Parzystość

V Warsztaty Matematyczne I LO - wrzesień 2011

Celem tego wykładu jest przedstawienie kilku przykładów zastosowań prostego niezmiennika jakim jest parzystość liczby naturalnej. Materiał przygotowałem w oparciu o znakomitą książkę „The Art and Craft of Problem Solving" autorstwa Paula Zaitza.

* * *

Jednym z najwcześniej poznawanych niezmienników jest parzystość liczby całkowitej, a więc jej przynależność do jednego z dwóch rozłącznych podzbiorów liczb całkowitych - liczb podzielnych przez 2, ozn. P, oraz liczb niepodzielnych przez 2, ozn. NP. Jak wiadomo, każda liczba całkowita należy albo do P, albo do NP. Co więcej, parzystość współpracuje nieźle z podstawowymi działaniami arytmetycznymi. Przytoczmy dwie dobrze znane zasady.

[Z1] suma liczb całkowitych jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieparzystych składników jest... nieparzysta

[Z2] iloczyn liczb całkowitych jest nieparzysty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są nieparzyste

Z początku może się wydawać, że nie jest to zbyt interesująca własność - ostatecznie, liczb całkowitych jest nieskończenie wiele, a więc odnosi się wrażenie, że parzystość i nieparzystość niewiele tu właściwie może rozróżnić. Okazuje się jednak, że wiąże się z nią wiele interesujących zadań, w tym olimpijskich. Zaczniemy jednak od trzech raczej prostych przykładów.

Zadanie 1. *Załóżmy, że w turnieju szachowym gra 2011 zawodników i gramy systemem „każdy z każdym". Udowodnij, że po rozegraniu wszystkich gier przewidzianych w programie zawodów, liczba ludzi, którzy zagrali nieparzystą ilość spotkań jest parzysta.*

Dowód. Jak widzimy, w tezie zadania wyraźnie pojawia się pojęcie parzystości. Nic więc dziwnego, że rozwiązanie będzie się na niej opierało. Tak naprawdę nie mamy zbyt wielu danych. Widzimy, że w każdej grze jest dwóch zawodników. Innymi słowy, jeśli spotkanie rozgrywa się pomiędzy zawodnikiem A i B, to liczymy je podwójnie: raz na konto A, i raz na konto B. Czy to pomaga? Otóż bardzo! Niech s_i będzie liczbą spotkań rozegranych przez i-tego zawodnika. Wówczas suma:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{2011} \tag{1}$$

musi być parzysta, ponieważ każdą grę policzyliśmy dwa razy! Nasze zadanie jest już właściwie rozwiązane. Istotnie, suma (1) jest parzysta. W myśl [Z1] suma ta nie może zawierać nieparzyście wielu składników nieparzystych, bo wtedy byłaby nieparzysta. No i koniec... □

Zauważcie też, że wyłaniają się tu trzy dodatkowe obserwacje:

- suma (1) jest parzysta w każdym momencie turnieju
- suma (1) jest parzysta niezależnie od systemu jakim rozgrywany jest nasz turniej
- teza zadania jest niezależna od tego ilu jest zawodników - niezależnie od systemu turniejowego i od momentu, w jakim się znajdujemy, i od tego ilu jest graczy - zawsze nieparzystą liczbę gier ma za sobą parzyście wielu zawodników.

Zadanie 2. *Załóżmy, że elementy zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ ustawiamy w dowolny sposób tak, że powstaje ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (innymi słowy, bierzemy dowolną permutację tego zbioru). Udowodnij, że jeśli n jest nieparzyste, wówczas iloczyn:*

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_n - n)$$

jest liczbą parzystą.

Dowód. Zadanie jest znowu bardzo proste. Jeden sposób narzuca się od razu: udowodnijmy, że jeden z czynników $a_i - i$ jest parzysty i będzie ok. Weźmy dla przykładu $n = 11$. Jeśli założymy, że każdy z czynników:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_{11} - 11$$

jest nieparzysty, no to możemy odczytać parzystość samych elementów a_i. Istotnie, wychodzi nam, że 6 z nich:

$$a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$$

to liczby parzyste, zaś pozostałe 5 to liczby nieparzyste. Stąd sprzeczność, bo zbiór $\{1, 2, \ldots, 11\}$ zawiera nie 5, ale 6 liczb nieparzystych. Oczywiście argument ten przenosi się jasno na dowolne n nieparzyste.

