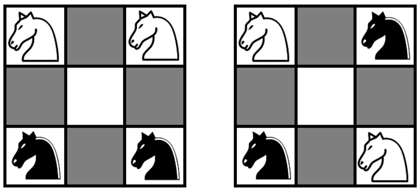
Od zagadek, przez olimpiadę do matematyki; na przykładzie grafów

XII Warsztaty Matematyczne I LO — wrzesień 2018

Cześć pierwsza. Zagadki i grafy przejścia

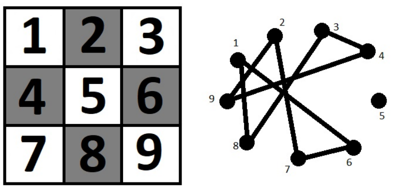
Łamigłówki to w pewnym sensie przedsionek matematyki. Właśnie tu, bardziej niż niemal gdziekolwiek indziej rozwija się matematyczna wyobraźnia (niekoniecznie zaś wiedza), kreatywne myślenie (a nie operowanie wzorami) oraz wytrwała dociekliwość (ważna cecha!). Grafy są obiektami, które łączą świat zagadek i świat matematyki. W samej matematyce czy informatyce ich znaczenie jest nie co przecenienia. To, co uderza nawet najtęższe umysły to elegancja z jaką przeformułować można w języku grafów najbardziej skomplikowane nawet problemy. Do tego potrzebna jest wyobraźnia i pomysłowość - kluczowe cechy, które ćwiczyć musi nieustannie każdy kto wchodzi na serio do świata matematyki. Grafy to także poligon do ćwiczeń wielu kluczowych wręcz typów rozumowań matematycznych, których znajomość konieczna jest niezależnie od zasobów naszej wiedzy: indukcji, zasady minimum czy maksimum, zasady szufladkowej czy rozumowania przez sprzeczność. Przyjrzymy się temu na trzech poziomach: zagadek, zadań olimpijskich i twierdzeń matematycznych. Cierpliwy Czytelnik zaproszony jest przede wszystkim do uświadomienia sobie jak niedaleka jest droga od pierwszych do ostatnich.

Zagadka 1. *Czy można, przy pomocy standardowych ruchów konika szachowego na szachownicy rozmiarów* 3×3 *przejść z ustawienia na rysunku po lewej do tego po prawej stronie?*

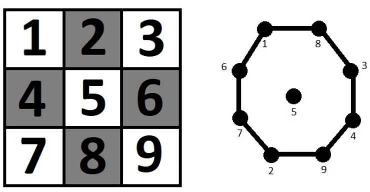


Kilka nieudanych prób sprawia, że stawiamy hipotezę o niemożliwości zamiany pozycji. Jak jednak pokazać, że istotnie nie jest to możliwe? Gdyby chcieć próbować przedstawić wszystkie konfiguracje jakie mogą wystąpić na szachownicach, potrzeba dużej cierpliwości. O ile nie pojawi się sprytny sposób ich przedstawienia. Przejdźmy na kolejną stronę, jeśli wyczerpaliśmy już samodzielne próby rozwiązania.

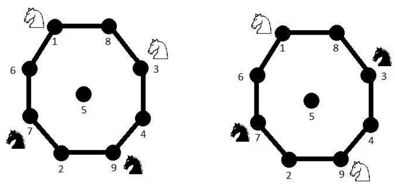
Wszystkie pola szachownicy numerujemy liczbami od 1 do 9. Obok sporządzamy rysunek złożony z dziewięciu kropek i łączących je kresek. Kropki ponumerowane są zgodnie z polami szachownicy, a kreski łączą te kropki, między którymi możliwe jest wykonanie ruchu. Oto rysunki.



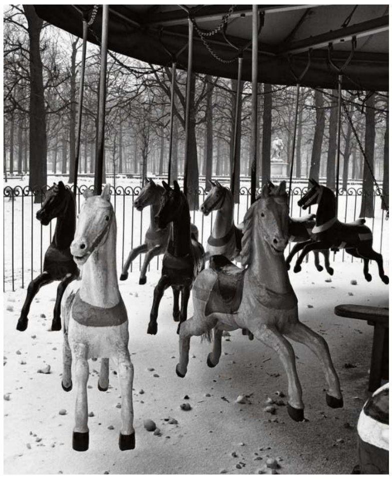
Czy Czytelnik widzi już jak rozwiązać zadanie? A może pomysł z kropkami i kreskami wydaje się absurdalny? Można go jeszcze ulepszyć. Zmieńmy kolejność wierzchołków, a dostrzeżemy coś ciekawego.



Teraz widzimy jasno istotę rzeczy. Okazuje się, że na obrazku reprezentującym ruch konika szachowego ruch dokonuje się w cyklu! Uważny Czytelnik mógł dostrzec to już wcześniej. Co to oznacza? Jak zastosować tę obserwację do rozwiązania problemu? Wykonajmy jeszcze jeden, ostatni już rysunek.

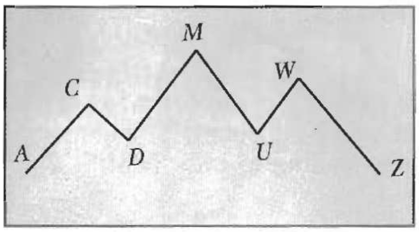


Oto rozwiązanie zagadki. W sytuacji po lewej stronie dwa białe konie nie są rozdzielone czarnym na cyklu utworzonym z ponumerowanych wierzchołków szachownicy. Natomiast na rysunku po prawej pomiędzy białymi końmi stoi czarny. Zmiana pozycji, czyli wykonanie ruchu na szachownicy nigdy nie prowadzi do zmiany kolejności występującej na niej koni. Mogą się one do siebie przybliżyć (albo ewentualnie zbić, jeśli trzymać się literalnie zasad szachowych). Sytuacja koni na naszej małej szachownicy, choć wydawała się skomplikowana, jest w istocie błędnym kołem, z którego figury nasze wyzwolić się nie mogą...



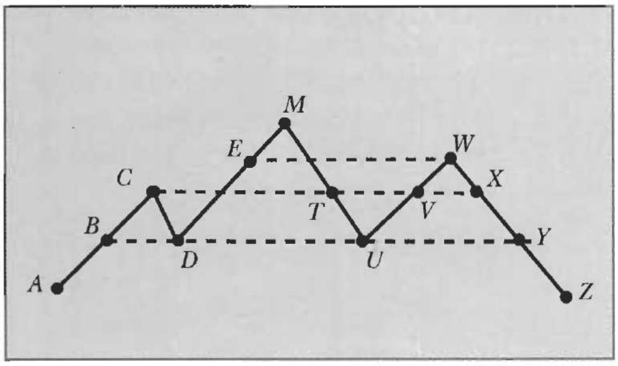
Powyższe rozwiązanie może się wydać nadmiernie skomplikowane - wszak jego istotę (kolejność koli i cykliczność) intuicyjnie wyczuwa się już na poziomie pierwszych prób jej rozwiązania. Elegancja jest zawsze sprawą gustu, tu natomiast posłużyła jako ilustracja pojęcia grafu. Przejdźmy do kolejnego przykładu.

