Geometria w Matexie

Arkadiusz Męcel

2014—2017

Wprowadzenie

Poniżej zebrano niektóre zadania, które rozważaliśmy z klasą I, II, i wreszcie IIIa w latach szkolnych 2014/2015, 2015/2016, 2016/2017 w ramach zajęć z Geometrii w XVI LO im. Stanisława Staszica w Warszawie. Był to wspaniały inspirujący czas, za który bardzo moim Uczennicom i Uczniom dziękuję!

Jeśli mogę mówić o jakiejkolwiek filozofii tych zajęć, skupionych wokół rozwiązywania problemów olimpijskich, to była ona następująca: pokazać jak od rozważania własności miarowych figur – które jest przedmiotem szkolnej geometrii przejść do takiego rozumienia geometrii (czy szerzej: matematyki), jakim posługuje się zawodowy matematyk. Wyróżniliśmy w tym celu trzy poziomy zadań olimpijskich:

- **poziom pierwszy** – zadania, w których `uzupełniamy odpowiednią konfigurację`, a więc wyliczamy brakujące kąty, długości, dorysowujemy niewidoczne na początku odcinki, opisujemy okręgi na odpowiednich wielokątach, znajdujemy punkty leżące na jednej prostej lub proste przecinające się w jednym punkcie, dostrzegamy równoległość itd.
- **poziom drugi** – zadania, w których `modyfikujemy konfigurację przy pomocy przekształceń`, a więc mówiąc prosto: przemieszczamy obiekty na rysunku, by lepiej zrozumieć ich własności. Wiąże się to z wykorzystaniem przesunięcia, obrotu, symetrii, jednokładności, inwersji, przekształcenia afinicznego itd., dzięki którym konfiguracja z zadania zostaje przekształcona w bardziej czytelną.
- **poziom trzeci** – zadania, których rozwiązanie wymaga wprowadzenia `dodatkowej struktury` na płaszczyźnie (lub w przestrzeni) lub korzystania z własności `struktury przekształceń`. Dodatkową strukturą może być po prostu struktura analityczna, a więc wprowadzenie współrzędnych kartezjańskich, ale też może być rozważanie współrzędnych barycentrycznych czy płaszczyzny rzutowej. Można też korzystać z rozmaitych twierdzeń o składaniu obrotów, jednokładności, przekształceń afinicznych itd. Wreszcie - można kombinować te metody i wprowadzać przekształcenia zachowujące własności ubogaconej struktury, np. inwolucje na przestrzeni rzutowej.

W poniższym opracowaniu zebrano zadania realizowane podczas lekcji, na kartkówkach, czy klasówkach. Pochodzą one z różnych źródeł, poniżej wymieniam kilka najważniejszych:

- Prosolov V.: *Problems in plane and solid geometry v.1, Plane Geometry*,
- Chen E.: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*,
- Posamentier A., Salkind C.: *Challenging problems in geometry*,
- Jiagu X.: *Lecture Notes on Mathematical Olympiad*,
- Pompe W.: *Wykłady z Geometrii 1 i 2 na Uniwersytecie Warszawskim, notatki własne*,
- Pompe W.: *Wokół obrotów*, Biblioteczka SEM
- Burek D.: *Dwustosunek i biegunowe*
- Strony internetowe Olimpiad: www.omj.edu.pl, www.om.edu.pl,
- Forum `Art of Problem Solving` - stąd jest najwięcej zadań,
- Strona *Delty* – jest tu wiele artykułów z geometrii,
- Czasopismo *Mathematical Excalibur* – nieocenione źródło ciekawych zagadnień.

Spis treści

1 Klasa pierwsza

1.1 Przystawanie trójkątów

Zadanie 1. *Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$. Udowodnij, że $BG = AD$.*

Zadanie 2. *Na zewnątrz boków AB i AD równoległoboku $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ABF i ADE. Udowodnij, że trójkąt FCE jest równoboczny.*

Zadanie 3. *Rozważmy równoległobok $ABCD$ oraz punkty E, F znajdujące się na zewnątrz tego równoległoboku, że trójkąty ABF i ADE są równoboczne. Udowodnij, że trójkąt FCE jest równoboczny.*

Zadanie 4. *Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\measuredangle PAQ = 45°$. Dowieść, że $BP + DQ = PQ$.*

Zadanie 5. *W trójkącie ABC punkty D, E, F są odpowiednio środkami odcinków AC, AB oraz BC. Niech BG będzie wysokością trójkąta ABC. Udowodnij, że $\measuredangle EGF = \measuredangle EDF$.*

Zadanie 6. *Prostokąt $ABCD$, w którym $AB = 3 \cdot AD$ podzielono na trzy kwadraty: $AEFD$, $EGHF$ oraz $GBCH$. Wykaż, że $\measuredangle AED + \measuredangle AGD + \measuredangle ABD = 90°$.*

Zadanie 7. *Rozważmy trójkąty ostrokątne $\triangle ABC$ oraz $\triangle A'B'C'$. Czy wymienione niżej równości $(\star)$ implikują przystawanie $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$? Odpowiedź uzasadnij.*

$$AB = A'B', \quad \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C', \quad \measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' \qquad (\star)$$

Zadanie 8. *Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla trójkąta ABC:*

(1) $AC = BC$,

(2) $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$.

Zadanie 9. *W kwadracie $ABCD$ punkt M jest środkiem odcinka AB. Prosta prostopadła do MC przecina AD w K. Udowodnij, że $\measuredangle BCM = \measuredangle KCM$.*

Zadanie 10. *Wewnątrz kwadratu $ABCD$ obrano punkt E taki, że $\measuredangle EDC = 15°$. Udowodnij, że trójkąt ABE jest równoboczny.*

Zadanie 11. *W trójkącie ABC, w którym kąt C jest prosty, przedłużono bok AC poza punkt C do punktu D takiego, że $CD = CB$ oraz przedłużono bok BC poza punkt C do punktu E takiego, że $CE = CA$. Udowodnij, że przedłużenie wysokości CH trójkąta ABC jest środkową w trójkącie CDE.*

Zadanie 12. *W trójkącie ABC punkty D, E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC tak, że AE i BD są odpowiednio dwusiecznymi kątów CAB i ABC. Niech P, Q będą odpowiednio rzutami punktu C na proste BD i AE. Udowodnić, że PQ jest równoległy do AB.*

Zadanie 13. *W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC. Udowodnij, że $BC = 2 \cdot AD$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.*

Zadanie 14. *Rozważmy prostokąt $ABCD$ i punkt P znajdujący się na boku AB. Niech F, G będą rzutami P odpowiednio na przekątne BD i AC. Wykaż, że suma $PG + PF$ jest stała, niezależnie od wyboru P (na boku AB).*

Zadanie 15. *We wnętrzu czworokąta (a więc nie na bokach czy na zewnątrz) $ABCD$ obieramy punkt M taki, że $ABMD$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że jeśli $\measuredangle CBM = \measuredangle CDM$, to $\measuredangle ACD = \measuredangle BCM$.*

Zadanie 16. *Przez wierzchołek C trójkąta ABC prowadzimy dowolną prostą l. Niech P, Q będą rzutami wierzchołków A, B na prostą l oraz niech M będzie środkiem boku AB. Wykaż, że $MP = MQ$.*

Zadanie 17. *Na przekątnych AC i CE sześciokąta foremnego $ABCDEF$ obieramy odpowiednio punkty M i N tak, że*

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda.$$

Znajdź λ jeśli wiadomo, że punkty B, M, N leżą na jednej prostej.

1.2 Nierówność trójkąta

Zadanie 18. *Na płaszczyźnie dane są odcinki AB, CD długości 1, które przecinają się w punkcie O. Udowodnić, że jeśli $\measuredangle AOC = 60^\circ$, to $AC + BD \geqslant 1$.*

Zadanie 19. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o tej własności, że AB nie jest równoległy do CD. Niech E, F będą środkami boków AD, BC. Udowodnić, że: $2EF < AB + CD$.*

Zadanie 20. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$ oraz $\measuredangle BCD > \measuredangle BAD$. Wykaż, że $AC > BD$.*

Zadanie 21. *Dany jest punkt O oraz półproste l, m wychodzące z punktu O i tworzące wraz z nim kąt ostry α. Punkt M leży wewnątrz tego kąta. Znajdź takie punkty A, B, leżące odpowiednio na półprostych l, m, że $OA = OB$, przy czym suma $MA + MB$ jest minimalna.*

Zadanie 22. *Niech boki BC, CA, AB trójkąta ABC mają długości odpowiednio a, b, c.
Załóżmy, że $2b < a + c$. Wykaż, że $2\measuredangle ABC < \measuredangle BAC + \measuredangle ACB$.*

Zadanie 23. *Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, zaś P dowolnym punktem płaszczyzny. Udowodnić, że istnieje trójkąt, którego boki równe są odcinkom AP, BP, CP oraz, że trójkąt ten jest zdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.*

Zadanie 24. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC.*

(a) *Na boku AB obieramy punkt P. Znaleźć na bokach BC, CA takie punkty X, Y, by obwód trójkąta XYP był minimalny.*

(b) *Wpisać w trójkąt ABC trójkąt o minimalnym możliwym obwodzie.*

(c) *Znaleźć na płaszczyźnie taki punkt T, że liczba $AT + BT + CT$ jest minimalna możliwa.*

1.3 Twierdzenie Pitagorasa

Zadanie 25. *Niech P będzie dowolnym punktem leżącym we wnętrzu trójkąta ABC. Niech D, E, F będą rzutami P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wykaż, że:*

$$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2.$$

Zadanie 26. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Udowodnij, że przekątne AC i BD tego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.*

Zadanie 27. *Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$ przy czym $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Znajdź miarę kąta APB.*

