Nierówność trójkąta

V Warsztaty Matematyczne I LO — wrzesień 2011

Celem tego wykładu jest przedstawienie kilku przykładów zastosowań nierówności trójkąta do rozwiązywania zadań geometrycznych. Materiał przygotowałem w oparciu o znakomitą serię „Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses” autorstwa Xu Jiagu, a także: „Geometric problems on maxima and minima” autorstwa Titu Andreescu, Olega Mushkarova i Luchezara Stoyanova oraz skrypt z geometrii autorstwa Tomka Tkocza (doktoranta na MIMUW).

* * *

Nierówność trójkąta jest jednym z podstawowych narzędzi w geometrii. Stosowana jest często wtedy, gdy w zadaniu należy wykazać pewną nierówność, zwłaszcza jeśli jest to tzw. „ostra nierówność”. Będziemy posługiwali się następującym jej sformułowaniem.

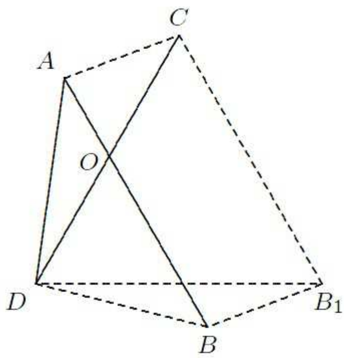
Twierdzenie 1. *Niech A, B, C będą punktami na płaszczyźnie. Wówczas:*

$$|AB| + |BC| \geqslant |AC|, \quad |AC| + |BC| \geqslant |AB|, \quad |AC| + |AB| \geqslant |BC|,$$

przy czym równość zachodzić może wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C są współliniowe.

Na pozór nie da się osiągnąć wiele za pomocą samej tylko nierówności trójkąta. Jej zastosowanie związane jest bardzo często z ważną techniką rozwiązywania zadań geometrycznych zwaną potocznie – dorysowywaniem. Obejrzyjmy pierwszy przykład.

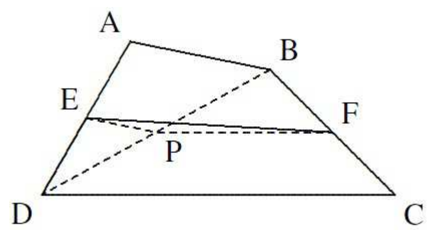
Zadanie 1. *Na płaszczyźnie dane są odcinki AB, CD długości 1, które przecinają się w punkcie O. Udowodnić, że jeśli kąt AOC ma miarę $60°$, to $|AC| + |BD| \geqslant 1$.*



Dowód. Z pozoru rysunek niewiele wnosi do sytuacji. A im więcej się ma wiedzy, tym bardziej nam to może zaszkodzić. „A może teraz oznaczyć wszystkie kąty, załadować twierdzenia sinusów, albo wrzucić wszystko w układ współrzędnych?” - jeśli takie myśli chodzą Wam po głowie jest to, delikatnie rzecz ujmując, objaw chorobowy ;) Wystarczy nierówność trójkąta. **Kluczowa sztuczka: przenieść jeden z odcinków tak, by znalazł się obok drugiego.** Istotnie, niech B_1 będzie takim punktem na płaszczyźnie, ze $AB||CB_1$ i $|CB_1| = 1$. Wówczas czworokąt ACB_1B jest równoległobokiem i $|AC| = |BB_1|$. Odcinek AC został więc przeniesiony. Teraz wystarczy połączyć odcinki B_1 i D, aby stwierdzić, że trójkąt CB_1D jest równoboczny i każdy z jego boków ma długość 1. Zatem $|AC|+|BD| = |BB_1|+|BD| \geqslant 1$ na mocy nierówności trójkąta. Równość zachodzi wtedy, gdy punkty A i C pokrywają się. □