Zagadka 2. *Dwóch wspinaczy porusza się po paśmie górskim przedstawionym na rysunku poniżej.*



Czy jest możliwe, żeby obydwaj wspinacze spotkali się na szczycie oznaczonym punktem M startując równocześnie odpowiednio z punktów A oraz Z tak, by w każdym momencie wspinaczki znajdować się na tej samej wysokości?

Oto rozwiązanie zagadki. Na nasze pasmo górskie nanosimy wszystkie punkty orientacyjne znajdujące się na wysokości jakiegokolwiek lokalnego szczytu lub doliny, jak na rysunku poniżej.



Oto oczekiwany sposób marszu: najpierw dochodzimy wspólnie do punktów C oraz X, następnie wspinacz A obniża się do punktu D, zaś wspinacz Z wraca do punktu Y. Następnie obydwoje kontynuują drogę w kierunku szczytu. Wspinacz A dochodzi do punktu E, zaś wspinacz Z do punktu W. W tym momencie wspinacz A wraca aż do punktu D, zaś wspinacz Z kontynuuje drogę do punktu U. Następnie obydwoje idą wprost na wierzchołek M i dochodzą nań pozostając przez całą drogę na tej samej wysokości.

Jak widać nie musieliśmy użyć żadnych grafów (wciąż zresztą nie wiemy czym one są!), nic trudnego. Tu jednak wkroczy do gry matematyka. Zadamy bowiem następujące pytanie.

Problem 1. *Pokazać, że problem opisany w Zagadce 2 ma pozytywne rozwiązanie niezależnie od przebiegu pasma górskiego zakładając jedynie, że wspinacze startują z dwóch najniższych punktów pasma i wspinają się na położony pomiędzy nimi najwyższy punkt.*

Gdy przeformułowujemy zagadkę na problem matematyczny potrzeba sporo czujności. Aby móc znaleźć opis naszej sytuacji musimy w sposób matematyczny opisać „bycie pasmem górskim”. Na nasze potrzeby przyjmiemy założenie, że pasmem górskim nazywamy łamaną na płaszczyźnie o początku w punkcie A i końcu w punkcie Z spełniającą dwa warunki: całość łamanej zawarta jest w jednej z półpłaszczyzn, na które prosta AZ dzieli płaszczyznę (ponieważ A oraz Z są najniższe) oraz łamana nie zawiera odcinka równoległego do prostej AZ. Te założenia są naturalnie pewnymi uproszczeniami. Moglibyśmy przecież zakładać, że pasmo górskie nie składa się jedynie z fragmentów odcinków, ale i fragmentów paraboli, czy wykresu wielomianu, albo jeszcze ogólniej - że jest to wykres pewnej funkcji ciągłej (o ile znamy takie pojęcie). Założenie o braku „lokalnych płaskowyżów” jest intuicyjnie zrozumiałe. Nawet przypadku tak ograniczonego pasma górskiego czeka nas trochę pracy. Problemów może być wiele - na przykład liczba szczytów pośrednich, skomplikowane wzajemne położenie dolin, położenie najwyższego punktu itd. Choć umielibyśmy zapewne rozwiązać (w skończonym czasie) zagadkę dla konkretnego pasma (to jest zagadka!) to rozwiązanie ogólnego problemu wymaga narzędzi matematycznych. Pierwszym krokiem jest następujący mały fakcik.

Zagadka 3. *W jubileuszu I LO uczestniczyło mnóstwo ludzi. Niektóre osoby podały sobie ręce. Pokazać, że liczba osób, która uścisnęła dłoń nieparzyście wielu uczestnikom imprezy jest parzysta.*

Rozwiązanie. Uczestników jubileuszu możemy podzielić na dwie kategorie. W pierwszej są ci, którzy uścisnęli dłoń parzystej liczbie osób, a w drugiej kategorii ci, którzy uścisnęli dłoń nieparzystej liczbie osób. Każdego uczestnika pytamy ilu osobom podał dłoń i wynik podany przez osobę X opisujemy jako $d(X)$. Zauważmy, ze po zsumowaniu wszystkich takich $d(X)$ dostajemy dwukrotną liczbę wszystkich uścisków dłoni. Policzyliśmy bowiem każdy z nich z perspektywy jednego i drugiego znajomego. Uzyskaną liczbę oznaczmy jako $2U$. Co się stanie jeśli pogrupujemy składniki $d(X)$ w dwie kategorie opisane na początku? W ten sposób $2U$ staje się sumą dwóch liczb P i N. Liczba P opisuje ile dłoni uścisnęły osoby, które uścisnęły dłoń parzystej liczbie osób, a liczba N opisuje ile dłoni uścisnęły osoby, które uścisnęły dłoń nieparzystej liczbie osób. Chcemy pokazać, że tych ostatnich jest parzyście wielu. Oto przyczyna: liczba P musi być parzysta, bo to suma liczb parzystych. Skoro $P + N = 2U$, to także N musi być parzysta, bo jest różnicą dwóch liczb parzystych. Ale N jest sumą liczb $d(X)$, gdzie każda z nich jest liczbą nieparzystą. A zatem składników tej sumy musi być parzyście wiele. Koniec.

Co ma wspólnego zagadka o wspinaczach i o uściskach dłoni? Łączy je pojęcie grafu.

Definicja 1. *Przez skończony graf nieskierowany $G = (V, E)$ rozumiemy zbiór wierzchołków V, który numerujemy zwykle liczbami od 1 do n wraz ze zbiorem krawędzi E, który formalnie rozumiemy jako podzbiór zbioru par niezorientowanych zbioru V.*

Mówiąc intuicyjnie, fakt, że wierzchołki i oraz j są połączone wyrażamy formalnie tak, że para $\{i, j\}$ należy do zbioru E. Mówimy wtedy, że krawędź $\{i, j\}$ jest incydentna z wierzchołkami i oraz j. Przykład grafu mieliśmy w rozwiązaniu zagadki pierwszej. Miał on dziewięć wierzchołków ponumerowanych liczbami od 1 do 9 oraz krawędzie postaci $\{1, 8\}, \{8, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 9\}, \{9, 2\}, \{2, 7\}, \{7, 6\}$ oraz $\{6, 1\}$. Po co taka definicja? Pozwala ona na formalnie wprowadzenia kluczowego pojęcia stopnia wierzchołka.