Zadanie 28. *Punkt M jest środkiem boku AD kwadratu $ABCD$ oraz punkt N jest środkiem boku MD. Udowodnij, że:*

$$\measuredangle NBC = 2 \cdot \measuredangle ABM.$$

Zadanie 29. *W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE = AD$ i $BF = FD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE = SF$.*

Zadanie 30. *Niech M będzie punktem we wnętrzu trójkąta równobocznego ABC oraz niech A', B', C' będą rzutami M odpowiednio na boki BC, CA, AB. Udowodnij, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty MAC', MBA' oraz MCB' równa jest sumie promieni okręgów wpisanych w trójkąty MAB', MBC' oraz MCA'.*

Zadanie 31. *Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Załóżmy też, że D, E, F są środkami odpowiednio boków BC, AC, AB. Punkty A_1, A_2 powstają przez przecięcie okręgu o środku w punkcie D i promieniu DH z bokiem BC. Punkty B_1, B_2 powstają przez przecięcie okręgu o środku w punkcie E i promieniu EH z bokiem AC. Analogicznie definiujemy punkty C_1, C_2 na boku AB. Wykaż, że punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na jednym okręgu.*

1.4 Łatwe równoległoboki

Zadanie 32. *Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości 1. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że $PD+PE+PF < 1$.*

Zadanie 33. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg o średnicy AB przechodzi przez punkty C i D. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że proste CD i BE są prostopadłe.*

Zadanie 34. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka B, a punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że jeżeli $AM = BD$, to $\measuredangle CAM = 30^\circ$.*

Zadanie 35. *Udowodnić, że proste przechodzące przez środki boków czworokąta wpisanego w okrąg i prostopadłe do przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 36. *Na bokach trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne BCD, CAE, ABF, o środkach ciężkości P, Q, R. Dowieść, że obwód trójkąta PQR jest nie większy od obwodu trójkąta ABC.*

Zadanie 37. *W sześciokącie wypukłym wszystkie trzy główne przekątne mają długość większą od 2. Udowodnić, że pewien bok tego sześciokąta ma długość większą niż 1.*

Zadanie 38. *Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że*

$$PA = PB = PD \quad \text{oraz} \quad QA = QB = QC.$$

Zadanie 39. *Niech P będzie wielokątem środkowosymetrycznym i wypukłym. Udowodnij, że istnieje równoległobok R taki, że P jest zawarty w R oraz:*

- $[R]/[P] \leqslant \sqrt{2}$
- $[R]/[P] \leqslant 4/3$.

1.5 Obroty

Zadanie 40. *Punkt O jest środkiem kwadratu $ABCD$. Punkt E leży na odcinku CD. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i D na prostą AE. Dowieść, że trójkąt OPQ jest prostokątny równoramienny.*

Zadanie 41. *Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt P leży półprostej AB na zewnątrz odcinka AB (bliżej B). Punkt Q leży na półprostej BC na zewnątrz odcinka BC (bliżej C). Wykazać, że jeśli $AP = PQ + QC$, to $\measuredangle PDQ = 45^\circ$.*

Zadanie 42. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\measuredangle ABC = 45^\circ$. Wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i C przecinają się w punkcie H. Wykazać, że $BH = AC$.*

Zadanie 43. *Kwadraty $BCDA$ oraz $BKMN$ mają wspólny wierzchołek B. Udowodnij, że środkowa BE trójkąta ABK oraz wysokość BF trójkąta CBN leżą na jednej prostej.*

Zadanie 44. *Na bokach AB oraz BC trójkąta równobocznego ABC obieramy punkty M i N takie, że $MN||AC$. Niech E będzie środkiem odcinka AN oraz D – środkiem ciężkości trójkąta BMN. Znajdź kąty trójkąta CDE.*

Zadanie 45. *Na bokach czworokąta wypukłego skonstruowano kwadraty skierowane na zewnątrz. Udowodnij, że proste łączące środki przeciwległych kwadratów mają równe długości i są prostopadłe.*

Zadanie 46. *Na bokach trójkąta ABC zbudowano: na zewnątrz – trójkąty równoboczne $A'BC$ oraz $B'AC$ oraz do wewnątrz: trójkąt równoboczny $C'AB$. Niech M będzie środkiem masy trójkąta $C'AB$. Udowodnij, że $A'B'M$ jest trójkątem równoramiennym oraz, że $\measuredangle A'MB' = 120^\circ$.*

1.6 Kąty w okręgu, czworokąt wpisany w okrąg

Zadanie 47. *Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B, D leżą na jednej prostej.*

Zadanie 48. *Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F, różnych od B. Udowodnić, że proste CD i EF są równoległe.*

Zadanie 49. *Wewnątrz kąta ACB trójkąta ABC wybrano taki punkt P, że rzuty tego punktu na proste zawierające odpowiednio boki AB, AC, BC leżą na jednej prostej. Wykaż, że P leży na łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC (uwzględnij wszystkie możliwe położenia punktu P wewnątrz kąta ACB).*

Zadanie 50. *Punkt P wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że $\measuredangle ADP + \measuredangle BCP = \measuredangle APB$. Niech O_1, O_2 będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ADP oraz BCP. Wykaż, że punkty O_1, O_2, P są współliniowe.*

Zadanie 51. *Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś O_1, O_2 – środkami okręgów dopisanych do tego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AC i BC. Wykaż, że $\measuredangle AO_1O = \measuredangle BO_2O$.*

Zadanie 52. *Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.*

Zadanie 53. *Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B, D leżą na jednej prostej.*

Zadanie 54. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, zaś odcinki AD i BC przecinają sie w punkcie P. Wykazać, że*

$$|\measuredangle AFB - \measuredangle CED| = \measuredangle APB.$$

Zadanie 55. *Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\measuredangle DGE = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$.*

Zadanie 56. *Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F, różnych od B. Udowodnić, że proste CD i EF są równoległe.*

Zadanie 57. *Wewnątrz kąta ACB trójkąta ABC wybrano taki punkt P, że rzuty tego punktu na proste zawierające odpowiednio boki AB, AC, BC leżą na jednej prostej. Wykaż, że P leży na łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC (uwzględnij wszystkie możliwe położenia punktu P wewnątrz kąta ACB).*

Zadanie 58. *Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AB i AD kwadratu $ABCD$, przy czym $\measuredangle ECF = 45°$. Odcinki EC i FC przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że punkty A, E, F, P, Q leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 59. *Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodzącą przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.*

Zadanie 60. *Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.*

Zadanie 61. *Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg, zaś punkt P jest obrany na (mniejszym) łuku AC. Udowodnij, że $PB = PA + PC$. Nie korzystaj z twierdzenia Ptolemeusza.*

Zadanie 62. *Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg o średnicy AB. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że proste CD i BE są prostopadłe.*

Zadanie 63. *Niech $PQRS$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg, przy czym $\measuredangle PSR = 90°$ oraz niech H, K będą rzutami punktu Q odpowiednio na proste PR i PS. Udowodnić, że prosta zawierająca odcinek HK przecina odcinek QS na dwa odcinki jednakowej długości.*

Zadanie 64. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i z punktów B oraz D poprowadzone są proste prostopadłe odpowiednio do boków AB i CD. Załóżmy, że proste te przecinają proste CD oraz AB odpowiednio w punktach B' oraz D'. Udowodnij, że $AC||B'D'$.*

Zadanie 65. *Prosta l przecina boki AB i AC trójkąta ABC odpowiednio w punktach Q, S oraz przecina przedłużenie boku BC w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach ABC i SCR przecinają się w punkcie P (różnym od C). Wykaż, że na czworokącie $AQSP$ można opisać okrąg.*

Zadanie 66. *Niech Γ_1, Γ_2 będą dwoma okręgami stycznymi zewnętrznie w punkcie R. Niech l_1 będzie prostą styczną do Γ_2 w punkcie P i przechodzącą przez środek O_1 okręgu Γ_1. Podobnie niech l_2 będzie prostą styczną do Γ_2 w punkcie Q przechodzącą przez środek O_2 okręgu Γ_2. Załóżmy, że proste l_1 oraz l_2 nie są równoległe i przecinają się w punkcie K. Udowodnij, że jeśli $KP = KQ$, to trójkąt PQR jest równoboczny.*

Zadanie 67. *Rozważmy czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Długości boków AB, BC, CD oraz DA wynoszą odpowiednio: a, b, c, d. Konstruujemy cztery prostokąty na zewnątrz czworokąta $ABCD$: każdy oparty na jednym z wymienionych wyżej boków. Prostokąty te mają wymiery odpowiednio: $a \times c, b \times d, c \times a$ oraz $d \times b$. Udowodnij, że środki (symetrii) tych czterech prostokątów są wierzchołkami prostokąta.*

1.7 Twierdzenie Ptolemeusza

Zadanie 68. *Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, kwadrat $ABDE$ o środku O (znajdującym się po tej samej stronie prostej AB, co punkt C). Znając długości odcinków AC i BC oblicz długość odcinka OC.*

Zadanie 69. *Dany jest romb $ABCD$ o boku 1. Wyznaczyć zbiór takich punktów P leżących wewnątrz tego rombu, że $AP \cdot PC + BP \cdot PD = 1$.*

Zadanie 70. *Na zewnątrz boku AC trójkąta ABC budujemy trójkąt równoboczny ADC (czyli D jest po drugiej stronie AC niż B). Znaleźć taki punkt P na odcinku BD, że $PA + PB + PC = BD$.*

Zadanie 71. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg przy czym $\measuredangle DCA = 2\measuredangle BAC$ oraz $\measuredangle BCA = 2\measuredangle DAC$. Dowieść, że $BC + CD = AC$.*

Zadanie 72. *Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 5 przy czym $AB = 5$ i $AC = 6$. Znajdź BC.*