* * *

No ale teraz spróbujemy zupełnie inne rozumowanie. Kluczowy ruch jest taki: **zapomnieć o iloczynie - spojrzeć na sumę**. Zauważcie, że

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n) = (a_1+a_2+\ldots+a_n)-(1+2+\ldots n) = (1+2+\ldots n)-(1+2+\ldots n) = 0.$$

A więc suma naszych czynników to niezmiennik - nieważne od tego w jakiej kolejności wybieramy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suma czynników $a_i - i$ jest zerowa! A co mówi [Z1]? Suma jest parzysta, a więc nieparzystych składników postaci $(a_i - i)$ jest parzyście wiele! A skoro WSZYSTKICH składników jest nieparzyście wiele, no to jakaś $a_i - i$ jest parzysta, no i koniec. □

Nie zawsze jest tak, że rozwiązania są tak samonarzucające się. Następne dwa przykłady korzystają z bardzo prostych faktów dotyczących parzystość. Wykorzystują je jednak bardziej pomysłowo.

Zadanie 3. *25 zawodników siedzi przy okrągłym stole. Każdy z nich ma dwie karty. Na każdej karcie jest liczba całkowita z przedziału [1,25] i każda liczba całkowita z tego przedziału występuje na dokładnie dwóch kartach. Gra polega na tym, że w każdej turze zawodnik przekazuje koledze po prawej kartę z mniejszym numerem. Udowodnić, że w pewnej turze znajdzie się zawodnik, który ma dwie karty o tej samej wartości.*

Na pierwszy rzut oka właściwie nie wiadomo za co się tutaj zabrać. Karty się przesuwają, kontroli nie ma. Trudno znaleźć tu jakiś niezmiennik. Szybkie próby pokazują, że teza nie jest prawdziwa dla dwóch graczy, ani dla czterech, a więc parzystość wydaje się mieć zastosowanie. Zobaczmy dwie metody rozwiązania. Pierwsza siłowa - a druga z pomysłem.

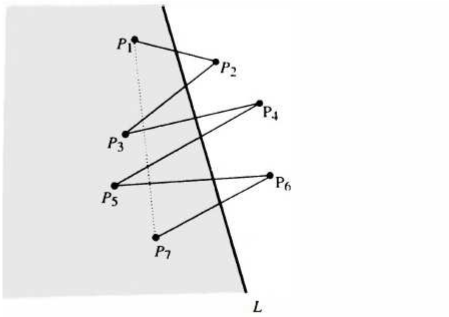
Możemy po pierwsze zapytać czy jakieś karty nie ruszają się wcale? Oczywiście – gracze oddają zawsze mniejszą kartę, a więc 25 nigdy się nie rusza. A jak z 24? Teoretycznie może się ruszyć, jeśli jakiemuś graczowi trafi się para kart (24, 25). Ale daleko ta 24 nie zawędruje. Skoro 25 się nie rusza, to każda 24 może wykonać co najwyżej dwa ruchy, a po dwóch kolejkach już też stoi. Podobnie 23 po kolejnych 3 kolejkach... Jak się nad tym zastanowić, to po pewnej liczbie kolejek nie ruszać się będą karty z numerami $25, 25, 24, 24, 23, 23, \ldots, 14, 14, 13$ - a więc 25 kart. Wiadomo, że gracz nie ma czego oddać sąsiadowi tylko wtedy, gdy jego karty są takie same. A więc jeśli 25 kart jest „zamrożonych”, to o ile ktoś już zawczasu nie zdobył pary identycznych kart, to każdy z graczy ma po 1 zamrożonej karcie, a pozostałe 25 krąży. Wśród nich 13. Ale skoro 13 jest w ciągłym ruchu, to w końcu trafi do gracza, który już ma 13 i to zakończy grę. Rozumowanie nieco siłowe, ale działa. Czy można prościej?