Definicja 2. *Stopniem wierzchołka v grafu G oznaczamy liczbę $d(v)$ krawędzi grafu G incydentnych z wierzchołkiem v.*

W grafie wykorzystanym w Zagadce 1 osiem wierzchołków miało stopień 2, a jeden (wierzchołek o numerze 5) miał stopień 0. Fakt, który sformułowaliśmy jako Zagadka 3 wyrazić można w następujący sposób.

Twierdzenie 1 (Lemat o uściskach dłoni)**.** *W każdym skończonym grafie mamy $2|E| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$. W szczególności jest parzyście wiele wierzchołków nieparzystego stopnia.*

Zilustrujmy to twierdzenie następującą zagadką. Wprowadzi ona jeszcze jedną ważną metodę przydatną do rozwiązania problemu wspinaczy.

Zagadka 4. *W pewnym królestwie z każdego miasta wychodzi setka dróg prowadzących do innych miast. Z każdego miasta można dotrzeć do jakiegokolwiek innego. Pewnego dnia jedna z dróg psuje się i musi być zamknięta do remontu. Udowodnić, że mimo to w królestwie tym dalej można dotrzeć z każdego miasta do każdego.*

Zagadka może sprawić trudność osobie nie znającej teorii grafów. Oto rozwiązanie. Załóżmy, że droga zepsuła się między miastami A oraz B. Chcemy pokazać, że mimo to można dotrzeć do B z A. Wyobrażamy sobie rozkład miast i dróg w tym królestwie po zamknięciu tej jednej drogi jako graf G. Kluczowy pomysł jest następujący: rozważamy mniejszy graf G_A, który opisuje **dokąd można dotrzeć z miasta A po zamknięciu drogi**. Taki graf nazywamy spójną składową wierzchołka A. To całkiem sprytny obiekt. To dzięki niemu użyjemy lematu o uściskach dłoni! Chcemy pokazać, że B należy do tego mniejszego grafu. Gdyby było inaczej, wówczas w G_A byłby jeden wierzchołek nieparzystego stopnia - czyli A (wychodzi z niego 999 dróg) i same wierzchołki parzystego stopnia (wychodzi z nich po 1000 dróg). To jest jednak niemożliwe na mocy naszego twierdzenia. A zatem B musi należeć do G_A. Wszystkie inne miasta są połączone, a zatem zagadka jest rozwiązana.

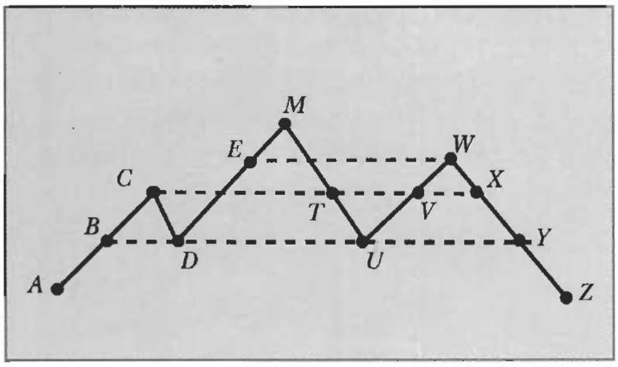
Pojęcie składowej spójnej to jedno z zasadniczych w teorii grafów. Innymi słowy: w sieci połączeń interesuje nas czasem nie cała sieć, ale tylko system osiągalny z danego punktu. Ten sam typ rozumowania przeprowadzimy teraz dla wspinaczy - konstrukcja samego grafu będzie jednak znacznie bardziej pomysłowa. Trzeba stworzyć graf opisujący drogę dwójki ludzi na szczyt i to niezależnie od pasma górskiego, przy założeniach przyjętych wyżej. Oto jak to zrobić.

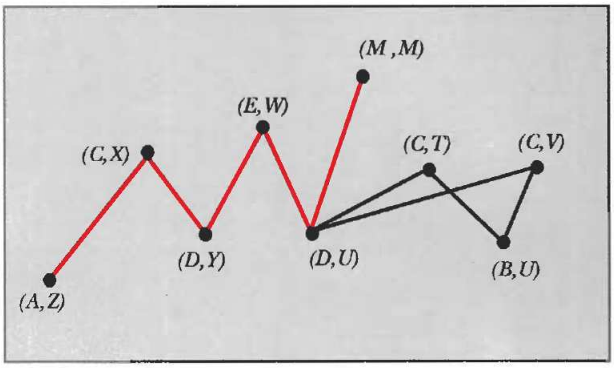
Na naszym paśmie górskim zaznaczamy wszystkie punkty, które są na tej samej wysokości co lokalny szczyt lub doliną (czyli można z niego iść tylko do góry). Formalnie mówiąc prowadzimy proste równoległe do AZ przechodzące przez wszystkie wierzchołki $A, Q_1, \ldots, Z$ łamanej i oznaczamy punkty, które w ten sposób powstają. Nazwijmy je jako $P_1, \ldots, P_n$ To samo zrobiliśmy rozwiązując Zagadkę 2. Teraz tworzymy graf. Jego wierzchołkami są WSZYSTKIE pary punktów postaci (X, Y), gdzie X, Y:

- leżą po dwóch stronach punktu M
- są na tej samej wysokości
- jedno z nich jest wierzchołkiem lub doliną.

Do tak utworzonego zbioru dołączamy parę (M, M). O co tu chodzi? Co to za dziwna konstrukcja? Te pary punktów opisują potencjalną sytuację, gdy dwóch wspinaczy trafia na (tę samą) wysokość, w której jeden z nich będzie musiał zmienić sposób marszu: albo z podchodzenia na schodzenie, albo odwrotnie (być może obydwoje będą musieli to zrobić). Wyjątkiem jest sytuacja startu w trasę i moment ewentualnego spotkania na szczycie.

Mamy więc wierzchołki grafu. Jak wyglądają krawędzie? Wierzchołki postaci (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) wolno połączyć tylko wtedy gdy możliwy jest by wspinacze przeszli odpowiednio z X_1 do X_2 oraz z Y_1 do Y_2 nie zmieniając sposobu marszu (a więc po drodze nie ma szczytu ani doliny). Innymi słowy krawędzie opisują ruch pary wspinaczy, a wierzchołki ich wzajemne położenie. Trochę to skomplikowane, ale rysunek poniżej pokazuje odpowiedni graf dla sytuacji z Zagadki 2:





Zobaczmy jak proste jest teraz jej rozwiązanie. Obydwaj wspinacze startują w punkcie (A, Z) i muszą dojść po naszym grafie do punktu (M, M). Jeśli są to w stanie zrobić, wówczas sprawa jest rozwiązana tak, jak na rysunku wyżej. Okazuje się jednak, że dla różnych pasm górskich graf może być bardzo skomplikowany. Może składać się z wielu rozdzielonych od siebie kawałków! Istotnie, zauważmy, że jeśli mamy wierzchołek postaci (szczyt, dolina), to nie może do niego prowadzić żadna krawędź!!! Nie mamy więc pewności, że punkt (A, Z) połączony jest z (M, M). A zatem pytanie brzmi: czy punkt (M, M) należy do składowej spójnej grafu przejścia, zawierającej punkt (M, M). Tego rodzaju problem rozwiązywaliśmy wyżej w przypadku zagadnienia dróg w królestwie. Znowu korzystamy z twierdzenia o uściskach dłoni.