Zadanie 73. *Kwadrat $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz punkt P leży na (krótszym) łuku BC. Wykaż, że*

$$\frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}.$$

Zadanie 74. *Udowodnij następujące fakty:*

(a) *Jeśli punkt P leży na (krótszym) łuku BC okręgu opisanego na pięciokącie foremnym $ABCDE$, to $PA + PD = PB + PC + PE$.*

(b) *Jeśli punkt P leży na (krótszym) łuku BC okręgu opisanego na sześciokącie foremnym $ABCDEF$, to $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.*

1.8 Styczna do okręgu, czworokąt opisany na okręgu

Zadanie 75. *Okręgi, których średnicami są ramiona trapezu, są styczne zewnętrznie. Wykazać, że w ten trapez można wpisać okrąg.*

Zadanie 76. *Środkowe AP i CQ trójkąta ABC przecinają się w punkcie D. W czworokąt $BPDQ$ można wpisać okrąg. Wykazać, że $AB = BC$.*

Zadanie 77. *Punkty C, D leżą na okręgu o średnicy AB. Niech P, Q będą punktami przecięcia odpowiednich par prostych: AC i BD, oraz AD i BC. Udowodnij, że $AB \perp PQ$.*

Zadanie 78. *Niech E, F będą punktami styczności okręgu o środku I wpisanego w trójkąt ABC leżącymi odpowiednio na bokach AC i BC. Niech P będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą AI. Wykazać, że punkty E, F, P są współliniowe.*

Zadanie 79. *Rozważmy trójkąt ABC oraz dowolny punkt X położony na boku AB (różny od A, B). Niech Y będzie punktem przecięcia wspólnej stycznej do okręgów wpisanych w trójkąty AXC oraz BXC (różnej od prostej zawierającej AB). Wykazać, że długość odcinka CY jest niezależna od wyboru X na boku AB.*

Zadanie 80. *Punkt P wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że $\measuredangle ADP + \measuredangle BCP = \measuredangle APB$. Niech O_1, O_2 będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ADP oraz BCP. Wykaż, że punkty O_1, O_2, P są współliniowe.*

Zadanie 81. *Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś O_1, O_2 – środkami okręgów dopisanych do tego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AC i BC. Wykaż, że $\measuredangle AO_1O = \measuredangle BO_2O$.*

Zadanie 82. *W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg. Punkt P leży na odcinku CD. Wykazać, że istnieje wspólna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ABP, BCP i DAP.*

Zadanie 83. *Rozważmy równoległobok $ABCD$ taki, że okrąg dopisany do trójkąta ABD jest styczny do prostych AD oraz AB odpowiednio w punktach M, N. Wykaż, że punkty przecięcia odcinka MN z prostymi BC oraz CD leżą na okręgu wpisanym w trójkąt BCD.*

Zadanie 84. *Wykazać, że jeśli istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu to sumy przeciwległych krawędzi tego czworościanu są równe.*

Zadanie 85. *Proste PC oraz PD są styczne do okręgu o średnicy AB tak, że C, D są odpowiednimi punktami styczności. Udowodnij, że prosta łącząca punkt P z punktem przecięcia prostych AC oraz BD jest prostopadła do AB.*

Zadanie 86. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg oraz P, Q – środkami (krótszych) łuków AB i CD. Niech E, F będą odpowiednio: punktem przecięcia dwusiecznych katów BPD oraz $BADC$ oraz punktem przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BDC. Pokazać, że proste PQ oraz EF są prostopadłe.*

Zadanie 87. *Punkt E należy do boku AB, punkt F do boku BC trójkąta ABC oraz $AE = CF$. Odcinki AF i CE przecinają się w punkcie D. W czworokąt $DEBF$ można wpisać okrąg. Wykaż, że $AB = BC$.*

Zadanie 88. *Wykaż, że jeśli w trapez można wpisać okrąg, to okręgi, których średnicami są ramiona trapezu są styczne zewnętrznie.*

Zadanie 89. *Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie A. Niech C, D będą punktami styczności wspólnej prostej stycznej (zewnętrznej) do tych okręgów. Udowodnij, że $\measuredangle CAD = 90°$.*

Zadanie 90. *Niech N_A będzie środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt A. Niech I_B, I_C będą środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC stycznych odpowiednio do boków AC i AB. Wykaż, że punkty I_B, I_C, B, C leżą na okręgu o środku N_A.*

Zadanie 91. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Załóżmy, że proste AB i CD przecinają się w E oraz, że proste AD i BC przecinają się w F. Niech M, N będą dowolnymi punktami na odcinkach AB, BC. Prosta EN przecina AF oraz MF w punktach P oraz R. Prosta MF przecina CE w Q. Udowodnij, że jeśli w czworokąty $AMRP$ oraz $CNRQ$ można wpisać okręgi, to także w $ABCD$ można wpisać okrąg.*

Zadanie 92. *Na odcinku AB wybrano punkt C (różny od A, B). Prosta l przechodząca przez punkt C przecina okręgi o średnicach AC oraz BC odpowiednio w punktach K oraz L. Prosta l przecina także okrąg o średnicy AB w punktach M, N. Wykaż, że $MK = LN$.*

Wskazówka. Jaka jest odległość punktów K, L od środka okręgu o średnicy AB?

Zadanie 93. *W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość $\measuredangle DAB + 2\measuredangle BCD = 180°$. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.*

Zadanie 94. *Niech $n \geqslant 5$ będzie liczbą naturalną. Znajdź największą liczbę całkowitą k (jako funkcję zmiennej n) taką, że istnieje n-kąt wypukły $A_1A_2\ldots A_n$, w którym w dokładnie k czworokątów postaci $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ można wpisać okrąg (przy tym $A_{n+j} = A_j$).*

Zadanie 95. *(5p.) Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.*

1.9 Podobieństwo trójkątów i twierdzenie Talesa

Zadanie 96. *W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC zaś E jest takim punktem na AC, że $AC = 3EC$. Proste BE oraz AD przecinają się w G. Znajdź $AG : GD$.*

Zadanie 97. *Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, zaś D takim punktem na boku BC, że $CD = 2BD$. Wykaż, że jeśli prosta CH jest prostopadła do AD w punkcie H, wówczas kąty DBH oraz DAB mają równe miary.*

Zadanie 98. *W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, zaś E jest takim punktem na boku AD, że $BE = AC$. Prosta BE przecina AC w punkcie F. Wykaż, że $AF = EF$.*

Zadanie 99. *Dany jest trójkąt ABC taki, że $\measuredangle A : \measuredangle B : \measuredangle C = 1 : 2 : 4$. Udowodnij, że:*

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}.$$

Zadanie 100. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że M jest środkiem przekątnej AC oraz $\measuredangle BCD = \measuredangle BMA = \measuredangle AMD$. Uzasadnij, że na $ABCD$ można opisać okrąg.*

Zadanie 101. *Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $AB \cdot DF = AD \cdot BE$. Odcinki DE i BF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\measuredangle DAP = \measuredangle BAC$.*

Zadanie 102. *Dany jest romb $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym $\measuredangle ECF = \measuredangle ABD$. Proste EC i FC przecinają odcinek BD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wartość ilorazu PQ/EF nie zależy od wyboru punktów E i F.*

Zadanie 103. *Punkty P i Q leżą na bokach BC i CD rombu $ABCD$, przy czym prosta PQ jest styczna do okręgu Γ wpisanego w dany romb. Wykaż, że $4 \cdot BP \cdot DQ = BD^2$. Niech K będzie punktem styczności okręgu Γ z odcinkiem AB. Dowieść, że proste KP i AQ są równoległe.*

Zadanie 104. *Dwusieczna kąta CAB trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na ABC w punkcie E (różnym od A). Wykaż, że trójkąty DBE i BAE są podobne.*

Zadanie 105. *Niech ABC będzie trójkątem oraz D punktem na boku BC. Załóżmy, że O_1, O_2 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABD oraz ACD. Wykaż, że trójkąty AO_1O_2 oraz ABC są podobne.*

Zadanie 106. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Niech E, F będą takimi punktami na bokach AB, CD, że $AE/EB = CF/FD$. Załóżmy też, że proste AD i BC przecinają się w S. Wykaż, że trójkąty ASE oraz CSF są podobne.*

Zadanie 107. *Na bokach AB, AC trójkąta ABC obrano punkty D, E takie, że $AD = DB$ oraz $AE = 2EC$. Załóżmy, że odcinki BE, CD przecinają się w punkcie F. Pokazać, że $BE = 4EF$.*

Zadanie 108. *W kwadracie $ABCD$ niech O będzie punktem przecięcia przekątnych. Załóżmy, że dwusieczna kąta CAB przecina BD w E oraz BC w F. Udowodnij, że $2OE = CF$.*

Zadanie 109. *Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Niech P należy do podstawy BC, przy czym $\measuredangle APM = \measuredangle DPM$. Wykaż, że odległość punktu C od prostej AP równa jest odległości punktu B do prostej DP.*

Zadanie 110. *W prostokącie $ABCD$ punkty F, G leżą na AB oraz $AF = FG = GB$. Punkt E zaś jest środkiem DC, punkt H – przecięciem AC i EF oraz J – przecięciem AC z EG. Wyznacz stosunek pól $[ABCD]/[EHJ]$.*

Zadanie 111. *Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Prowadzimy prostą równoległą do przekątnej AC, która przecina AB oraz BC odpowiednio w punktach E oraz F. Przypuśćmy, że P jest przecięciem prostych CE oraz AD, zaś Q jest przecięciem prostych AF oraz DC. Wykaż, że $PQ||AC$.*

Zadanie 112. *W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności:*

$$\angle ABD = \angle ACE, \quad \angle ACB = \angle ACD, \quad \angle ADC = \angle ADE, \quad \angle ADB = \angle AEC.$$

Wykaż, że zachodzą następujące podobieństwa:

$$\triangle BAD \sim \triangle CAE, \quad \triangle BAC \sim \triangle DAE, \quad \triangle ABC \sim \triangle ADC.$$

(A jeśli uda się to wszystko to można pomyśleć dlaczego prosta AS jest prostopadła do CD, gdzie $S = BD \cap CE$, ale to już nie za 2p)

Zadanie 113. *Niech T będzie punktem przecięcia środkowych w trójkącie ABC, zaś S – środkiem okręgu wpisanego w ABC. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:*

(a) proste TS jest równoległa do jednej z prostych AB, BC lub CA,

(b) jeden z boków trójkąta ABC ma długość równą połowie sumy pozostałych dwóch boków.