W wielu olimpijskich z geometrii wystarcza sprytne dorysowanie lub zauważenie przydatnych przystawań/podobieństw trójkątów. Sprawy te są ze sobą ściśle związane, bo czasem przydatne przystawania powstają dopiero po dorysowaniu. Pojawia się zatem pytanie: skąd właściwie wiadomo co należy dorysować? Odpowiedź brzmi: nie zawsze wiadomo. Czasami dorysowanie potrafi być bardzo sprytne. Są jednak pewne podstawowe chwyty. Są one związane z podstawowymi przekształceniami płaszczyzny: izometriami takimi jak przesunięcie (zadanie wyżej), obrót, symetria. Jaka jest cecha wspólna tych przekształceń? Zachowują one długości odcinków i kąty, które są dane w zadaniu. Sprytne dorysowanie potrafi dane, pozornie od siebie niezależne, łatwo związać. Co to znaczy związać? Czasami oznacza – przenieść do jednego trójkąta, czasami - przenieść na jedną łamaną... Pierwszy przykład widzieliśmy w zadaniu wyżej: przy pomocy prostego przesunięcia związaliśmy ze sobą długości wszystkich interesujących nas odcinków tak, że trafiły one do jednego trójkąta. Podobne sztuczki stosować będziemy w kolejnych zadaniach.

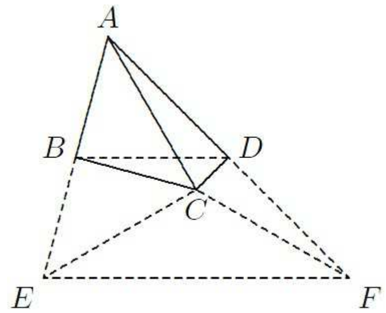
Zadanie 2. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o tej własności, że $AB \not\parallel CD$. Niech E, F będą środkami boków AD, BC. Udowodnić, że $|EF| < \frac{|AB|+|CD|}{2}$.*



Dowód. Kluczowa sztuczka to spojrzeć na środek przekątnej BD, nazwijmy go P. Z Twierdzenia Talesa widzimy, że odcinki PE, PF są równoległe odpowiednio do boków AB, CD naszego czworokąta. Co więcej, ich długości to odpowiednio $\frac{1}{2}|AB|$, $\frac{1}{2}|CD|$. Zatem teza wynika znowu z nierówności trójkąta. □

Twierdzenie Talesa, zwłaszcza wersja dotycząca środków boków jest często wykorzystywanym narzędziem. Obejrzyjmy jeszcze jeden przykład, odrobinę trudniejszy od poprzedniego.

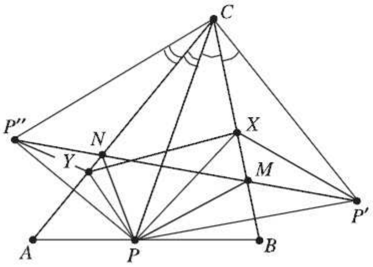
Zadanie 3. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym kąty $\angle ABC = \angle ADC$ wynoszą po $90°$, zaś $\angle BCD > \angle BAD$. Wykaż, że $|AC| > |BD|$.*

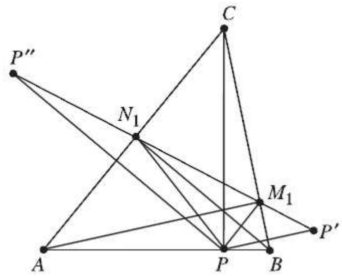


Dowód. Po raz kolejny dowodzimy nierówność i znowu nie narzuca się nam wcale nierówność trójkąta. Podobnie jak w poprzednich zadaniach konieczne będzie przeniesienie gdzieś jednej z rozważanych odległości. Pomysł jest następujący: **sprawić, by odcinek AC stał się promieniem pewnego okręgu.** Widząc, że czworokąt $ABCD$ ma dwa kąty proste możemy to zrobić w następujący sposób: wydłużamy dwukrotnie bok AB oraz AD. Inaczej mówiąc: definiujemy punkty E, F na przedłużeniach półprostych AB oraz AD takie, że $2|AB| = |AE|$ oraz $2|AD| = |AF|$. W ten sposób punkt C staje się środkiem okręgu opisanego na trójkącie AEF. W czym nam to może pomóc? Zauważmy, że $|BD| = \frac{1}{2}|EF|$. Wynika to natychmiast z twierdzenia Talesa. No i koniec: przecież z nierówności trójkąta mamy: $2|AC| = |CE| + |CF| > |CF| = 2|BD|$. □