Wyznaczmy stopnie wszystkich wierzchołków grafu, który skonstruowaliśmy dla naszego pasma górskiego. Mamy następujące przypadki:

- punkt startowy (A, Z). Z tego punktu wspinacze mogą wykonać tylko jeden ruch: wspólnie do góry. A zatem ma on stopień 1.
- punkt opisujący położenie na szczycie: (M, M). To punkt, do którego wspinacze muszą dojść. Również ma stopień 1.
- punkt (P, Q), gdzie obydwa położenia są szczytem lub obydwa są doliną. Stopień wynosi 4.

- punkt (P, Q), gdzie jedno położenie to dolina a drugie to szczyt ma stopień 0.
- punkt, gdzie jedno położenie to dolina lub szczyt, a drugie nie jest ani jednym ani drugim ma stopień 2.

Wszystkie te obserwacje sprowadzają się do następującego wniosku: w całym grafie opisującym dowolny dozwolony łańcuch górski są tylko dwa wierzchołki nieparzystego stopnia: (A, Z) oraz (M, M) - czyli te pomiędzy którymi chcemy przeprowadzić trasę. A zatem muszą one być połączone drogą. W przeciwnym razie rozważylibyśmy mniejszy od wyjściowego grafu podgraf złożony jedynie z punktów i krawędzi, do których można dojść z (A, Z). Gdyby ten podgraf nie zawierał (M, M) to miałby jeden wierzchołek nieparzystego stopnia. To jest zaś niemożliwe, bo musi ich mieć parzyście wiele.

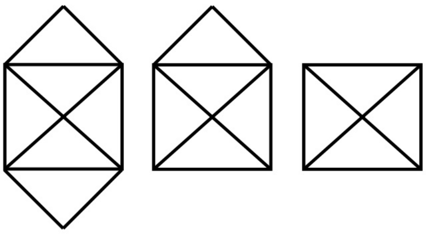
Zadania domowe, dzień 1.

Zagadka 5. *Na płaszczyźnie znajduje się pewna liczba prostych. Udowodnić, że liczba prostych, które przecinają nieparzystą liczbę prostych pod kątem mniejszym niż* 30° *jest parzysta.*

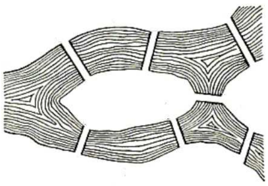
Zagadka 6. *Czy istnieje wielościan taki, że liczba jego ścian jest nieparzysta, a każda ściana ma nieparzystą liczbę krawędzi?*

Zagadka 7. *Czy jest możliwe narysowanie na płaszczyźnie 1000001 okręgów o promieniu* 1 *tak, by każdy okrąg przecinał dokładnie trzy inne okręgi?*

Zagadka 8. *Które z poniższych figur można narysować bez odrywania ręki od kartki papieru i bez powtórzeń?*

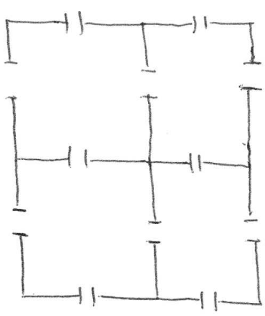


Zagadka 9. *W pewnym mieście jest 7 mostów zgodnie z rysunkiem podanym poniżej.*



Jego mieszkańcy zastanawiają się czy mogą opuścić dom, przejść każdy most dokładnie raz i wrócić do domu? Pomóż im znaleźć odpowiedź.

Zagadka 10. *Rozważmy mieszkanie czteropokojowe o następującym planie.*



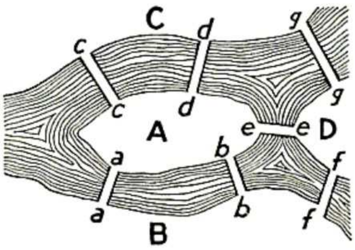
Czy możliwe jest znalezienie ścieżki przechodzącej przez wszystkie drzwi (także zewnętrzne) dokładnie raz?

Część II. Trójkąty, czworokąty i cykle

Na dzisiejszych zajęciach zobaczymy szereg zadań w których wykorzystuje się już bezpośrednio pojęcie grafu i jego strukturę. W zasadzie potrzebować będziemy często niewiele więcej niż lematu o uściskach dłoni, a jednak jest to rezultat głębszy niż się wydaje. Poznamy nowe pojęcia i wyniki dotyczące struktur grafów. Zacznijmy jednak od zadań domowych. Zadania 5-7 to bezpośrednie przeformułowania lub zastosowania lematu o uściskach dłoni. Jednak zadania o rysowaniu czy znajdowaniu ścieżek mogą już sprawić pewne zakłopotanie. Kto jednak dobrze zrozumiał pojęcia stopnia wierzchołka powinien sobie poradzić.

W języku grafów wszystkie z zagadnień poruszonych w zadaniach 8-10 to problemy znajdowania tzw. cyklu Eulera. Jest to taka zamknięta droga w grafie, która przechodzi każdą krawędź dokładnie raz. Na tym polega istota „nie odrywania ręki" przy rysowaniu konfiguracji w zadaniu 8, na tym polega przechodzenie pomiędzy różnymi częściami miasta (które traktujemy jako wierzchołki) i mostami (które traktujemy jako krawędzie) czy pomiędzy różnymi częściami domu. Do jakich konkluzji udało się dojść?

Rozwiążmy zadanie 8. Odpowiedź jest negatywna: nie można przejść przez wszystkie mosty w jednym spacerze dokładnie raz. Spójrzmy na nasz rysunek i oznaczmy cztery składowe lądu oddzielone rzeką.



Kluczowa obserwacja jest prosta. Gdyby szukany tor istniał, musiałby do każdego wierzchołka wchodzić tyle razy ile z niego wychodzi. A więc liczba krawędzi schodzących się w każdym wierzchołku musiałaby być parzysta. Graf przedstawiający mapę naszego miasta nie spełnia tego warunku. Wierzchołek A ma stopień 3, B ma stopień 5, C ma stopień 3, podobnie i D. Szukana droga nie może zatem istnieć. Warto zauważyć, że w rozważanym grafie pomiędzy dwoma wierzchołkami prowadzi się więcej niż jedną krawędź. Grafy, w których taka sytuacja nie występuje, i w których dodatkowo nie ma pętli, czyli krawędzi wychodzących i wchodzących do tego samego wierzchołka, nazywamy **prostymi**.