Zadanie 114. *Wiadomo, że środki boków dowolnego czworokąta wyznaczają równoległobok. Dla jakich czworokątów równoległobok ten jest prostokątem, a dla jakich rombem, a dla jakich – kwadratem?*

Zadanie 115. *Kąty α i β trójkąta ABC spełniają równość $3\alpha + 2\beta = 180°$. Wykaż, że $a^2 + bc = c^2$.*

Zadanie 116. *Punkt P leży na dwusiecznej kąta o wierzchołku C. Prosta l przechodząca przez P przecina ramiona tego kąta odcinając na nich odcinki długości a oraz b. Wykaż, że wartość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nie zależy od wyboru prostej l.*

Zadanie 117. *Na zewnątrz boku BC trójkąta równobocznego ABC zbudowano półkole (o średnicy BC). Wiedząc, że punkty K, L dzielą to półkole na trzy równe łuki wykaż, że proste AK oraz AL dzielą BC na trzy równe części.*

Zadanie 118. *(2p) W trójkącie równoramiennym ABC (gdzie $AB = AC$) ze środka H podstawy BC poprowadzono prostą prostopadłą do AC przecinającą ten bok w punkcie E. Niech O będzie środkiem odcinka EH. Wykaż, że proste AO oraz BE są prostopadłe.*

Zadanie 119. *(3p) Jedna z przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą. Wykaż, że długości rzutów przeciwległych boków tego czworokąta na drugą z przekątnych są równe.*

Zadanie 120. *Na okręgu o środku O, punkty A i B wyznaczają łuk o mierze kątowej $60°$. Punkt M należy do tego łuku. Wykaż, że proste łączące środki MA i OB oraz środki MB i OA są prostopadłe.*

Zadanie 121. *Niech M, N będą środkami boków AD oraz BC prostokąta $ABCD$. Punkt P leży na przedłużeniu DC poza punkt D, zaś punkt Q jest przecięciem prostych PM oraz AC. Wykaż, że $\angle QNM = \angle MNP$.*

Zadanie 122. *Niech AC będzie dłuższą z przekątnych równoległoboku $ABCD$. Niech E, F będą rzutami C na przedłużenia boków AB i AD. Wykaż, że $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.*

Zadanie 123. *Niech P, Q, R będą dowolnymi punktami na bokach BC, CA, oraz AB trójkąta ABC. Wykaż, że środki okręgów opisanych na trójkątach AQR, BRP oraz CPQ tworzą trójkąt podobny do trójkąta ABC.*

Zadanie 124. *Załóżmy, że okrąg wpisany w trójkąt ABC przecina bok BC w punkcie D, bok CA w punkcie E, oraz bok AB w punkcie F. Niech G będzie rzutem D na EF. Wykaż, że:*

$$\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}.$$

Zadanie 125. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg tak, że $AB = CD = EF$. Niech P, Q, R będą przecięciami odpowiednio: prostych AC i BD, prostych CE oraz DF, i wreszcie: prostych EA i FB. Udowodnij, że trójkąty PQR oraz BDF są podobne.*

Zadanie 126. *W trójkącie ABC spełniona jest równość $AB + BC = 3AC$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB oraz BC w punktach D i E (odpowiednio). Niech K, L będą punktami symetrycznymi do D i E względem I. Wykaż, że na czworokącie $ACKL$ można opisać okrąg.*

Zadanie 127. *Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Niech M_1 oraz M_2 będą środkami ciężkości trójkątów AOB oraz COD. Niech H_1, H_2 będą ortocentrami trójkątów BOC oraz DOA. Wykaż, że proste M_1M_2 oraz H_1H_2 są prostopadłe.*

1.10 Twierdzenie o dwusiecznej, potęga punktu względem okręgu

Zadanie 128. *Punkt P leży na dwusiecznej kąta o wierzchołku C. Prosta l przechodząca przez P przecina ramiona tego kąta odcinając na nich odcinki długości a oraz b. Wykaż, że wartość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nie zależy od wyboru prostej l.*

Zadanie 129. *Dany jest okrąg o środku O, w którym średnice AB i CD są prostopadłe. Cięciwa DF przecina AB w punkcie E. Wiedząc, że $DE = 6$ oraz $EF = 2$ wyznacz promień okręgu.*

Zadanie 130. *Niech Γ_1, Γ_2 będą dwoma przecinającymi się okręgami. Niech wspólna styczna do Γ_1 oraz do Γ_2 przechodzi przez te okręgi w punktach odpowiednio A, B. Wykaż, że wspólna cięciwa okręgów Γ_1, Γ_2 przecina, po przedłużeniu, odcinek AB dokładnie w połowie.*

Zadanie 131. *Niech C będzie punktem na półokręgu o średnicy AB oraz niech D będzie środkiem łuku AC. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą BC oraz niech F będzie punktem przecięcia prostej AE z półokręgiem. Pokaż, że BF, po przedłużeniu, dzieli odcinek DE na połowy.*

Zadanie 132. *Przez wierzchołek A trójkąta ABC prowadzimy okrąg ω styczny do prostej BC w punkcie C. Niech M będzie środkiem boku BC, zaś D – punktem przecięcia prostej AM z okręgiem ω. Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie ABD jest styczny do prostej BC w wierzchołku B.*

Zadanie 133. *Dany jest trójkąt ABC. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie obrana w punkcie C przecina prostą AB w punkcie S. Niech P będzie takim punktem wewnątrz ABC, że $SP = SC$. Wykaż, że prosta SP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie APB.*

Zadanie 134. *Niech BD będzie dwusieczną kąta B w trójkącie ABC. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina AB w E, natomiast okrąg opisany na trójkącie ABD przecina BC w F. Wykaż, że $AE = CF$.*

Zadanie 135. *Dane są punkty A, B oraz okrąg $\mathcal{K}$. Udowodnić, że środki ciężkości (czyli punkty przecięcia środkowych) trójkątów ABC, gdzie $C \in \mathcal{K}$, tworzą okrąg.*

Zadanie 136. *Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów o_1 i o_2 przecina prostą łączącą ich środki w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że $\angle DAE = 90^\circ$.*

Zadanie 137. *Trzy okręgi leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta. Do każdej pary tych okręgów poprowadzono styczną zewnętrzną, różną od prostych AB, BC i CA. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono odpowiednio przez D, E, F. Udowodnić, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 138. *Okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie P, a okrąg o_2 jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie Q. Wspólna styczna wewnętrzna okręgów o_1 i o_2 jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B. Dowieść, że proste PA i QB przecinają się w punkcie leżącym na o.*

Zadanie 139. *Dwa okręgi są współśrodkowe. Cięciwa AC zewnętrznego okręgu jest styczna do wewnętrznego okręgu w punkcie Q. Punkt P jest środkiem AQ. Prosta przechodząca przez A przecina wewnętrzny okrąg w punktach R oraz S. Pokaż, że trójkąty RAP oraz CAS są podobne.*

Zadanie 140. *Niech ABC będzie trójkątem rozwartym takim, że $\angle ABC = 15°$ oraz $\angle BAC > 90°$. Załóżmy, że O jest środkiem okręgu opisanego na ABC oraz, że AO przecina BC w punkcie D. Przy tym zachodzi równość $OD^2 + OC \cdot DC = OC^2$. Znajdź kąt ACB.* *Wykaż, że promień okręgu opisanego na ABC równy jest BD*

Zadanie 141. *Boki AC oraz BC trójkąta ABC mają długości odpowiednio 450 oraz 300. Punkt K jest środkiem boku AC, zaś punkt L leży na boki AB tak, że prosta CL jest dwusieczną kąta ACB. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków BK i CL oraz niech M będzie punktem na prostej BK takim, że K jest środkiem PM. Jeśli $AM = 180$, to $LP = ?$.*

Zadanie 142. *Niech C_1 oraz C_2 będą okręgami współśrodkowymi, przy czym C_2 leży wewnątrz C_1. Niech A będzie punktem na C_1 oraz B punktem na C_2 tak, że AB jest styczny do C_2. Niech C będzie drugim punktem przecięcia AB oraz C_1 oraz niech D będzie środkiem AB. Prosta przechodząca przez punkt A przecina C_2 w E oraz w F tak, że symetralne odcinków DE i CF przecinają się w punkcie M na odcinku AB. Znajdź wartość ilorazu AM/MC.*

Zadanie 143. *Punkty D, E należą do boku AB trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do BC przecina AC w F. Prosta przechodząca przez E i równoległa do AC przecina bok BC w G. Prosta FG przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q. Wykazać, że punkty D, E, P, Q leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 144. *Z punktu A prowadzimy styczne do okręgu o środku w punkcie O. Punkty styczności to P, Q. Niech M będzie środkiem PQ. Udowodnij, że jeśli K, L są punktami na okręgu O takimi, że K, L, A są współliniowe, wówczas $\angle MKO = \angle MLO$.*

Zadanie 145. *Dany jest trójkąt ABC o bokach $AB = 3$, $BC = 4$ oraz $CA = 5$. Okrąg ω przechodzi przez punkt C oraz przecina boki BC, AB oraz AC w dodatkowo punktach D, E, F. Wiedząc, że $EF = DF$ oraz, że $\frac{DG}{EG} = 3/4$ znajdź DE.*

