykładu jest przedstawienie kilku przykładów zastosowań prostego niezmiennika jakim jest parzystość liczby naturalnej. Materiał przygotowałem w oparciu o znakomitą książkę „The Art and Craft of Problem Solving" autorstwa Paula Zaitza, a także w oparciu o przykłady przedstawione w książkach Xu Janga: „Lectures on Mathematical Olympiad Courses" oraz w materiałach przygotowanych przez Thomasa Mildorfa.

* * *

Zasada szufladkowa Dirichleta jest jednym z zasadniczych narzędzi wykorzystywanych w zadaniach z teorii liczb i kombinatoryki, które pojawiają się ona Olimpiadzie. Przypomnijmy ją, przytaczając treść tej zasady w dwóch podstawowych wariantach.

Podstawowa zasada szufladkowa

- Jeśli mamy $n+1$ przedmiotów oraz n szuflad, to 2 przedmioty muszą trafić do jednej z szuflad.
- Jeśli mamy n przedmiotów oraz k szuflad, to $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ przedmiotów musi trafić do jednej z szuflad.

Z pozoru wydaje się to dziecinnie oczywista wprost zasada. I oczywiście można wymyślić wiele bardzo prostych zastosowań. Dla przykładu:

- wśród trzech różnych liczb naturalnych są zawsze 2 parzyste lub 2 nieparzyste (przedmioty - to liczby; szufladki - parzystość, nieparzystość)
- wśród pięciu liczb naturalnych pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia przez 4 (przedmioty - liczby; szufladki - reszty: 0, 1, 2, 3)
- wśród dowolnych 10 liczb naturalnych znajdą się dwie z tą samą cyfrą jedności (przedmioty - liczby; szufladki - reszty 0, 1, ..., 9)

To tylko podstawowe przykłady najprostszej zasady szufladkowej. Wykorzystać ją można już w bardzo elementarnych zadaniach.

Zadanie 1. *Udowodnij, że w grupie 2011 ludzi przynajmniej 2 osoby mają taką samą liczbę znajomych (osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy osoba B zna osobę A).*

Rzeczywiście, niech naszymi przedmiotami będą ludzie. Szufladkami zaś - ilość znajomych, jaką ma każdy człowiek. Ile jest szufladek? 2010, bo choć teoretycznie można znać 0 osób, 1 osobę, aż do 2010 osób, to nie mogą być jednocześnie opcje 0 osób i 2010 osób. Jeśli istnieje osoba, która nie zna nikogo, to nie istnieje osoba, która zna wszystkich – i odwrotnie. Tak więc szufladek jest tak naprawdę 2010, zaś przedmiotów – 2011. A więc pewne dwie osoby mają tyle samo znajomych.

Zadanie 2. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.*

Istotnie, wystarczy popatrzeć na trójkąt równoboczny o boku 1. Dwa z jego wierzchołków muszą być, na mocy zasady szufladkowej, tego samego koloru.

Zadanie 3. *Udowodnij, że w gronie 6 osób albo pewne 3 osoby się znają, albo pewne 3 się nie znają.*

Tutaj zanim wybierzemy przedmioty i szufladki dokonujemy znanego triku. Każdą z 6 osób traktujemy jako wierzchołek sześciokąta foremnego. I teraz jeśli osoby się znają, to odcinek łączący odpowiadające im wierzchołki nazywamy zielonym. Jeśli się nie znają - odcinek łączący nazywamy czerwonym. Zatem teza zadania mówi: jeśli 6 wierzchołków sześciokąta foremnego połączę odcinkami kolorów zielonego i czerwonego, to dostanę przynajmniej jeden trójkąt (nie wiadomo jakiego koloru).

Biorę jeden z wierzchołków, powiedzmy A. Wychodzi z niego 5 odcinków. To będą moje przedmioty, a szufladki - to kolory odcinków. W szczególności pewne 3 jednokolorowe odcinki wychodzą z A. Powiedzmy, że są czerwone. No to prowadzą one do punktów A_1, A_2, A_3, które też są połączone trzema odcinkami. Wszystkie te odcinki nie mogą być zielone, bo $A_1A_2A_3$ byłby zielony. Ale jeśli choć jeden z odcinków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 jest czerwony, to razem z odcinkami prowadzącymi do wierzchołka A stworzy się trójkąt czerwony. No i koniec.

Zadanie 4. *W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.*

Istotnie, zauważmy, że w okrąg o promieniu 1 można wpisać sześciokąt foremny o boku 1. W wierzchołku każdego takiego sześciokąta kładziemy koło o promieniu 1. Jest ich 6 i to będą nasze szufladki. Skoro mamy 7 punktów, to pewne 2 muszą leżeć w jednym z tych kół. Leżą one jednocześnie w wyjściowym kole, a więc ich odległość nie może być większa od 1.