Wracając do naszych zagadek: matematyk bez wątpienia zada problem natury ogólnej: **czy jeśli graf ma same wierzchołki parzyste, to znajdzie się w nim cykl Eulera**? Czy wtedy da się znaleźć ścieżkę idącą przez każdą krawędź tylko raz? To jest zagadnienie odwrotne do rozumowania, w którym testowaliśmy konkretne przypadki przy pomocy pewnego kryterium (warunku koniecznego). W tym przypadku dotykamy podobnego problemu jak w zagadnieniu wspinaczy rozważanym wcześniej. Nie mamy już do czynienia z konkretnym grafem, ale z pytaniem o dowolny graf. Okazuje się, że istotnie warunek parzystości wszystkich wierzchołków jest wystarczający i warto zobaczyć pouczający dowód.

Twierdzenie 2 (Euler)**.** *Skończony graf spójny, którego rzędy wierzchołków są parzyste ma cykl Eulera.*

Dowód. Załóżmy, że startujemy w wierzchołku A naszego grafu. Tworzymy tor Q prowadząc go z A tak długo, jak o jest możliwe, wychodząc zawsze z wierzchołka na krawędź, którą jeszcze nie przechodziliśmy. Postępowanie to musi się skończyć, bo graf jest skończony i w końcu zabraknie nam nowych krawędzi. Ponieważ w każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi, to z każdego wierzchołka, do którego trafiamy tworząc Q będziemy mogli jeszcze wyjść. Tak więc nasz tor Q musi się kończyć w A. Jeśli przeszliśmy już wszystkie krawędzie - świetnie, mamy cykl Eulera. A może coś opuściliśmy?

Gdyby tak było, to istnieje wierzchołek B leżący na torze Q, w którym schodzą się krawędzie nie należące do toru Q (spójność!). Ponadto, ponieważ tor Q pokrywa parzystą liczbę krawędzi schodzących się w wierzchołku B, to musiała pozostać również parzysta liczba krawędzi schodzących się w tym wierzchołku i nie należących do toru Q. Weźmy zatem drugi tor Q', zaczynający się w B i prowadźmy go przy pomocy krawędzi nie wykorzystanych do toru Q. Jest to możliwe, bo zweryfikowaliśmy, że możliwy jest w ogóle start w Q. Z powodów takich, jak dla A i toru Q, także tor Q' musi zakończyć się w B. W ten sposób jednak możemy z torów Q oraz Q' zrobić jeden wspólny, większy niż sam Q. Czy już teraz przeszliśmy wszystkie krawędzie? Jeśli nie, to powtarzamy to rozumowanie tak długo, aż to się stanie. Graf jest skończony, a więc w pewnym momencie musi to się stać. $\square$

Jak zwykle w przypadku grafów - bardzo elegancki rezultat pokazujący nową metodę rozumowania. Przejdźmy teraz do problemu z pozoru bliźniaczego.

Zagadka 11. *Na urodziny Adaś zaprosił czwórkę swoich przyjaciół: Basię, Czarka, Dorotkę i Ewę. Basia i Ewa są przyjaciółkami. Czarek i Dorotka też się przyjaźnią. Przyjaciółkami są wreszcie Ewa i Dorotka. Czy można rozsadzić dzieci przy okrągłym stole tak, by każde miało obok siebie przyjaciela?*

Z całą pewnością każdy łatwo znajdzie rozwiązanie. Przy stole siedzieć powinny kolejno: Adaś, Basia, Ewa, Dorotka, Czarek. Tak to jest, że gdy rozwiązanie istnieje, wtedy wystarczy je po prostu podać. Co się jednak stanie, gdy pominiemy przyjaźń Ewy i Dorotki? W przypadku tak niewielkiej grupy dzieci uda nam się być może z pewnym trudem pokazać, że nie da się rozsadzić dzieci przy okrągłym stole tak, by siedziały obok przyjaciół. Jakiemu zagadnieniu grafowemu odpowiada ten problem?

Wierzchołki grafu to oczywiście dzieci. Krawędzie - to przyjaźnie między nimi. Czym jest natomiast usadzenie ich przy okrągłym stole? Chodzi o znalezienie takiej ścieżki przez krawędzie w grafie, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Tak cykl nazywamy cyklem Hamiltona. Ciekawe, że zagadnienie istnienia cyklu Eulera jest znacznie prostsze niż zagadnienie istnienia cyklu Hamiltona. Dotyka to problemów tzw. złożoności obliczeniowej. Intuicja jest następująca: gdy chcemy skonstruować cykl Eulera w grafie w zasadzie nie możemy się pomylić: startujemy od dowolnego wierzchołka i próbujemy tworzyć cykl jak w dowodzie wyżej. W przypadku ścieżki Hamiltona może się okazać, że przy analogicznej konstrukcji w pewnym momencie orientujemy się, że nie da się jej kontynuować, a nie obeszliśmy wszystkich wierzchołków. Wtedy trzeba wrócić do poprzednich wyborów, co bardzo komplikuje algorytm... Otwartym problemem jest to, czy problem ten jest NP trudny (problem ścieżek Eulera jest P-trudny). Nie jest to jednak temat tego wykładu...

Zagadka 12. *(II OMG, zawody II stopnia, zadanie 3) W przestrzeni danych jest* 6 *punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.*

Spróbujmy przeformułować to zadanie na problem o grafach. Można je rozumieć w sposób następujący. *Dany jest graf G taki, że liczba jego wierzchołków wynosi 6, a liczba krawędzi 10. Czy graf taki zawiera trójkąt?* Dlaczego to jest poprawne? Jak widać nie gubimy nic z ogólności problemu. Pozwala na to założenie, że żadna czwórka punktów nie leży na jednej płaszczyźnie. Nie grożą nam zatem żadne „nadprogramowe” punkty przecięcia. Przeformułowanie jest poprawne.

Na razie mówiliśmy tylko o stopniu wierzchołku grafu. Lemat o uściskach dłoni mówi, że suma stopni wierzchołków równa jest dwukrotności liczby krawędzi. Ten fakt pozwala nam dokonać pierwszej ważnej obserwacji: `w grafie` G `istnieje co najmniej jeden wierzchołek stopnia co najmniej 4`. Rzeczywiście, gdyby było inaczej wówczas suma stopni wierzchołków szacowałaby się z góry przez 18, co jest niemożliwe, bo z lematu o uściskach dłoni wynosi ona co najmniej 20.