Wprowadzimy sumę, tak jak w poprzednich zadaniach. Będziemy ją liczyć od nowa w każdej kolejce i będzie to suma wartości większych kart każdego z gracza. A więc np. jeśli gracz 1. ma parę kart 2, 4, to do sumy z pierwszej kolejki wchodzi od niego liczba 4. Ale jeśli w drugiej kolejce uzyska np. kartę z numerem 7, to do sumy z drugiej kolejki wkłada tę właśnie 7. Co możemy powiedzieć o takiej sumie? **Przede wszystkim: z kolejki na kolejkę nie może ona maleć!** Gracz nigdy nie oddaje swojej silniejszej karty, może co najwyżej dostać jeszcze silniejszą. A więc suma silniejszych kart rośnie z kolejki na kolejkę. Ile może wynieść maksymalnie? Nietrudno policzyć, że 1000. W pewnym momencie osiąga maksimum. Ile? Nie wiadomo, ale wiadomo, że jest to suma 25 liczb pochodzących z kart, które już się nie ruszają. Ale skoro jest ich 25, to jest tam liczba bez pary (tzn. że jedna z liczb od 1 do 25 nie wchodzi do tej sumy podwójnie). A więc jest taka para kart z liczbą x, że jedna z nich już stoi, a druga krąży. A więc po max 24 ruchach karty te spotkają się w ręce jednego z graczy.

Zadanie 4. *Załóżmy, że na płaszczyźnie danych jest 2011 różnych punktów $P_1, P_2, \ldots, P_{2011}$. Tworzymy odcinki $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{2010}P_{2011}, P_{2011}P_1$. Udowodnić, że nie istnieje prosta, która przechodziłaby przez wnętrza wszystkich tych odcinków (a więc w szczególności prosta nie przechodząca przez żaden z punktów P_i).*

Dowód. Na pierwszy rzut oka trudniej może wyczuć, że chodzi tu o parzystość. Warto jednak popróbować na mniejszych przykładach. Dlaczego np. gdy mamy trójkąt, nie istnieje prosta, która przecinałaby wnętrza wszystkich jego boków? A czy jak są cztery punkty to istnieją takie konfiguracje, że takie przecięcie jest możliwe? Oczywiście, że tak: rozważmy kwadrat ABCD i odcinki: AB, BD, DC, DC. Symetralna odcinka AB przecina wnętrza wszystkich czterech odcinków. A... więc może jak będzie 5 punktów i odpowiednio dobierzemy kolejność, to jednak da się jakąś prostą zrobić? Ile byśmy próbowali, nie da się...

Próbujmy przez sprzeczność! Załóżmy, że mamy jakieś 5 punktów A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 takich, że pewna prosta l przecina wnętrza odcinków $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_5A_1$. Założyliśmy, że punkty A_i nie mogą leżeć na prostej l. Cała płaszczyzna podzielona zostaje przez prostą l na dwa regiony: nazwijmy je: lewym i prawym. Każdy z punktów A_i leży albo w lewym, albo w prawym regionie. Zatem: jeśli A_1 jest po prawo, to A_2 musi być... po lewo, no bo P przecina wnętrze odcinka A_1A_2. No, a jeśli A_2 po lewo, no to znowu A_3 po prawo. A stąd A_4 po lewo, i A_5 znów po prawo. A gdyby A_1 było po lewej? No to wszystko odwrotnie...



I teraz kluczowa obserwacja: **prosta l nie przecina wnętrza odcinka łączącego punkty w tym samym regionie**. A więc jak są dwa punkty po lewo od l: to l nie przecina wnętrza łączącego je odcinka. Podobnie z prawej strony. A nam wyszło, że A_1 i A_5 są zawsze po tej samej stronie! A więc l nie przechodzi przez wnętrze A_1A_5. No to sprzeczność, l nie istnieje! A jakie miało znaczenie to, że punktów było 5, a nie 1000005? Widzicie, że żadne. Chodziło o to, żeby pierwszy i ostatni punkt znalazł się w tym samym regionie. Punktów musiało być zatem nieparzyście wiele. Resztę dopowiedzcie sobie sami :) □

Zadanie 5. *Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, że liczby $a^2 + b$ oraz $a + b^2$ są kolejnymi liczbami całkowitymi?*