Zadanie 146. *Niech C_1 oraz C_2 będą okręgami współśrodkowymi, przy czym C_2 leży wewnątrz C_1. Niech A będzie punktem na C_1 oraz B punktem na C_2 tak, że AB jest styczny do C_2. Niech C będzie drugim punktem przecięcia AB oraz C_1 oraz niech D będzie środkiem AB. Prosta przechodząca przez punkt A przecina C_2 w E oraz w F tak, że symetralne odcinków DE i CF przecinają się w punkcie M na odcinku AB. Znajdź wartość ilorazu AM/MC.*

Zadanie 147. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt P leży wewnątrz $ABCD$ i miary kątów PAB, PBC, PCD oraz PDA są równe. Proste AD i BC przecinają się w Q oraz proste AB i CD przecinają się w R. Udowodnij, że proste PQ oraz PR tworzą kąt o tej samej mierze, co kąt (jeden z dwóch) między przekątnymi czworokąta $ABCD$.*

Zadanie 148. *Niech P będzie punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Załóżmy, że dwusieczne kątów APB, BPC, CPD oraz DPA przecinają boki AB, BC, CD oraz DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Znajdź wszystkie takie P, że $KLMN$ to równoległobok.*

Zadanie 149. *Niech P, Q będą punktami styczności prostych poprowadzonych z punktu A z okręgiem o środku w punkcie O. Niech M będzie środkiem PQ. Z punktu A prowadzimy prostą przecinającą ten okrąg w punktach K, L. Wykaż, że $\angle MKO = \angle MLO$.*

Zadanie 150. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech P będzie punktem przecięcia symetralnych przekątnych AC i BD tego czworokąta. Niech K, L, M, N będą spodkami dwusiecznych kątów APB, BPC, CPD, DPA na boki odpowiednio AB, BC, CD, DA. Wykaż, że $KLMN$ jest równoległobokiem.*

Zadanie 151. *Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie D. Prosta k jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Odcinek AC jest średnicą okręgu o_1. Prosta l przechodzi przez punkt C i jest styczna do okręgu o_2 w punkcie E. Wykaż, że $AC = CE$.*

Zadanie 152. *Dany jest trójkąt ABC o bokach $AB = 3$, $BC = 4$ oraz $CA = 5$. Okrąg ω przechodzi przez punkt B oraz przecina boki BC, AB dodatkowo w punktach D, E, oraz bok AC w punktach F i G. Wiedząc, że $EF = DF$ oraz, że $\frac{DG}{EG} = 3/4$, znajdź długość DE.*

Zadanie 153. *Niech H będzie ortocentrum (punkt przecięcia wysokości) trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg Γ_A, którego środkiem jest środek boku BC przechodzi przez punkt H i przecina bok BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_1, B_2 położone na boku AC oraz C_1 i C_2 na boku AB. Udowodnij, że szóstka punktów A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 oraz C_2 leży na jednym okręgu.*

Zadanie 154. *Okręgi Γ_1 oraz Γ_2 są styczne wewnętrznie do okręgu Γ odpowiednio w punktach (różnych od siebie) M, N. Przy tym Γ_1 przechodzi przez środek Γ_2. Prosta przechodząca przez punkty przecięcia Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w A i B. Proste MA i MB przecinają Γ_1 w C i D. Udowodnij, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2.*

Zadanie 155. *Na trójkącie ABC opisano okrąg o środku O. Styczne do tego okręgu poprowadzone w wierzchołkach B, C przecinają się w punkcie P. Niech L będzie środkiem boku BC. Wykaż, że $\measuredangle OAL = \measuredangle OPA$.*

1.11 Pole figur, lemat 1/2, pole zorientowane

Zadanie 156. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Przekątne AD, BE, CF są średnicami tego okręgu. Udowodnij, że $[ABCDEF] = 2[ACE]$.*

Zadanie 157. *Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ istnieje punkt O taki, że pola trójkątów OAB, OBC, OCD oraz ODA są równe. Udowodnij, że jedna z przekątnych czworokąta dzieli drugą na pół.*

Zadanie 158. *Dany jest sześciokąt wypukły. Każdy z trzech odcinków łączących środki przeciwległych boków tego sześciokąta dzieli go na dwa pięciokąty o równych polach. Dowieść, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 159. *W czworokącie wypukłym $ABCD$ nie będącym równoległobokiem prosta łącząca środki przekątnych przecina bok BC w punkcie P. Wykazać, że:*

$$[ABP] + [CDP] = [ADP].$$

Zadanie 160. *Dany jest trójkąt ABC. Wskaż przynajmniej jeden punkt P w płaszczyźnie tego trójkąta, że zachodzą następujące stosunki pomiędzy wartościami pól skierowanych $S(PBC)$, $S(PCA)$ oraz $S(PAB)$:*

(a) $S(PBC) : S(PCA) : S(PAB) = 1 : 1 : 1$,

(b) $S(PBC) : S(PCA) : S(PAB) = BC : CA : AB$.

Każdy z podpunktów (a), (b) jest niezależnym zadaniem. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 161. *Dany jest trójkąt ABC o polu 1. Niech M będzie rzutem punktu B na dwusieczną kąta ACB. Znajdź pole trójkąta AMC.*

Zadanie 162. *Niech K, L, M, N będą środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM oraz LN przecinają się w punkcie O. Wykaż, że:*

$$[AKON] + [CLOM] = [BKOL] + [DNOM].$$

Zadanie 163. *Na każdym z boków równoległoboku wybieramy punkt. Pole tak utworzonego czworokąta o wierzchołkach w wybranych punktach równe jest połowie równoległoboku. Udowodnij, ze przynajmniej jedna z przekątnych czworokąta jest równoległa do boku wyjściowego równoległoboku.*

Zadanie 164. *Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykazać, że pole jednego z trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB nie przekracza 1/6 pola sześciokąta $ABCDEF$.*

Zadanie 165. *Punkty K, L, M, N leżą na bokach AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ tak, że odcinki KM oraz LN są równoległe do boków równoległoboku. Odcinki te przecinają się w punkcie O. Wykaż, że pola równoległoboków $KBLO$ oraz $MDNO$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy O leży na przekątnej AC.*

Zadanie 166. *Kwadrat podzielono na cztery części przy pomocy dwóch prostych prostopadłych, których punkt przecięcia leży wewnątrz kwadratu. Udowodnij, że jeśli pola trzech z uzyskanych w ten sposób części kwadratu są równe, to pola wszystkich czterech części są równe.*

Zadanie 167. *Trójkąt ABC podzielono na 6 mniejszych trójkątów przy pomocy prostych przechodzących przez wierzchołki trójkąta i pewien punkt P w jego wnętrzu. Pola czterech z powyższych trójkątów wynoszą $[APF] = 40$, $[BPF] = 30$, $DPB = 35$, $CPE = 84$. Wyznacz $[ABC]$.*

Zadanie 168. *W trapezie $ABCD$ mamy $AD \,||\, BC$ oraz $AD < BC$, zaś przedłużenia boków BA i CD przecinają się w punkcie E. Niech F będzie takim punktem na prostej BC, że $EF \,||\, BD$. Niech G będzie takim punktem na przedłużeniu odcinka BC, że $CG = BF$ (a więc G nie należy do odcinka BC!). Udowodnij, że $EG \,||\, AC$.*

Zadanie 169. *Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wykazać, że suma pól pewnych czterech spośród trójkątów ABC, BCD, CDE, DEA, EAB jest większa od pola pięciokąta $ABCDE$.*

Zadanie 170. *Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do czworokąta wypukłego $ABCD$ stycznego do prostych AB i AD zawierających boki tego czworokąta. Wykazać, że punkt J oraz środki przekątnych AC i BD leżą na jednej prostej.*

Zadanie 171. *W czworokącie $ABCD$ punkty P oraz S są środkami przekątnych BD oraz AC, oraz punkt O jest punktem przecięcia prostych AD oraz BC. Udowodnij, że:*

$$[ABCD] = 4[OSP].$$

Zadanie 172. *Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym:*

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB}.$$

Wykazać, że środki odcinków AC, BD i KL leżą na jednej prostej.

Zadanie 173. *W czworokącie $ABCD$ punkty P oraz S są środkami przekątnych BD oraz AC oraz punkt O jest punktem przecięcia prostych AD oraz BC. Udowodnij, że $[ABCD] = 4[OSP]$.*

Wskazówka: Niech M będzie środkiem odcinka PQ. Wykaż, że dla dowolnych punktów A_1, A_2 mamy:

$$S(A_1A_2M) = \frac{1}{2}\left(S(A_1A_2P) + S(A_1A_2Q)\right).$$

Zadanie 174. *Niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC oraz niech $GA = 2\sqrt{3}$, $GB = 2\sqrt{2}$ oraz $GC = 2$. Znajdź pole trójkąta ABC.*

Zadanie 175. *Pięciokąt wypukły $ABCDE$ ma następującą własność. Trójkąty ABC, BCD, CDE, DEA, EAB mają pola równe 1. Wyznacz pole pięciokąta $ABCDE$.*
Wskazówka: Rozwiązaniami równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$ są liczby $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oraz $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 176. *Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem oraz E, F – takimi punktami na bokach AD oraz DC, że $AF = CE$. Proste AF i CE przecinają się w P. Wykaż, że PB jest dwusieczną kąta APC.*

Zadanie 177. *Trójkąty ABC i DEF są takie, że AD, BE oraz CF są równoległe. Wykaż, że:*

$$S(AEF) + S(DBF) + S(DEC) + S(DBC) + S(AEC) + S(ABF) = 3S(ABC) + 3S(DEF).$$

Zadanie 178. *Niech ABC będzie trójkątem takim, że $\measuredangle BAC = 90°$. Niech $D \in BC$ będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z punktu A. Prosta łącząca środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $[ABC] \geqslant 2[AKL]$.*

Zadanie 179. *Niech O będzie środkiem okręgu opisanego, zaś H – ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Wykaż, że pole jednego z trójkątów AOH, BOH, COH jest równe sumie pól pozostałych dwóch.*

Zadanie 180. $(\star, 5p)$ *(Jak ktoś wie co to jest sinus...) Przedłużenia boków AD oraz BC czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Niech M, N będą środkami boków AB oraz CD, zaś P oraz Q niech będą środkami przekątnych AC oraz BC. Wykaż, że:*

(a) $[PMQN] = \frac{1}{2}|[ABD] - [ACD]|$,

(b) $[OPQ] = \frac{1}{4}[ABCD]$.