Weźmy nasz wierzchołek stopnia co najmniej 4 i nazwijmy go v i rozważmy jego sąsiadów a, b, c, d. Aby rozwiązać zadanie wystarczy pokazać, że któreś dwa z tych sąsiadów jest połączonych. Pokażemy, że tak jest. Te cztery wierzchołki dają 6 par punktów:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Twierdzimy, że która z tych par to sąsiedzi. Skorzystamy w tym celu z informacji danych w zadaniu. W całym grafie jest 10 krawędzi. Pomiędzy 6 wierzchołkami poprowadzić można natomiast co najwyżej 15 krawędzi (dlaczego?). Skoro tak, to co najwyżej 5 krawędzi nie zostało poprowadzonych. A zatem w naszym grafie jest co najwyżej 5 par wierzchołków nie sąsiednich. Powyżej wypisaliśmy natomiast 6 różnych par sąsiadów wierzchołka v. A zatem któraś z tych par to sąsiedzi, co kończy dowód.

Czy rozumowanie można przeprowadzić bez teorii grafów? Na pewno tak, ale jak się zaraz okaże - sprawy potrafią się skomplikować. Po pierwsze, matematyków interesują problemy w rodzaju: ile trójkątów może lub nie może występować w grafie. Metody mogą być tu całkiem wyrafinowane. Za chwilę przekonamy się, że z naszego przykładu da się wycisnąć znacznie więcej niż olimpiada nakazywała. Czytelnik znajdzie stosowne zadanie na końcu tej części. Nie jest ono jednak proste i przyda mu się zapewne rezultat, który teraz pokażemy. Jest to bardzo proste, a jednak bardzo przydatne narzędzie do poszukiwania trójkątów w grafach.

Twierdzenie 3. *(Mantel, 1906) Dany jest graf G bez trójkątów mający n wierzchołków i k krawędzi. Wówczas spełniona jest nierówność: $k \leqslant \frac{n^2}{4}$.*

Dowód. Z pewnością szacowanie to nie wygląda intuicyjnie. Okazuje się jednak, że wykorzystamy identyczne argumenty jak w zadaniu olimpijskim - oczywiście w większej ogólności. Przede wszystkim znów pojawia się argument o wierzchołku największego stopnia w grafie G. Taki wierzchołek musi istnieć i nazywamy go v. Stopień $d(v)$ tego wierzchołka to s. Niech $S(v)$ oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v. Oczywiście żadne dwa elementy $S(v)$ nie sąsiadują ze sobą - inaczej mielibyśmy trójkąt w grafie G. Bez straty ogólności możemy założyć, że są to wierzchołki postaci $v_1, \ldots, v_k$. Pozostałe wierzchołki oznaczamy jako $w_1, w_2, \ldots, w_{n-s-1}$. Liczba $n-s-1$ wiąże się z tym, że wszystkich wierzchołków jest n. Jeden z nich to v, zaś pewnych s to jego sąsiedzi. Pozostałych jest zatem $n-s-1$. Obserwacja: `każda krawędź grafu` G `ma co najmniej jeden koniec w zbiorze jednym ze zbiorów` $S(v), S(w_1), \ldots S(w_{n-s-1})$`.` To jest jasne: są to wszystkie wierzchołki poza v. To oznacza, że:

$$|E(G)| = d(v) + d(w_1) + \ldots + d(w_{n-s-1}.$$

Rzeczywiście, stopień zlicza ile krawędzi wchodzi do danego wierzchołka. Korzystamy z maksymalności liczby s i wiemy, że $d(w_i) \leqslant s$. A zatem nasza poprzednia nierówność przybiera postać:

$$|E(G)| \leqslant s + (n-s-1)s = s(n-s).$$

A zatem wystarczy pokazać, że $|E(G)| \leqslant s(n-s) \leqslant \frac{n^2}{4}$. Nierówność po prawej jest jednak równoważna temu, że $(n-2s)^2 \geqslant 0$. Wystarczy rozpisać. To kończy dowód twierdzenia. □

Ten dowód nie był taki prosty. Czytelnik może nie być przekonany co do tego na czym tak naprawdę polegało skorzystanie z założenia. A może umiałby pokazać przykład grafu G, w którym występuje równość? Nie jest to zupełnie oczywiste.

Zobaczmy proste zastosowania.

Zagadka 13. *Wyznaczyć największą liczbę przekątnych ośmiokąta wypukłego o tej własności, że ani żadne trzy z nich nie tworzą trójkąta, ani żadne dwie z nich nie tworzą trójkąta z bokami ośmiokąta.*

Zagadka 14. *Na okręgu jednostkowym zaznaczono 5 punktów. Pokazać, że co najwyżej 6 cięciw utworzonych przez końce tych odcinków ma długość większą niż* $\sqrt{3}$.

Dowód. Na okręgu jednostkowym cięcia długości $\sqrt{3}$ opiera się na kącie środkowym $120°$. A zatem zbiór cięciw długości większej niż $\sqrt{3}$ nie może zawierać żadnego trójkąta. Twierdzenie Mantela mówi nam zatem, że cięciw tych może być co najwyżej $\left\lfloor \frac{5^2}{4} \right\rfloor = 6$. □

A teraz coś znacznie trudniejszego.

Zagadka 15. *Pewien klub brydżowy ma specjalną zasadę, zgodnie z którą czterech członków może zagrać partię tylko jeśli żadnych dwoje nie było wcześniej partnerami. Pewnego razu spotkało się 14 graczy, z których każdy wcześniej był partnerem czwórki przybyłych. Zagrano sześć partii, po czym zgodnie z zasadami klubu rozgrywki zostały zatrzymane. Gdy zamierzano rozwiązać zgromadzenie do klubu przyszedł nowy członek, z którym nikt jeszcze nie grał. Pokazać, że w tej sytuacji można rozegrać kolejną partię.*

Dowód. Tym razem rozwiązanie jest nieco przewrotne i znacznie bardziej pomysłowe. Jak zwykle tworzymy graf, którego wierzchołkami jest... w tym przypadku czternastu członków klubu. Krawędziami połączymy jednak pary zawodników, którzy jeszcze nie byli dotąd partnerami. Graf ten oczywiście zmienia się wraz z rozwojem sytuacji. Kluczem do rozwiązania zagadki jest pokazanie, że w momencie gdy gra zostaje zawieszona i wszyscy chcą się rozejść w grafie tym istnieje trójkąt nieznajomych. W ten nowy członek klubu będzie mógł dołączyć do tego trójkąta i rozegrana zostanie nowa partia.

Chcemy skorzystać z twierdzenia Mantela. Musimy zatem poznać liczbę krawędzi naszego grafu i pokazać, że jest ona równa co najmniej... $\frac{14^2}{4} = 49$. Pokażemy, że jest ich 51.