Dowód. Tym razem czas na zadanie z teorii liczb. Pojawiło się ono na finale ostatniej OMG. Rozumujemy podobnie jak w poprzednich przypadkach. Przypuśćmy, ze takie liczby a oraz b istnieją. Wtedy liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ jest równa 1 lub -1. Z drugiej strony,

$$(a^2 + b) - (a + b^2) = a(a - 1) - b(b - 1).$$

Obie liczby $a(a - 1)$ i $b(b - 1)$ są parzyste, skąd wynika, że liczba $a(a - 1) - b(b - 1)$ jest także parzysta. Wobec tego liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ nie może być równa ani 1 ani -1. Zatem liczby a, b o postulowanej własności nie istnieją. □

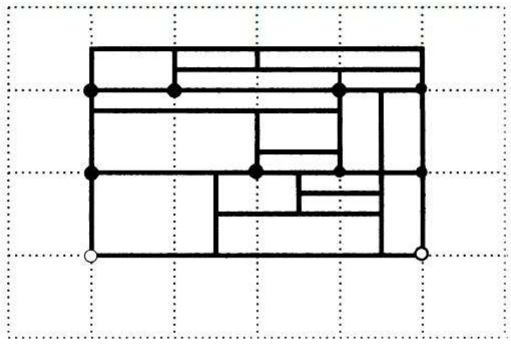
Jak dotąd parzystość pojawiła się tylko w dość prostych zagadnieniach. Następne dwa problemy będą jednak znacznie głębiej wykorzystywać te pojęcie.

Zadanie 6. *Dany jest prostokąt, który pocięto na sumę skończenie wielu prostokątów, z których każdy ma przynajmniej jeden bok długości całkowitej. Wykazać, że również wyjściowy prostokąt musi mieć przynajmniej jeden bok długości całkowitej.*

Dowód. Z początku w ogóle nie widać jak parzystość ma się przyczynić do rozwiązania tego zadania. W tym przypadku potrzebny jest pomysł na odnalezienie parzystości. Przede wszystkim zauważmy, że skoro wyjściowy prostokąt jest sumą rozłączną prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_s$, to po złożeniu tych prostokątów w całość okaże się, że ich boki są równoległe do boków prostokąta, którego są sumą. Jest to właściwie oczywiste, ale zachęcam Was do pomyślenia nad formalnym argumentem.

Kluczowym pomysłem jest rozważyć nasz prostokąt (będący sumą mniejszych) na płaszczyźnie, w której wyróżnione są tzw. punkty kratowe, a więc punkty o współrzędnych całkowitych. W ten sposób szybko odkryjemy parzystość. Kluczowa obserwacja jest taka: „dobry prostokąt", a więc taki, który ma przynajmniej jeden bok długości całkowitej ma albo 0, albo 2, albo 4 wierzchołki leżące w punktach kratowych. **A więc dobry prostokąt ma parzyście wiele wierzchołków kratowych**!

Umieśćmy nasz prostokąt tak, by jego lewy dolny wierzchołek znajdował się w punkcie kratowym. Wolno nam? Oczywiście, nie mamy jednak gwarancji, że jakikolwiek inny jego wierzchołek też będzie kratowy. Chcemy to jednak udowodnić. Innymi słowy, chcemy pokazać, że ilość wierzchołków kratowych wyjściowego prostokąta jest parzysta.



Popatrzmy teraz na wierzchołki prostokątów, które w sumie dają wyjściowy prostokąt. Wszystkie te prostokąty są z założenia „dobre", a więc mają 0, 2 lub 4 wierzchołki kratowe. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_s$ będą liczbami wierzchołków kratowych prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_s$. Z założenia są to liczby parzyste. A więc suma $S = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$ jest parzysta, niezależnie od s i od samych p_i. Zobaczmy, że niektóre wierzchołki kratowe są w tej sumie liczone wiele razy. To znaczy - są takie wierzchołki kratowe, które należą jednocześnie do 2 prostokątów (ich ilość oznaczmy przez w) lub takie, które należą jednocześnie do 4 prostokątów składowych (ich ilość oznaczmy przez k). Jedyne wierzchołki, które policzyliśmy pojedynczo, to wierzchołki kratowe dużego prostokąta, ich ilość to x. Chcemy pokazać, że x jest parzyste. Ale: $S = x + 2w + 4k \Rightarrow S - 2w - 4k = x$. Z założenia o parzystości S dostajemy parzystość x. A więc wyjściowy prostokąt jest także „dobry", co należało pokazać. $\square$

W zadaniach olimpijskich często jednej dobrej techniki używamy razem z inną. A więc zasada szufladkowa razem z redukcją modulo liczby pierwsze, podobieństwo razem z warunkiem opisania okręgu na czworokącie, kolorowanie łącznie z przeliczaniem zbiorów itd. Zobaczmy przykład zadania z Olimpiady Międzynarodowej, gdzie także napotykamy połączenie kilku technik: kluczową rolę odgrywa jednak parzystość.