2 Klasa druga

2.1 Trygonometria

Zadanie 181. *Równoległobok ma (sąsiednie) boki długości a i b oraz przekątne długości k i l. Wykaż, że*

$$2a^2 + 2b^2 = k^2 + l^2.$$

Zadanie 182. *Równoległobok ma (sąsiednie) boki długości a i b oraz przekątne długości k i l. Wykaż, że równość $a^4 + b^4 = k^2 l^2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z kątów wewnętrznych tego równoległoboku ma miarę $45°$.*

Zadanie 183. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że*

$$AB + CD = \sqrt{2}AC \quad \text{oraz} \quad BC + DA = \sqrt{2}BD.$$

Rozważmy równoległoboki $ABEC$ oraz $AFBC$. Pokaż, że:

(a) $\sqrt{2}BE \geqslant DE$ *oraz, że* $\sqrt{2}BD \geqslant DF$

(b) $DE^2 + DF^2 = 2BD^2 + 2AC^2$,

(c) $ABCD$ *to równoległobok.*

Zadanie 184. *W trójkącie ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina BC w punkcie D. Wykaż, że:*

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD.$$

Zadanie 185. *Punkty M, N leżą na boku BC trójkąta ABC tak, że proste AM oraz AN są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC. Udowodnij, że:*

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Zadanie 186. *Dany jest punkt P oraz prosta l niezawierająca punktu P. Punkty A, B, C, D leżą na prostej l. Prosta k różna od l, niezawierająca punktu P przecina proste PA, PB, PC, PD w punktach odpowiednio A', B', C', D'. Wykaż, że:*

$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} \div \frac{A'D'}{B'D'}.$$

Zadanie 187. *Dany jest trójkąt ABC. Wyznacz taki punkt M na prostej AB, że suma długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ACM oraz BCM jest najmniejsza możliwa.*

Zadanie 188. *W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg. Niech P będzie rzutem środka tego okręgu na prostą AC. Wykaż, że miary kątów APB oraz APD są równe.*

Zadanie 189. *W trójkącie ABC mamy $\measuredangle ABC = 80°$, $\measuredangle ACB = 70°$ oraz $BC = 2$. Wysokości trójkąta przecinają się w punkcie H. Wyznacz długość odcinka AH.*

Zadanie 190. *Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie G. Punkt D jest środkiem boku BC. Trójkąt BDG jest równoboczny i każdy z jego boków ma długość 1. Wyznacz długości boków trójkąta ABC.*

Zadanie 191. *W trójkącie ABC mamy $AB = AC$. Punkt P leży na płaszczyźnie i spełnia równość: $\measuredangle ABP = \measuredangle ACP$. Pokaż, że P musi leżeć albo na BC, albo na symetralnej boku BC.*

Zadanie 192. *Odległość pomiędzy dowolnymi dwoma z czterech punktów A, B, C, D położonych na płaszczyźnie wynosi nie więcej niż 1. Znajdź promień najmniejszego możliwego koła, które zawiera wszystkie te punkty niezależnie od ich położenia.*

Zadanie 193. *Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta o polu S. Wykaż, że zachodzi nierówność:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Zadanie 194. *W trójkącie ABC długości boków spełniają nierówności $a \geqslant b \geqslant c$. Wiedząc, że:*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{sin^3(\alpha) + sin^3(\beta) + sin^3(\gamma)} = 7$$

znajdź największą możliwość wartość a.

Zadanie 195. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg o środku O. Proste AC i BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie E. Wykaż, że*

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2.$$

Zadanie 196. *Spośród wszystkich wielokątów wpisanych w okrąg o promieniu r wskaż ten, w którym suma kwadratów boków jest najmniejsza.*

Zadanie 197. *Rozważmy wszystkie ostrokątne trójkąty, w których ustalona jest długość boku a i miara leżącego naprzeciw niego kąta wewnętrznego trójkąta równa α. Wyznacz minimalną wartość sumy $b^2 + c^2$, gdzie b, c to pozostałe długości boków trójkąta.*

Zadanie 198. *Udowodnij, że spośród wszystkich trójkątów o ustalonym kącie α przy wierzchołku A oraz ustalonym polu S, trójkąt równoramienny o podstawie BC jest tym, który ma najkrótszą długość boku BC.*

Zadanie 199. *Kąt pomiędzy bokami AB oraz CD czworokąta wypukłego $ABCD$ ma miarę ϕ. Udowodnij, że:*

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2(AB \cdot BCcos(B) + BC \cdot CDcos(C) + CD \cdot ABcos(\phi)).$$

Zadanie 200. *Niech A', B' będą spodkami wysokości z wierzchołków A oraz B trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $AC \neq BC$. Okrąg k przechodzi przez punkty A' i B' oraz jest styczny do boku AB w punkcie D. Wiedząc, że trójkąty ADA' oraz BDB' mają równe pola pokaż, że $\angle A'DB' = \angle ACB$.*

Zadanie 201. *Na boku AB trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABDE$ o środku O. Niech M, N będą środkami boków AC oraz BC trójkąta. Załóżmy, że długości $a = BC$ oraz $b = AC$ boków trójkąta ABC są ustalone. Jaką miarę musi mieć kąt $\angle ACB$, by suma $MO + NO$ była największa możliwa?*

Zadanie 202. *W czworokącie wypukłym $ABCD$ proste CB oraz DA są zewnętrznymi dwusiecznymi (przypomnij sobie co to znaczy!) kątów DCA oraz CDB. Punkty E oraz F leżą na półprostych AC oraz BD tak, że czworokąt $CEFD$ jest cykliczny (da się na nim opisać okrąg). Punkt P leży w obszarze czworokąta $ABCD$ i ma tę własność, że DA oraz CB są dwusiecznymi zewnętrznymi kątów PDE oraz PCF. Proste AD oraz BC przecinają się w Q. Wykaż, że P leży na AB wtedy i tylko wtedy, gdy Q leży na EF.*

Zadanie 203. *W trójkącie ABC niech D oraz E będą punktami na boku BC takimi, że $\angle BAD = \angle CAE$. Wykaż, że jeśli M i N są, odpowiednio, punktami styczności boku BC z okręgami wpisanymi w trójkąty ABD oraz ACE, to:*

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}.$$

Zadanie 204. *Wszystkie kąty wewnętrzne w trójkącie ABC są mniejsze niż $120°$. Wykaż, że:*

$$\frac{cos(A) + cos(B) - cos(C)}{sin(A) + sin(B) - sin(C)} > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 205. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem, w który można wpisać okrąg i takim, że wszystkie wewnętrzne i zewnętrzne kąty przy jego wierzchołkach wynoszą przynajmniej $60°$. Udowodnij, że zachodzą nierówności:*

$$|AB^3 - AD^3| \leqslant 3|BC^3 - CD^3| \leqslant 9|AB^3 - AD^3|.$$

Zadanie 206. *Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg i niech*

$$l_a = \frac{m_a}{M_a}, \quad l_b = \frac{m_b}{M_b}, \quad l_c = \frac{m_c}{M_c},$$

przy czym m_a, m_b, m_c są długościami dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta (opadających odpowiednio na boki długości a, b, c,), zaś M_a, M_b, M_c są długościami dwusiecznych przedłużonych aż do punktu przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wykaż, że:

$$\frac{l_a}{sin^2(A)} + \frac{l_b}{sin^2(B)} + \frac{l_c}{sin^2(C)} \geqslant 3.$$

2.2 Twierdzenia Cevy i Menelaosa

Zadanie 207. *Bok AB kwadratu $ABCD$ został przedłużony do punktu P tak, że B leży na odcinku AP oraz $BP = 2AB$. Niech M będzie środkiem boku CD. Proste BM i AC przecinają się w punkcie Q. Proste PQ*
i BC przecinają się w punkcie R. Wyznacz stosunek $\frac{CR}{RB}$.