Zadanie 5. *Ze zbioru liczb* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *wybieramy 51 liczb. Udowodnić, że:*

- *różnica pewnych dwóch wynosi 1,*
- *pewne dwie z nich są względnie pierwsze,*
- *są takie dwie, że jedna dzieli się przez drugą.*

To zadanie można zrobić siłowo, ale można też zasadą szufladkową. Za przedmioty bierzemy nasze 51 liczb. A szufladkami będą PARY LICZB postaci $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \ldots, (99, 100)$. Ile jest tych par? 50, prawda? Jak nasza liczba jest w zbiorze 51 wybrańców, to wrzucamy ją do szufladki z numerem jej odpowiadającym. Np. liczba 5 trafia do szufladki (5,6). Zasada Dirichleta mówi, że w przynajmniej jednej z szufladek będą 2 liczby. A więc będą to dwie kolejne liczby. To załatwia obydwa pytania, bo dwie kolejne liczby są względnie pierwsze.

Pozostaje sprawa podzielności. Tu szufladki będą dość zaskakujące. Każda liczba naturalna może być zapisana jako $2^m \cdot q$, gdzie q jest liczbą nieparzystą. Dzielimy zbiór $\{1, 2, \ldots, 100\}$ na szufladki składające się z liczb o ustalonym $q > 1$. A więc w pierwszej szufladce liczby postaci $2^m \cdot 1$, potem $2^m \cdot 3$ i tak dalej. Liczb nieparzystych od 1 do 100 jest 50, a więc mamy 50 szufladek. Wybraliśmy 51 liczb, a więc pewne dwie są postaci $2^m \cdot q$ oraz $2^n \cdot q$. No to jedna jest podzielna przez drugą.

Zadanie 6. *Ze zbioru* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *wybieramy takie 51 liczb, że suma żadnych dwóch z nich nie daje 100. Pokazać, ze zbiór ten zawiera kwadrat liczby całkowitej.*

Oznaczmy zbiór tych 50 liczb przez A. Załóżmy przez sprzeczność, ze A nie zawiera kwadratu. Rozważmy pary $\{1, 99\}, \{2, 98\}, \ldots, \{49, 51\}$. Jest ich 49. Co więcej o A możemy powiedzieć, że nie zawiera on żadnego elementu $\{36, 64\}$. Zatem, niezależnie od tego czy wśród $50, 100 \in A$, zbiór A zawiera przynajmniej 49 elementów z pozostałych wyróżnionych par. A zatem zawiera pewną wyróżnioną parę - zasada szufladkowa. Ale zakładaliśmy, że w A nie ma elementów, które sumują się do 100. No to sprzeczność z założeniem, że w A nie ma kwadratu.

Zadanie 7. *Udowodnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie 2, których suma lub różnica dzieli się przez 10.*

Zastąpmy liczby ich resztami z dzielenia przez 10. To będą nasze pudełka. Zaś szufladki mają postać:

$$\{0\}, \quad \{5\}, \quad \{1, 9\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{3, 7\}, \quad \{4, 6\}.$$

- jeśli dwie z siedmiu reszt to jednocześnie 0 lub 5, to ich różnice są podzielne przez 10
- jeśli dwie reszty są równe jednej z par (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), to suma dwóch takich liczb jest podzielna przez 10

Ale skoro mamy 7 reszt i sześć szufladek, to pewne dwie wpadają do tej samej szufladki. A więc ich suma lub różnica jest podzielna przez 10.

Zadanie 8. *Niech dany będzie zbiór 2011 liczb całkowitych* $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. *Wykaż, że istnieje w nim taki podzbiór, że suma wszystkich jego elementów jest podzielna przez 2011.*

Tu potrzeba trochę sprytu. Rozważmy nowe wielkości: $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + \ldots$. Wszystkie n wartości to różne liczby. Jeśli jakakolwiek z liczb b_i jest podzielna przez n, to koniec zadania – za podzbiór wyjściowego zbioru bierzemy składniki tej liczby. Jeśli zaś nie, to pozostaje n-1 reszt jakie mogą przyjmować. Zgodnie z zasadą szufladkową dla pewnych b_i, b_j reszty się powtórzą. Zatem $b_i - b_j$ jest podzielne przez n, dla $i > j$. Ale $b_i - b_j$ jest sumą elementów $a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i$.

Zadanie 9. *Udowodnij, że parzystokąt wypukły posiada przekątną, która nie jest równoległa do żadnego z boków.*

Jeśli jest 2n boków, to mamy $\frac{2n(2n-3)}{2} = n(2n-3)$ przekątnych oraz 2n boków. Ale do jak wielu przekątnych może być równoległy bok? Do max n-2. No to szufladki to będą boki, a przedmioty to przekątne. Gdyby każda przekątna była równoległa do jakiegoś boku, to z zasady szufladkowej pewien bok powinien być równoległy do n-1 przekątnych. No to sprzeczność.