Zauważmy, że zanim którzykolwiek z czternastu członków klubu w ogóle ze sobą zagrali, graf nieznajomości miał wszystkie możliwe krawędzie... a więc ile? Oczywiście każdy nie grał z 13 pozostałymi, a więc ta liczba to $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 91$. Po każdej rozegranej partii z grafu tego usuwa się dwie krawędzie (bo są dwie pary partnerów). Owego interesującego nas dnia, w momencie przyjścia do klubu każdy był partnerem czterech innych, a więc nasz graf był już odchudzony o 28 krawędzi (skąd ta liczba?). W ciągu sześciu gier rozegranych tego dnia usunięto jeszcze 12 krawędzi. W tym momencie nastąpił impas. A jednak krawędzi zostało $91 - 28 - 12 = 51$, a zatem pojawienie się nowego członka klubu rozwiązało problem! □

Jak widzimy to rozwiązanie było już wysoce niebanalne, choć nie korzystało przecież z żadnych zaawansowanych narzędzi. A jednak zbudowanie właściwego modelu, poprawna interpretacja zaistniałej konfiguracji - to nie są sprawy proste. Podobnie jak gra w brydża...

Na koniec przyjrzymy się na chwile innym strukturom wewnątrz grafu. Rozwiążemy jeszcze dwa zadania i sformułujemy jeden znany rezultat.

Zagadka 16. *(III Mała OM, zawody III stopnia dla uczniów szkół starszych, zadanie 6) W pewnej konferencji uczestniczy 1995 osób. Każda z nich ma wśród pozostałych co najmniej 45 znajomych. Wykaż, że ma można znaleźć takich czterech uczestników konferencji, którzy mogą usiąść przy okrągłym stale tak, by każdy siedział obok swoich znajomych.*

Problem tego typu rozwiązywaliśmy już na początku. Widać, że wierzchołkami grafu mają być uczestnicy konferencji, a strzałki odpowiadać mają znajomościom. Poszukiwana czwórka znajomych tworzy czworokąt w naszym grafie. Rozwiążmy podobny problem przy założeniu, że uczestników konferencji jest tylko 6, a każdy zna trzy osoby. W takim przypadku biorąc dowolny wierzchołek v mamy $d(v) = 3 < 5$, a zatem dla każdego wierzchołka istnieje taki, który nie jest jego sąsiadem. Bez straty ogólności możemy założyć, że sąsiedzi v to a, b, c, jeden z nie-sąsiadów to w, a drugi to d. Zauważmy, że wierzchołek w sąsiaduje z trzema wierzchołkami ze zbioru $\{a, b, c, d\}$, a więc z co najmniej dwoma ze zbioru $\{a, b, c\}$. Przyjmijmy, że są to a, b. Wówczas w grafie obrazującym konferencję mam czworokąt $vawb$.

Przejdźmy do ogólnego rozumowania. Będzie ono co do istoty identyczne, bo wiemy już czego mamy szukać. Chodzi nam o znalezienie wierzchołka o dobrej własności i takiego, że dwóch jego sąsiadów będzie miało wspólnego sąsiada, którym nie jest on sam. Oto jak znaleźć taki wierzchołek. Nasz graf ma 1995 wierzchołków i każdy ma stopień co najmniej 45, a więc musi być w nim wierzchołek parzystego stopnia, przynajmniej 46 (lemat o uściskach dłoni!) Weźmy taki wierzchołek v, dla którego $d(v) \geqslant 46$. Rozpatrujemy zbiór jego sąsiadów $S(v)$ oraz zbiory $S(w) \setminus \{v\}$ gdzie $w \in S(v)$. A więc bierzemy sąsiadów v, a potem sąsiadów, ale bez v. Obserwacja jest taka, że te zbiory nie mogą być rozłączne. W przeciwnym razie 1994 byłoby większe niż liczba wszystkich elementów w grafie poza v. Ale te wszystkie elementy to przynajmniej suma zbiorów $S(w) \setminus \{v\}$, po wszystkich $w \in S(v)$. Ale każdy z tych zbiorów ma co najmniej 44 elementy, a więc łącznie jest ich $46 \cdot 44 = 2024$ - czyli więcej niż 1994. To jest niemożliwe. A zatem dla pewnych $w_1, w_2 \in S(v)$ mamy element nie równy v i będący sąsiadem w_1 i w_2. To daje czworokąt!

A zatem jedna z możliwych dróg uogólniania twierdzenia Mantela (oto, co matematycy lubią robić!) to poszukiwanie/zliczanie czworokątów i dłuższych cykli w grafach. Druga, bardzo ważna, związana jest z pojęciem kliki. Otóż kliką n-elementową nazwiemy prosty (bez wielokrotnych krawędzi i pętli!) graf K_n o n wierzchołkach mających wszystkie możliwe połączenia. Nazwa powinna sama tłumaczyć co się dzieje. Kliki są szalenie ważne w teorii grafów, mają również szereg interpretacji w języku twierdzeń tej teorii. Nas interesuje problem - ile krawędzi może mieć graf, który nie ma kliki określonej wielkości. A więc na przykład: mamy grupę 1000 ludzi, z których żadna czwórka nie jest kliką. Ile krawędzi może mieć taki graf? Można wyobrazić sobie szereg zagadnień tego typu. Oto twierdzenie, które opisuje tę sytuację.

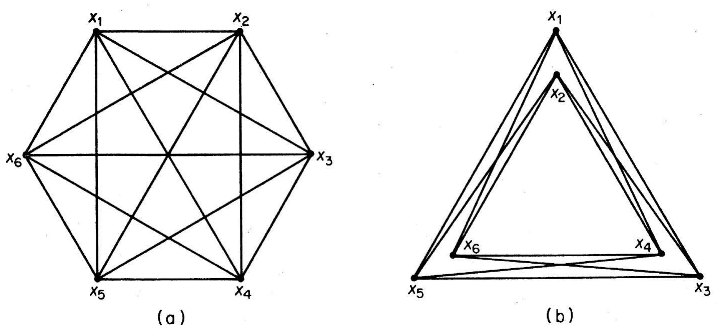
Twierdzenie 4 (Turan). *Niech G będzie grafem o n wierzchołkach nie posiadającym $r+1$-elementowej kliki. Wówczas:*

$$|E(G)| \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right).$$

Dla $r = 2$ jest to dokładnie twierdzenie Mantela o trójkątach. Warto wspomnieć, że Węgier Paul Turan to człowiek o niezwykłej biografii, a twierdzenie tu opisywane powstało jako część tzw. ekstremalnej teorii grafów podczas przymusowego pobytu matematyka w nazistowskich obozach pracy pomiędzy 1941, a 1945 rokiem. Otrzymał szalenie groźne zadanie montowania przewodów elektrycznych na słupach, ale jak wspominał po wojnie był to czas, gdy w głowie zaświtały mu najlepsze pomysły, bo podczas takiej przymusowej pracy po prostu był sam i nikt nie przeszkadzał mu zbierać myśli. Nie trzeba dodawać, że w obozach nie było papieru ani środków do pisania; żadnych książek ani współpracowników. Rezultaty przechowywane były na skrawkach papieru. Wiele z nich to obecnie znane klasyczne rezultaty teorii liczb czy teorii grafów. Turan przez lata był współpracownikiem słynnego Paula Erdösa, jednego z najsłynniejszych matematyków XX wieku. Właśnie od Erdosa pochodzi ostatnie nasze dziś zadanie.