Zadanie 208. *Na przekątnych AC oraz CE sześciokąta foremnego $ABCDEF$ znajdują się punkty odpowiednio M i N, przy czym $AM/AC = CN/CE = r$. Wyznacz wartość liczby r wiedząc, że punkty B, M, N są współliniowe.*

Zadanie 209. *W trójkącie ABC mamy $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 40^\circ$. Punkty P i Q znajdują się wewnątrz tego trójkąta tak, że $\measuredangle PAB = \measuredangle QAC = 20^\circ$ oraz $\measuredangle PCB = \measuredangle QCA = 10^\circ$. Pokaż, że punkty B, P, Q są współliniowe.*

Zadanie 210. *W trójkącie ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach CB, CA, AB. tak, że proste AD, BE, CF mają punkt wspólny. Punkty P, Q, R leżą na bokach EF, FD, DE trójkąta EFD tak, ze proste DP, EQ, FR mają punkt wspólny. Pokaż, że także proste AP, BQ, CR mają punkt wspólny.*

Zadanie 211. *Dany jest trójkąt ABC. Punkty L, Z leżą na boku BC, punkty M, X leżą na boku CA, zaś punktu K, Y leżą na boku AB (kolejność, idąc od A przeciwnie do ruchu wskazówek zegara: $A, Y, K, B, Z, L, C, X, M$). Przy tym $AB||MZ$, $BC||KX$, $CA||LY$. Dowieść, że proste $KX, LYiMZ$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\frac{AY}{YK} \cdot \frac{BZ}{ZL} \cdot \frac{CX}{XM} = 1.$$

Zadanie 212. *W trójkącie ostrokątnym ABC punkt F jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkt P należy do odcinka CF. Prosta AP przecina bok BC w punkcie D, a prosta BP przecina bok CA w punkcie E. Udowodnić, że $\measuredangle DFC = \measuredangle EFC$.*

Zadanie 213. *Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BEFC$ oraz $CGHA$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Wykazać, że proste AE, BH oraz CD przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 214. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Dwusieczne kątów ACB i ACD przecinają odcinki AB i AD odpowiednio w punktach P i Q. Dwusieczna kąta zewnętrznego BCD przecina prostą BD w punkcie R. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.*

Zadanie 215. *Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, przy czym proste DE i AB są równoległe. Punkt P leży na odcinku AM. Proste EM i CP przecinają się w punkcie X, a proste DP i CM przecinają się w punkcie Y. Wykazać, że punkty X, Y, B leżą na jednej prostej.*

Zadanie 216. *Okrąg o wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na łukach EF, FD i DE okręgu o. Wykaż, że jeśli proste DX, EY i CZ przecinają się w jednym punkcie, to również proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 217. *Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Rzut z wierzchołka kąta prostego C to punkt K. Punkt E leży na AB i jest taki, że CE jest dwusieczną kąta ACK. Prosta przechodząca przez B i równoległa do CE przecina CK w F. Pokaż, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.*

Zadanie 218. *W trójkącie ABC punkt M jest rzutem punktu A na dwusieczną kąta BCA. Punkty N oraz L są odpowiednio rzutami A oraz C na dwusieczną kąta ABC. Niech F będzie punktem przecięcia prostych MN oraz AC. Niech E będzie punktem przecięcia prostych BF oraz CL. Niech D będzie punktem przecięcia prostych BL oraz AC. Wykaż, że proste DE oraz MN są równoległe.*

Zadanie 219. *Niech ABC będzie trójkątem. Okrąg ω przechodzi przez wierzchołki B oraz C. Okrąg ω_1 jest styczny wewnętrznie do ω oraz do boków AB i AC trójkąta, odpowiednio w punktach T, P, Q. Niech M będzie środkiem łuku BC (zawierającego T) okręgu ω. Pokaż, że proste PQ, BC oraz MT przecinają się w jednym punkcie.*

2.3 Punkty izogonalnie sprzężone

Zadanie 220. *Dany jest trójkąt ABC taki, że $AC = BC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta przy czym $\measuredangle PAC = \measuredangle ABQ$ oraz $\measuredangle PBC = \measuredangle BAQ$. Dowieść, że punkty C, P, Q leżą na jednej prostej.*

Zadanie 221. *Dany jest trójkąt ABC, przy czym kąty wewnętrzne trójkąta przy wierzchołkach A, B, C mają miary odpowiednio α, β, γ. Niech P będzie punktem wewnątrz $\triangle ABC$ takim, że:*

$$\measuredangle BPC = \measuredangle CPA = \measuredangle APB = 120^\circ.$$

Wykaż, że punkt P^* izogonalnie sprzężony do P względem trójkąta ABC ma następujące własności:

$$\measuredangle BP^*C = 60 + \alpha, \quad \measuredangle CP^*A = 60 + \beta, \quad \measuredangle AP^*B = 60 + \gamma.$$

Niech D będzie punktem po przeciwnej stronie prostej BC takim, że trójkąt BCD jest równoboczny. Wykaż, że zachodzi podobieństwo:

$$\triangle AP^*C \sim \triangle ABD.$$

Zadanie 222. *Dany jest trójkąt ABO, przy czym kąt BOA jest ostry. Niech M leży wewnątrz odcinka AB oraz niech P, Q będą rzutami M na boki AO, BO trójkąta. Pokaż, że zbiór ortocentrów wszystkich trójkątów OPQ uzyskanych w ten sposób leży na jednej prostej.*

Zadanie 223. *Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P. Powiemy, że trójkąt utworzony z rzutów punktu P na proste zawierające boki ABC to tzw. trójkąt Simsona (to nazwa własna, ale nie jest przypadkowa – patrz przypadek, gdy P leży na okręgu opisanym). Trójkątem antySimsona punktu P nazwiemy taki, który powstaje z przecięcia prostych prostopadłych do AP, BP, CP w wierzchołkach trójkąta (ang. pedal and andipedal triangle). Pokazać, że jeśli punkty P, Q są izogonalne względem $\triangle ABC$, to trójkąt Simsona punktu P jest podobny do trójkąta antySimsona dla Q.*

Zadanie 224. *Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech S_A będzie okręgiem o średnicy AR, gdzie R jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Przyjmijmy, że S_A przecina boki AB oraz AC odpowiednio w punktach M, N. Niech l_A będzie prostą prostopadłą do MN przechodzącą przez wierzchołek A. Analogicznie definiujemy proste l_B oraz l_C. Pokaż, że proste te przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 225. *Dany jest czworokąt $ABCD$ oraz punkt P. Przypuśćmy, że trzy z czterech prostych symetrycznych do AP, BP, CP, DP względem dwusiecznych kątów w wierzchołkach odpowiednio: A, B, C, D przecinają się w jednym punkcie P^*. Wykaż, że wówczas wszystkie cztery proste symetryczne przecinają się w P^*.*

Zadanie 226. *Dany jest czworokąt $ABCD$ oraz punkt P wewnątrz tego czworokąta. Załóżmy, że rzuty punktu P na boki czworokąta leżą na jednym okręgu ω. Wykaż, że wówczas punkt P', symetryczny do P względem środka okręgu ω jest izogonalnie sprzężony do P (względem czworokąta $ABCD$).*

Zadanie 227. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że istnieją w nim punkty A_1, B_1, C_1 na bokach BC, CA oraz AB o następującej własności: jeśli zrzutujemy dwa z nich na odpowiedni bok trójkąta ABC, to środek otrzymanego w ten sposób odcinka jest trzecim z nich. Pokazać, że środek ciężkości trójkąta $A_1B_1C_1$ to punkt Lemoine'a trójkąta ABC.*

Zadanie 228. *Dany jest trójkąt ostrokątny, w którym wszystkie boki są różnej długości. Niech M, N, P będą środkami boków BC, CA oraz AB. Niech D, E będą punktami przecięcia symetralnych boków AB, AC ze środkową AM. Proste BD oraz CE przecinają się w F. Udowodnij, że AF jest symedianą trójkąta ABC.*

Zadanie 229. *Dany jest trójkąt ostrokątny, w którym wszystkie boki są różnej długości. Niech M, N, P będą środkami boków BC, CA oraz AB. Niech D, E będą punktami przecięcia symetralnych boków AB, AC ze środkową AM. Proste BD oraz CE przecinają się w F. Udowodnij, że AF jest symedianą trójkąta ABC.*

Zadanie 230. ($\star$) *W czworokącie wypukłym* $ABCD$ *kąty wewnętrzne* ABC *oraz* CDA *są proste. Niech* H *będzie rzutem prostokątnym* A *na* BD*. Punkty* S *oraz* T *leżą odpowiednio na bokach* AB *oraz* AD *czworokąta, przy czym* H *leży wewnątrz trójkąta* SCT *oraz* $\angle CHS - \angle CSB = 90°$ *i* $\angle THC - \angle DTC = 90°$*. Wykaż, że:*

(a) *Odbicia symetryczne* M, N *punktu* C *względem punktów* B *oraz* D *są punktami izogonalnie sprzężonymi do punktów* T *oraz* S *względem trójkątów* SAH *oraz* TAH*,*

(b) *Prosta* BD *jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie* TSH*.*

Zadanie 231. *Niech* M^* *będzie punktem izogonalnie sprzężonym do punktu* M *względem trójkąta* ABC*. Niech* l *będzie prostą symetryczną do* AM *względem dwusiecznej kąta* BMC*, zaś niech* l^* *będzie prostą symetryczną do* AM^* *względem dwusiecznej kąta* BM^*C*. Pokazać, że proste* l, l^* *przecinają się na prostej* BC *i są symetryczne względem* BC*.*

2.4 Stożkowe

Zadanie 232. *Niech* F *będzie ogniskiem paraboli* $\mathcal{P}$ *o kierownicy* l*. Na paraboli obieramy punkt* X *i rzutujemy go prostopadle na kierownicę uzyskując punkt* X'*. Niech* k *będzie symetralną odcinka* FX'*. Wykaz, że żaden punkt paraboli* $\mathcal{P}$ *nie leży po przeciwnej stronie prostej* k *(nie mówimy więc o punktach na samej prostej) niż punkt* F*.*

Zadanie 233. *Załóżmy, że punkty* P *oraz* Q *leżą na pewnej elipsie tak, że odcinek* PQ *zawiera jedno z jej ognisk, nazwijmy je* F*. Niech drugie ognisko tej elipsy znajduje się w punkcie* G*. Wykazać, że* F *jest punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta* PQG *z prostą* PQ*.*

Zadanie 234. *Załóżmy, że styczne do paraboli poprowadzone z punktu* P *dotykają paraboli w punktach* X *oraz* Y*. Wykaż, że rzut* P' *punktu* P *na kierownicę* l *paraboli jest środkiem odcinka powstałego z rzutów punktów* X *i* Y *na prostą* l*.*

Zadanie 235. *Pokaż, że styczne do paraboli przecinają się na kierownicy wtedy i tylko wtedy, gdy są prostopadłe.*