Zadanie 10. *Ze zbioru 27 parami różnych liczb nieparzystych (dodatnich) mniejszych od 100 można wybrać dwie, które sumują się do 102.*

Zauważmy, że dokładnie 24 pary liczb sumują się do 102:

$$\{3, 99\}, \{5, 97\}, \ldots, \{49, 53\}.$$

W czym nam to pomoże? Otóż chcielibyśmy, by z 27 wybranych przez nas liczb pewne dwie były w jednej z powyższych par. A więc pary liczb znowu posłużą nam jako szufladki. Zauważmy jednak, że wykluczyliśmy z szufladek liczby 1 i 51. Wprawdzie 1 + 101 = 51 + 51 = 102, ale 101 nie może być w zbiorze naszych 27 liczb, co więcej nie ma w nim dwóch egzemplarzy 51 - wszystkie elementy naszego zbioru są różne. Teoretycznie jednak w zbiorze 27 liczb nieparzystych mniejszych od 100 liczby 1 oraz 51 mogą występować. No to jeśli występują, to zostaje jeszcze 25 pozostałych elementów. To są nasze przedmioty. Widać, że pewne dwie wpadają do tej samej szufladki, a więc pewna para tych liczb jest parą, która sumuje się do 102.

* * *

A teraz dwa zadania o odległych treściach i niemal jednakowej metodzie rozwiązywania.

Zadanie 11. *Na spotkanie absolwentów I LO przyjechało 17 osób. Każdy rozmawiał z każdym na jeden z trzech różnych tematów. Każda para rozmawiała dokładnie na jeden temat. Udowodnij, że istnieje trójka absolwentów, którzy mówili między sobą na ten sam temat.*

Nazwijmy tematy T_1, T_2, T_3. Rozważmy dowolnego studenta – A. Poza nim jest 16 studentów i 3 tematy do omawiania. Zgodnie więc z zasadą szufladkową A musiał rozmawiać na określony temat z przynajmniej 6 innymi studentami. Nazwijmy ten temat T_3. Gdyby się okazało, że któryś dwóch z tych sześciu też rozmawiało na temat T_3, to koniec. A jeśli nie, to rozmawiali na jeden z tematów: T_1, T_2. Weźmy jednego z tych 6 studentów i nazwijmy go B. Zgodnie z zasadą szufladkową ma on do wyboru 2 tematy i 5 rozmówców. A więc z trójką z nich rozmawia na określony temat, powiedzmy T_2. Jeśli dwójka z tych trzech rozmawia też na T_2, to koniec. Jeśli nie, to ta trójka musi koniecznie mówić między sobą o T_1. A więc koniec dowodu.

Zadanie 12. *Zbiór liczb całkowitych od 1 do 16 podzielono na 3 podzbiory. Udowodnij, że jeden z nich zawiera trójkę liczb x, y, z, że $x + y = z$.*

Tym razem korzystamy z bardziej zaawansowanej zasady szufladkowej. 3 podzbiory, nazwijmy je A, B, C to 3 szufladki, a liczby to przedmioty. Zatem pewne 6 liczb jest w jednej szufladce (podzbiorze). Niech to będzie A. Ponumerujmy te elementy: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Zauważmy, że aby teza zadania była spełniona wystarczyłoby, aby któraś z różnic

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$$

leżała w zbiorze A. Ale być może jest tak, że żadna z nich nie leży w A,. Skoro te różnice są dodatnie i należą do przedziału $[1, 16]$, to muszą być one elementami zbioru B lub C.

A więc mamy 5 różnic i dwa zbiory, w których mogą występować: B lub C. W szczególności jeden ze zbiorów, np. B zawiera 3 z tych różnic. Nazwijmy je $b_1 < b_2 < b_3$. I znowu, jeśli jakaś z różnic, tym razem między tymi nowymi elementami:

$$b_3 - b_2, b_2 - b_1, b_3 - b_1$$

leży w zbiorze B, to po zadaniu. Ale może być tak, że wszystkie te trzy leżą w C. To jednak oznacza koniec zadania, bo $b_3 - b_1 \in C$ jest sumą liczb ze zbioru C, dokładniej: $(b_3 - b_2) + (b_2 - b_1)$.

* * *

Zadanie 13. *Dowieść, że wśród 12 kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba nie będąca sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.*

Zgodnie z wczorajszym biegiem wydarzeń warto by mieć pod ręką ulubiony test do wykrywania czwartych potęg. Dla przypomnienia, przy kwadratach było to dzielenie przez 4, przy sześcianach – przez 9. A przy czwartych potęgach? Można spróbować z 16. Sprawdzimy łatwo, że każda czwarta potęga przystaje 0 lub 1 modulo 16. Wniosek jest prosty. Suma 10 czwartych potęg może przystawać modulo 16 na... 11 sposobów. Wspaniale, przecież w treści jest 12 liczb! Czuć w powietrzu zasadę szufladkową... Rzeczywiście, wśród 12 kolejnych liczb całkowitych nie ma naturalnie dwóch takich, które dawałyby tę samą resztę z dzielenia przez 16. Zatem któraś z tych 16 liczb nie daje jednej z reszt: $\{0, 1, \ldots, 10\}$ z dzielenia przez 16. Wniosek: liczba ta nie jest sumą 10 czwartych potęg.