Zadanie 4. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na boku AB obieramy punkt P. Znaleźć na bokach BC, CA takie punkty X, Y, aby obwód trójkąta XYP był minimalny.*

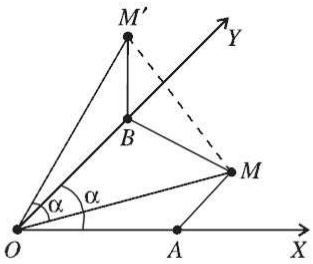
Dowód. Tym razem wydaje się, że nie mamy zbyt wielu danych. Dobór odpowiednich punktów wydaje się nie mieć żadnego związku z nierównością trójkąta. W zadaniach, gdzie trzeba coś minimalizować nierzadko stosujemy następującą sztuczkę: **zakładamy, że znamy minimalną konfigurację i patrzymy, czy nie da się zrobić nic mniejszego**. Jak to zrobić? załóżmy, że mamy punkty X, Y takie, że obwód trójkąta XYP jest minimalny. Spróbujmy zobaczyć obwód trójkąta XYP w trochę innej konfiguracji. Trik jest taki: **odbijamy punkt P symetrycznie względem boków trójkąta BC** i **CA** uzyskując punkty P' i P''.





Co to daje? Zauważmy, że że obwód trójkąta XYP równy jest długości łamanej: $P'XYP''$, a więc sumie: $|P'X|+|XY|+|YP''|$. Zgodnie z nierównością trójkąta jest ona niemniejsza niż $|P'P''|$. Równość zachodzi wówczas, gdy punkty X, Y leżą na prostej $P'P''$. No ale X, Y minimalizowały obwód XYP. Zatem są to po prostu punkty przecięcia odcinka $P'P''$ z bokami BC i CA trójkąta ABC. □

Zadanie 5. *Dany jest punkt O oraz półproste l, m wychodzące z punktu O tworzące wraz z nim kąt ostry α. Punkt M leży wewnątrz tego kąta. Znajdź takie punkty A, B leżące odpowiednio na półprostych l, m, że $|OA| = |OB|$ przy czym $|MA| + |MB|$ jest minimalna.*



Dowód. Początek jest podobny do poprzedniego zadania. Musimy założyć, że mamy jakieś rozwiązania - a więc punkty A, B minimalizujące sumę $|MA| + |MB|$. Spróbujmy odnaleźć sumę $|MA| + |MB|$ w nieco innej konfiguracji. Tym razem sztuczka polega na obrocie. Jest to kolejne przekształcenie nie zmieniające odległości. Dokładniej, dokonujemy obrotu o kąt α. W ten sposób obraz punktu A pokrywa się z punktem B. Przyjmijmy, że obraz punktu M to M'. Zauważmy, że $|MA| + |MB| = |MB| + |M'B|$. Zgodnie z nierównością trójkąta suma ta jest minimalna jeśli punkty M, B, M' leżą na jednej prostej. □

Zadanie 6. *Dany jest kąt XOY oraz punkt A na prostej OX. Znajdź punkty M, N na prostych OY oraz OX, że suma $|AM| + |MN|$ jest minimalna.*

Dowód. Tym razem trudność tkwi w zastanowieniu się o co tak naprawdę w zadaniu chodzi. Na początku potrzebna jest pewna doza eksperymentu. Jak sprawa wygląda dla małych kątów? A jak dla dużych? Czy mamy jakieś obserwacje? Np. gdy kąty są bardzo małe widzimy, że punkty M, N będą „stosunkowo blisko" punktu A. Ale jeśli już, na przykład kąt XOY będzie rozwarty, to bardziej najbardziej opłaca się wziąć $M = N = O$. Pierwsze pytanie zatem brzmi: od jakiego kąta opłaca się opuścić wierzchołek kąta i trzeba szukać punktów M i N w bardziej nieoczekiwanych miejscach?