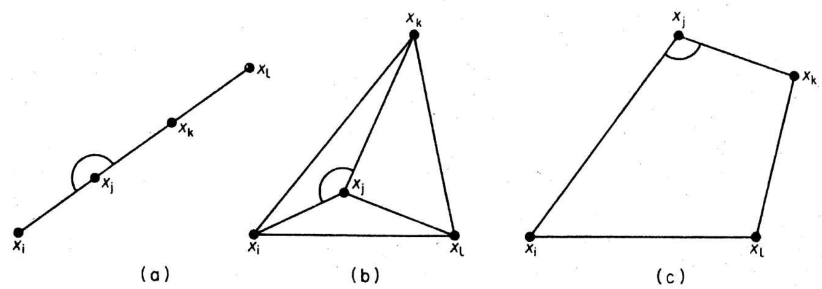
Twierdzenie 5. *Dany jest zbiór n punktów na płaszczyźnie o tej własności, że żadne dwa nie są odległe o więcej niż 1. Wówczas liczba par punktów odległych od siebie o więcej niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nie może przekraczać $\frac{n^2}{3}$.*

Zobaczmy przykład dla $n = 6$. Jak duży może być zbiór odległych od siebie sześciu punktów na okręgu o promieniu 1? Możemy spróbować umieścić punkty na okręgu jako wierzchołki sześciokąta foremnego. Nietrudno policzyć, że krótsza przekątna w tym sześciokącie ma długość $\sqrt{3}2$, zaś średnica to oczywiście 1. Mamy więc 9 par punktów odległych o więcej niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ale to nie jest najlepsza konfiguracja jaką można dostać. Bez specjalnych rachunków widać, że przyjmując konfigurację z rysunku (b) dostaniemy więcej, bo aż 12 przecięć. Nasze twierdzenie mówi, że lepiej w przypadku się nie da. Dlaczego?



Rozważamy graf $G = (V(G), E(G))$, którego wierzchołkami są elementy naszego zbioru n punktów. Krawędzie prowadzimy jedynie między punktami odległymi o więcej niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Aby uzasadnić nasze twierdzenie musimy pokazać, że nasz graf nie zawiera kliki 4-elementowej, a więc czwórki punktów, z których wszystkie są od siebie odległe o więcej niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Intuicyjnie powinno być to jasne, bo konfiguracja taka byłaby swego rodzaju gwałtem na idei wpisania kwadratu w okrąg o promieniu 1. Musimy to teraz dokładnie opisać.

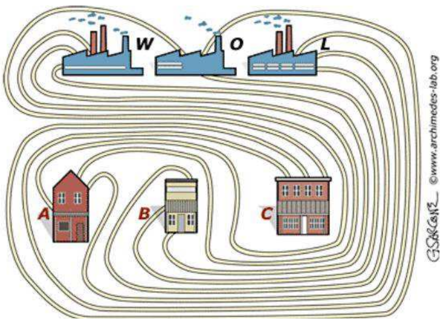
Zauważmy, że jeśli weźmiemy cztery punkty na płaszczyźnie to muszą wśród nich być takie trzy, nazwijmy je x_i, x_j, x_k, że kąt $x_i x_j x_k$ ma miarę przynajmniej 90°. Istotnie, albo trzy z tych punktów leżą na jednej prostej, jak w przypadku (a) niżej, albo jeden z nich jest wewnątrz trójkąta utworzonego przez pozostałe, albo tworzą one czworokąt wypukły.



Przyjrzyjmy się trójkątowi $x_i x_j x_k$. Nie wszystkie długości jego boków mogą być większe niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. W przeciwnym bowiem razie jeśli $|x_i x_j| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $|x_j x_k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, to musimy mieć $|x_i x_k| > 1$. Można to widzieć z tw. cosinusów, ale i z kątów na okręgu, albo twierdzenia Pitagorasa. Jednak taka sytuacja przeczy założeniu, bo wszystkie punkty muszą mieścić się w okręgu o promieniu 1. A zatem w naszym granie nie ma kliki 4-elementowej i dowód jest zakończony.

Twierdzenie to ma wiele uogólnień. W szczególności można pytać czy $n^2/3$ jest najlepszym możliwym oszacowaniem (tak!), jakie liczby można wybrać zamiast $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (wiele możliwości), jak ile par punktów może realizować największą odległość pomiędzy danymi n punktami (tw. Pannwitza), a dalej otwiera się cała dziedzina geometrii kombinatorycznej...

Na tym zatrzymamy nasz wykład. Zainteresowanych odsyłam do literatury na następnej i do poszukiwania licznych bardzo interesujących problemów teorii grafów, na przykład: problemy kolorowania grafów (i np. tw. Ramseya czy problem czterech barw), problemy grafów dwudzielnych (np. twierdzenie Halla o małżeństwach), problemy grafów planarnych (np. charakterystyka Eulera i problem trzech dostawców), zagadnienia dotyczące drzew, klik, specjalnych konfiguracji. A to dopiero początek, bo wyposażeni w maszynerię algebry liniowej atakować można zupełnie nowe lądy...



Zadania domowe (dzień 2).

Zagadka 17. *Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.*

Zagadka 18. *Danych jest 21 punktów na okręgu. Istnieje przynajmniej 100 par punktów takich, że para tworzy ze środkiem okręgu kąt o mierze co najwyżej 120 stopni.*

Zagadka 19. *Dany jest graf G mający 4 wierzchołki i 5 krawędzi. Udowodnij, że w grafie tym istnieją co najmniej dwa trójkąty.*

Zagadka 20. *Dany jest graf G mający 5 wierzchołków i 7 krawędzi. Udowodnij, że w grafie tym istnieją co najmniej dwa trójkąty.*

Zagadka 21. *(*) Dany jest graf G mający 6 wierzchołków i 10 krawędzi. Udowodnij, że w grafie tym istnieją co najmniej 3 trójkąty.*

Zagadka 22. *(*) W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, ze istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, ze każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.*

Literatura

[1] Bin X., Zhongyi Z.: *Graph theory. Mathematical Olympiad Series 3.* World Scientific 2010.

[2] Bondy J.A., Murty U.S.R.: *Graph theory with applications*, Springer, GTM 244, 2008.

[3] Bryś K.: *Grafy dla każdego.* http://akademia.mini.pw.edu.pl

[4] Ore O.: *Wstęp do teorii grafów.* PWN 1966.

[5] Guzicki W.: *O krótkich cyklach w grafach.* http://www.trimat.edu.pl/cykle.pdf

[6] Tucker A.: *The Paralell Climbing Puzzle.* Math Horizons 3 (1995): 22–24.

[7] West D.: *Introduction to Graph Theory*, 2ed, Prentice Hall, 2001.