Zadanie 7. *Załóżmy, że dany jest zbiór 2011 liczb całkowitych dodatnich, niekoniecznie różnych, przy czym zakładamy, że żadna z nich nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23. Udowodnić, że w zbiorze tym możemy zawsze znaleźć 4 elementy takie, których iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.*

Dowód. Na początku upewnijmy się, że dobrze rozumiemy zadanie. Mamy 2011 jakiś liczb całkowitych dodatnich. Co to znaczy, że nie mają one dzielników pierwszych większych niż 23? Każda liczba całkowita dodatnia rozkłada się jednoznacznie na iloczyn liczb pierwszych. Np.

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7^1, \quad 111 = 3^1 \cdot 37.$$

Liczba 28 spełnia warunki zadania. Liczba 111 już nie. Oczywiście liczba, która nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23 może być dowolnie duża. Wystarczy wziąć kolejne potęgi 2, aby sie o tym przekonać... Tyle komentarza. Czas na pierwsze obserwacje.

Weźmy dowolną liczbę z naszego zbioru i rozłóżmy ją na czynniki pierwsze. Wówczas ma ona postać:

$$2^{f_1} \cdot 3^{f_2} \cdot 5^{f_3} \cdot 7^{f_4} \cdot 11^{f_5} \cdot 13^{f_6} \cdot 17^{f_7} \cdot 19^{f_8} \cdot 23^{f_9}, \tag{2}$$

przy czym f_i to pewne liczby całkowite nieujemne. Pytanie: skąd wiemy, czy nasza liczba ma na przykład dzielnik 3? Może nie ma? Jeśli nie ma, to $f_2 = 0$. Wiadomo, że innych dzielników pierwszych niż 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 elementy naszego zbioru nie mają. No to mamy taki rozkład jak wyżej. No a teraz interesuje nas iloczyn czterech liczb postaci takiej, jak (2). I do tego iloczyn ten ma być czwartą potęgą. Brzmi okropnie. Zamiast tego pomyślmy na początek kiedy iloczyn dwóch liczb postaci (2) może być kwadratem liczby całkowitej.

Kwadraty liczb całkowitych mają pewną dodatkową własność, jeśli mowa o rozkładzie na czynniki pierwsze. Otóż, jeśli $n = m^2$ i, na przykład n dzieli się przez 3, to n musi dzielić się przez 3^2. A jeśli dzieli n się przez 5^3, to musi dzielić się przynajmniej przez 5^4. Dlaczego? Zauważmy, że rozkład n na czynniki pierwsze powstaje z rozkładu liczby m na czynniki pierwsze, przy czym wykładnik przy każdej potędze jest podwojony. Na przykład jeśli:

$$m = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 37, \quad \text{to rozkład liczby } n = m^2 \text{ ma postać } n = 2^6 \cdot 3^{10} \cdot 37^2.$$

A więc kluczowa obserwacja: liczba całkowita n jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze postaci:

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$$

każda z liczb $s_1, s_2, \dots, s_k$ jest parzysta!

Jak to zastosować w naszym zadaniu? Mamy dwa elementy naszego 2011-elementowego zbioru, postaci:

$$2^{f_1} \dots 23^{f_9}, \quad 2^{g_1} \dots 23^{f_9}.$$

Ich iloczyn, a więc:

$$2^{f_1+g_1} 3^{f_2+g_2} \dots 23^{f_9+g_9}$$

będzie kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy:

- f_1, g_1 będą tej samej parzystości **i**
- f_2, g_2 będą tej samej parzystości **i**
- $f_3, g_3 \dots$
- ...

A więc właściwie nawet nieważne jakie są te liczby f_i, g_j! Ważna jest jednakowa ich parzystość.