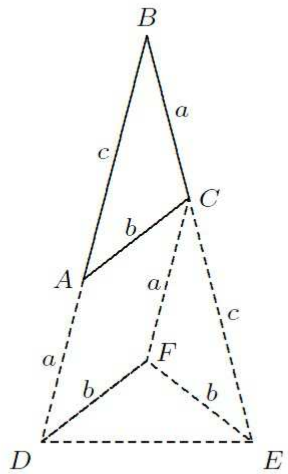
Aby odpowiedzieć na to pytanie należy wykonać kluczową sztuczkę: poszukać sumy $|AM| + |MN|$ w innym miejscu. Podobnie postąpiliśmy w poprzednim zadaniu. Tutaj **sztuczka polega** nie na przesunięciu, ale **na odbiciu**. Rozważmy obraz prostej OX w symetrii względem osi OY. Widzimy, że powstaje nowa prosta OY' i leży na niej obraz N' punktu N. Kluczowa obserwacja: $|MN| = |MN'|$. A skoro tak, to także $|AM| + |MN| = |AM| + |MN'|$. To znacznie ułatwia rozważanie problemu: kiedy $|AM| + |MN|$ może być mniejsze od AO. Zauważmy, że dopóki kąt AON' jest nie mniejszy niż kąt prosty, wówczas na mocy nierówności trójkąta $|AM| + |MN'| \geqslant |AN'| \geqslant |AO|$, przy czym równość zachodzi gdy $N' = M = O$. Zatem prawdziwe poszukiwania zaczniemy dopiero w przypadku, gdy kąt XOY będzie mniejszy niż 45°.

Co ciekawe – sztuczka, która pozwoliła nam odnaleźć potencjalne „problematyczne kąty" pozwala też rozwiązać zadanie. Nierówność $|AM| + |MN'| > |AN'|$ zachodzi niezależnie od rozwartości kąta XOY. A więc kiedy $|AM| + |MN'|$ będzie najmniejsze? Jeśli punkty A, M, N' będą współliniowe! No dobrze, czyli teraz wszystko zależy od tego gdzie położymy N'. Ale jasne jest, że najkrótszym odcinkiem łączącym punkt A z prostą OY' jest odcinek AX, gdzie X jest rzutem prostokątnym punktu A na OY'. No i tyle. Widzimy, że kluczową rolę w rozwiązaniu tego zadania odgrywa nie znalezienie kąta, ale umiejętne zastosowanie nierówności trójkąta. □

Zadanie 7. *Niech boli BC, CA, AB trójkąta ABC mają długości, odpowiednio: a, b, c. Załóżmy, że $b < \frac{1}{2}(a+c)$. Wykaż, że $\angle B < \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$.*

Dowód. W tym przypadku wydaje się, że jesteśmy zupełnie w kropce. Bardziej zaawansowanym może się wydać, że potrzeba tu będzie znowu stosować twierdzenia sinusów, czy jakieś inne podobne wynalazki. Wiemy tylko tyle: $2b < a+c$. Ale właściwie o czym nam mówi 2b? No i co tak naprawdę oznacza warunek, który mamy udowodnić?

Zacznijmy od odpowiedzi na drugie pytanie. Teza zadania jest równoważna z faktem, że: $2\angle B < \angle A + \angle C$. Wiedząc ile wynosi suma kątów wewnętrznych w trójkącie bez trudu zobaczymy o co tak naprawdę chodzi. Pytamy, czy $\angle B < 60°$?



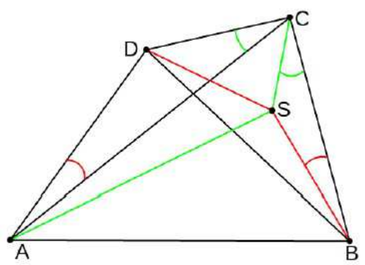
Kluczowa sztuczka to dorysowanie. Ale tym razem całkiem sprytne. Otóż, skoro w naszych założeniach pojawia się wielkość a + c, to spróbujmy ją gdzieś na rysunku wyprodukować. Kluczowy pomysł: przedłużamy odcinki BA oraz BC do odcinków BD, BE w taki sposób, że $|BD| = |BE| = a + c$. Na razie jeszcze nie widać co się stało. Załóżmy, że $a < b$. Niech F będzie takim punktem, że DF jest równoległy do AC, przy czym $|AC| = |DF|$. Co widzimy? Trójkąt DFE jest równoramienny, a jego ramię ma długość b. W szczególności, z nierówności trójkąta dostajemy: $|DF| < 2b$, a więc zgodnie z założeniem $|DE| < a + c = |DB|$. W ten sposób wszystkie wielkości mają swoje odpowiedniki na rysunku. Trzeba jednak przyznać, że powyższe dorysowanie wymaga nieco sprytu. A czy zadanie jest już zrobione? Skoro $|DF| < |DB|$, to $\angle B < \angle E$ (większy kąt leży naprzeciw większego boku). Stąd

$$2\angle B < 2\angle E = 180° - \angle B \Rightarrow \angle B < 60°.$$

□

Zadanie 8 (Nierówność Ptolemeusza)**.** *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Wówczas $|AC||BD| \leqslant |AB||CD| + |BC||DA|$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.*

Dowód. Nierówność Ptolemeusza jest jednym z zasadniczych narzędzi do rozwiązywania zadań olimpijskich. Aż trudno uwierzyć, że cała tajemnica tego twierdzenia tkwi w umiejętnym wykorzystaniu nierówności trójkąta. Rozumowanie jest znowu takie same: poszczególne iloczyny długości odcinków przenieść w „wygodniejsze" dla nas miejsce. W przypadku, gdy chcemy zachować iloczyn długości, a nie sumę, do dyspozycji mamy nie tylko izometrie, ale także proporcje. Innymi słowy – naszym zadaniem będzie odnaleźć, np. iloczyn $|AD||BC|$ przy pomocy podobieństw.



Pomysł jest taki: rozważmy kąt $\angle DCB$. Jest on sumą kątów $\angle DCA$ oraz $\angle ACB$. Załóżmy, że $\angle DCA < \angle ABC$. Stąd wewnątrz kąta ACD istnieje punkt S taki, że trójkąty ADC oraz BSC są podobne. Innymi słowy równe są kąty: $\angle DAC = \angle SBC$, $\angle DCA = \angle SCB$. Co nam po takim podobieństwie? Otóż $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BS|}{|BC|}$, a więc

$$|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BS|. \tag{1}$$

Jaka jest więc idea? Wszystkie iloczyny zakodować przy pomocy wierzchołków czworokąta i dodatkowego punktu S. Zauważmy, że podobne są także trójkąty DCS oraz ACB. Istotnie, kąty $\angle DCS$ oraz $\angle ACB$ są równe, co więcej $\frac{|CD|}{|CS|} = \frac{|AC|}{|BC|}$... Skoro $DCS \sim ACB$, to $\frac{|CD|}{|DS|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Zatem

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |DS|. \tag{2}$$

Dodając stronami (1) i (2) dostajemy:

$$|AB| \cdot |CD| + |CB| \cdot |AD| = |AC|(|DS| + |BS|).$$

Stosujemy nierówność trójkąta. Suma $|DS| + |BS|$ jest przecież niemniejsza od $|BD|$. Zatem istotnie:

$$|AB| \cdot |CD| + |CB| \cdot |AD| \geqslant |AC||BD|.$$

Równość zachodzi wtedy, gdy punkt S leży na przekątnej BD. Jest to równoważne równości kątów $\angle DBS = \angle DAC$, a więc równoważne możliwości opisania okręgu na czworokącie $ABCD$. $\square$

Zadanie 9. *W trójkącie ABC spełniona jest nierówność:*

$$\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) \leqslant 1.$$

Wynika stąd, że jeden z kątów trójkąta jest większy od $150°$.

Dowód. Odpowiedź: Niech $A \geqslant B \geqslant C$. Naprzeciw A leży a, naprzeciw B leży bok b, naprzeciw C bok c. Wówczas $a \geqslant b \geqslant c$. Z nierówności trójkąta mamy $b + c > a$. Z twierdzenia sinusów wynika zatem, że $\sin(B) + \sin(C) > \sin(A)$. Zatem $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) > 2\sin(A)$. Wynika stąd, że $\sin(A) < \frac{1}{2}$. Jest to największy kąt, a więc $A > 150°$. $\square$