Teraz kluczowa sztuczka. Jak mamy tę naszą liczbę n ze zbioru 2011 liczb całkowitych postaci: $2^{f_1} \dots 23^{f_9}$, to jej przyporządkowujemy 9 członową informację $f(n)$ o parzystości wykładników. W jaki sposób? Zobaczmy na przykładzie. Liczba $2^{10}3^5 17^1 23^{111}$ ma wykładniki

$$f_1 = 10, f_2 = 5, f_3 = 0, f_4 = 0, f_5 = 0, f_6 = 0, f_7 = 1, f_8 = 0, f_9 = 111,$$

a więc przyporządkowujemy jej ciąg postaci: (p,n,p,p,p,p,n,p,n), przy czym p na oznacza, że wykładnik jest parzysty (także w przypadku wykładnika 0), a n oznacza nieparzystość. Formalny zapis może wyglądać bardziej uciążliwie, ale zobaczmy go chociaż raz: nasza informacja $f(n)$ o liczbie $n = 2^{f_1} \dots 23^{f_9}$ to ciąg 9 elementowy postaci $(p_1, p_2, \dots, p_9)$, przy czym $p_i \in \{p, n\}$ i $p_i = p$ wtedy i tylko wtedy, gdy f_i jest parzysta. I to jest nasz niezmiennik, którym rozwalimy całe zadanie.

Istotnie, zauważcie, że jeśli pomnożę dwie liczby n, m, to iloczyn jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) = f(m)$, a więc gdy informacje parzystości ich wykładników są takie same. No ale ktoś powie: no to super, ale tyle różnych informacji, ile liczb... Niekoniecznie! Informacji jest znacznie mniej niż 2011 i to będzie klucz do rozwiązania.

No to teraz policzmy: ile jest możliwych różnych informacji? Kombinatoryka podpowiada, że różnych ciągów dziewięcioelementowych o 2 możliwych wyrazach jest 2^9, czyli 512. No to teraz tak: jak mam 2011 różnych liczb, to wśród dowolnych 513 mam dwie o tej samej informacji, a więc ich iloczyn jest kwadratem. Ok, to nazywam je a_1, b_1 i wyrzucam z tych 2011. Zostaje mi 2009. Wśród nich znowu wybieram dwie o tej samej informacji, nazywam a_2, b_2 i wyrzucam. Jak długo mogę tak robić? Póki mam przynajmniej 513 liczb do dyspozycji. A więc ile par a_i, b_i utworzę? 2011 - 513 = 1498, a więc 749.

Reasumując: w zbiorze 2011 liczb całkowitych, gdzie żadna nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23 znalazłem 749 par a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots a_{749}, b_{749}$ takich liczb, że $a_i b_i$ jest kwadratem liczby całkowitej. Ok, ale na starcie miałem znaleźć nie 749 par liczb, tylko 4 liczby, których iloczyn będzie czwartą potęgą! Okazuje się, że właściwie już je mamy.

Nasze odnalezione 749 kwadratów nazwijmy $c_1, c_2, \ldots, c_{749}$. Jest jasne, że są to takie liczby, których dzielniki pierwsze są nie większe niz 23. Rozważmy teraz ich pierwiastki:

$$\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \ldots, \sqrt{c_{749}}.$$

Wiadomo, że możemy wybrać takie dwie $\sqrt{c_k}, \sqrt{c_j}$, że mają one tę samą informację o parzystości wykładników (no bo 749 to znacznie więcej niż 513...). Zatem $\sqrt{c_k}\sqrt{c_j} = n^2$, dla pewnego n. Stąd $c_k c_j = n^4$. Ale $c_k c_j = a_k b_k a_j b_j$. Stąd iloczyn elementów a_k, b_k, a_j, b_j, należących do początkowego zbioru 2011 liczb całkowitych dodatnich jest w istocie 4 potęgą liczby całkowitej. $\square$

Powyższe zadanie nie było już proste, prawda? Widać, że był tu rozkład na czynniki, zasada szufladkowa (wielokrotnie stosowana), trochę algebry. Tak to jest, że aby rozwiązywać zadania olimpijskie trzeba najpierw nauczyć się podstawowych sztuczek, a potem jeszcze nauczyć sie kombinować je ze sobą.