Zadanie 236. *Pokazać, że w czworokąt wypukły* $ABCD$ *można wpisać elipsę wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt* P *wewnątrz czworokąta, że* $\angle APB + \angle CPD = 180°$*. Punkt* P *jest ogniskiem tej elipsy.*

Zadanie 237. *Punkt* O *leży wewnątrz czworokąta wypukłego* $ABCD$*. Półproste* AB *(o początku w* A*) i* DC *(o początku w* D*) przecinają się w punkcie* P*, a półproste* AD *i* BC *w punkcie* Q*. Punkt* O *leży wewnątrz czworokąta* $ABCD$ *i spełnia warunek* $\angle BOP = \angle DOQ$*. Udowodnić, że* $\angle AOB + \angle COD = 180°$*.*

Zadanie 238. *Dany jest czworokąt wypukły* $ABCD$*, w który wpisano okrąg o środku* I*. Niech* K, L *będą rzutami* C *na* BI *oraz* DI*, zaś niech* M, N *będą rzutami* A *na* BI *oraz* DI*. Wykazać, że* K, L, M, N *leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 239. *Dany jest czworokąt wypukły* $ABCD$*, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym w punkcie* P*. Niech* O *będzie takim punktem wewnątrz czworokąta, że* $\angle BDA = \angle ODC$ *oraz* $\angle DBA = \angle OBC$*. Wykaż, że rzuty prostokątne punktów* P *oraz* O *na boki czworokąta* $ABCD$ *leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 240. *Udowodnij, że dla każdego punktu* P *na okręgu opisanym na trójkącie* ABC *(za wyjątkiem wierzchołków) istnieje parabola wpisana w* ABC *o ognisku w tym punkcie. Czym jest kierownica tej paraboli?*

Zadanie 241. *Dany jest ostrosłup* $ABCD$*, w którego podstawie znajduje się deltoid* $ABCD$*. Załóżmy, że w ostrosłup ten można wpisać sferę. Pokazać, że rzut środka tej sfery na płaszczyznę* $ABCD$ *wypada albo w punkcie* S *przecięcia przekątnych podstawy, albo w punkcie izogonalnym do niego (względem czworokąta* $ABCD$*).*

Zadanie 242. *Dany jest trójkąt* ABC *i parabola* $\mathcal{P}$ *o tej własności, że proste zawierające boki tego trójkąta są styczne do paraboli* $\mathcal{P}$*. Wykaż, że ognisko tej paraboli leży na okręgu opisanym na trójkącie* ABC*.*

Zadanie 243. ($\star$) *Wykaż, że ortocentrum trójkąta* ABC *to punkt wspólny kierownic wszystkich parabol wpisanych w trójkąt* ABC*.*

2.5 Przekształcenia afiniczne

Zadanie 244. *Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD}$. Proste b, c, d przechodzą odpowiednio przez punkty B, C, D oraz są równoległe odpowiednio do prostych KL, KM, LM. Udowodnij, że proste b, c, d przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 245. *Każda z przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach. Wykaż, że ten czworokąt jest równoległobokiem.*

Zadanie 246. *Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Dowieść, że jeżeli trójkąt DEF jest równoboczny, to także trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 247. *Przez punkt wewnętrzny trójkąta o polu T prowadzimy proste prostopadłe do boków trójkąta, dzielące go na trzy mniejsze trójkąty oraz trzy równoległoboki. Niech T_1, T_2, T_3 będą polami trzech uzyskanych trójkątów. Pokazać, że:*

$$\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}.$$

Zadanie 248. *Niech ABC będzie trójkątem o polu 1 oraz niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP oraz CP przecinają boki BC, CA, AB w punktach K, L, M. Powstaje w ten sposób 6 trójkątów: $PAM, PMC, PCK, PKB, PBL, PLA$. Pokaż, że przynajmniej dwa z tych sześciu trójkątów mają pola $\leqslant 1/6$.*

Zadanie 249. *Trapez $ABCD$ ma podstawy AD oraz BC. Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do CD, przecinającą przekątną AC w punkcie P. Podobnie, przez punkt C prowadzimy prostą równoległą do AB, przecinającą przekątną BD w punkcie Q. Pokazać, że odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu.*

Zadanie 250. *Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obrano punkty M, N, P.*

- *(a) Udowodnij, że jeśli punkty M_1, N_1, P_1 są symetryczne do M, N, P względem środków odpowiednich boków trójkąta, to $[MNP] = [M_1N_1P_1]$.*
- *(b) Udowodnij, że jeśli M_1, N_1, P_1 są punktami na bokach AC, BA oraz CB takimi, że $MM_1||BC, NN_1||CA, PP_1||AB$, to $[MNP] = [M_1N_1P_1]$.*

Zadanie 251. ($\star$) *Punkt P leżący wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma tę własność, że jego rzuty prostokątne na proste AB, BC, CD oraz DA leżą na jednym okręgu o. Dowieść, że środki odcinków AC i BD oraz środek okręgu o leżą na jednej prostej.*

Zadanie 252. ($\star$) *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P leży wewnątrz tego czworokąta. Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABP, BCP, CDP oraz DAP. Wykazać, że środki odcinków O_1O_3, O_2O_4 i OP leżą na jednej prostej.*

Zadanie 253. *Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP = EQ$.*

2.6 Inwersja

Zadanie 254. *Okręgi $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ są styczne wewnętrznie do okręgu Γ odpowiednio w punktach A, B, C, D. Ponadto okręgi Γ_A i Γ_C są styczne zewnętrznie do obu okręgów Γ_B i Γ_D. Proste styczne do okręgu Γ w punktach A i C przecinają się w punktcie S. Uzasadnić, że przy inwersji o środku S i promieniu SA okręgi $\Gamma, \Gamma_A, \Gamma_C$ są stałe. Pokazać, że punkty S, B, D leżą na jednej prostej.*

Zadanie 255. *Żadne trzy spośród czterech punktów A, B, C, D nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że kąt pomiędzy okręgami opisanymi na trójkątach ABC i ABD jest równy kątowi pomiędzy okręgami opisanymi na trójkątach ACD oraz BCD.*

Zadanie 256. *Dany jest punkt A oraz okrąg o o środku S nie zawierający punktu A. Przez A prowadzimy styczną do o w punkcie M. Wykaż, że rzut punktu M na prostą SA jest obrazem inwersyjnym punktu A względem okręgu s.*

Zadanie 257. *Dany jest punkt S oraz dwa okręgi o_1 i o_2. Niech o będzie okręgiem stycznym do o_1 i o_2 przechodzącym przez S. Wykonano inwersję względem punktu S. Kiedy obrazy okręgów o_1, o_2, o przy tej inwersji nie mają żadnych punktów wspólnych?*

Zadanie 258. *Dane są dwa okręgi o_1 i o_2 oraz punkt S leżący na zewnątrz obydwu tych okręgów. Wyznaczyć wszystkie takie proste l, których obrazy l' w dowolnej inwersji względem punktu S o promieniu r mają tę własność, że l' przechodzi na siebie zarówno w inwersji względem o_1, jak i o_2.*

Zadanie 259. *Dane są (różne) punkty A, B oraz okrąg o, nie zawierający tych punktów. Przez A, B prowadzimy okręgi o_1, o_2 styczne do okręgu o, oraz okrąg o_3, prostopadły do o. Udowodnij, że kąty utworzone przez pary okręgów o_1, o_3 oraz o_2, o_3 są jednakowe.*

Zadanie 260. *Dany jest okrąg o o średnicy PQ. Punkt R należy do tego okręgu i U to jego rzut na PQ. Okrąg o średnicy UR przecina okręgi o średnicach PU i UQ odpowiednio w punktach S i T. Udowodnij, ze trójki punktów P, S, R oraz Q, T, R są współliniowe.*

Zadanie 261. *Niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Prosta AI przecina okrąg Γ w punkcie D, różnym od A, oraz przecina prostą BC w punkcie L. Pokazać, że*[1] *$AI/IL = AD/DI$.*

Zadanie 262. *Półproste k i l mają wspólny początek o. Na prostej l dane są punkty A oraz B. Znajdź zbiór punktów styczności*[2] *par okręgów stycznych do prostej k w punktach A i B, których drugą wspólną styczną jest prosta l.*

Zadanie 263. *Niech p będzie połową obwodu trójkąta ABC. Punkty E i F są różne, leżą na prostej AB oraz $CE = CF = p$. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie EFC jest styczny do okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku AB.*[3]

Zadanie 264. *Dane są cztery okręgi S_1, S_2, S_3, S_4 przy czym S_1 i S_2 przecinają się w punktach A_1 oraz A_2, okręgi S_2 oraz S_3 przecinają się w punktach B_1 oraz B_2, okręgi S_3 i S_4 przecinają się w punktach $C_1 i C_2$, zaś okręgi S_4 i S_1 przecinają się w punktach D_1 i D_2. Udowodnij, że jeśli punkty A_1, B_1, C_1, D_1 leżą na jednym okręgu lub prostej, wówczas także punkty A_2, B_2, C_2, D_2 leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 265. *Niech ABC będzie trójkątem. Załóżmy, że okrąg przechodzący przez punkt C i styczny do AB w A oraz okrąg przechodzących przez B i styczny do AC w A mają różne promienie. Niech D będzie drugim punktem przecięcia tych punktów. Niech E będzie punktem na półprostej $AB^{\rightarrow}$, że $AB = BE$. Niech F będzie drugim punktem przecięcia prostej CA z okręgiem opisanym na trójkącie ADE. Pokazać, że $AF = AC$.*[4]

Zadanie 266. *Niech M, N będą takimi punktami na bokach AB i AC trójkąta ABC, że $MN||BC$. Proste BN i CM przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach BMP oraz CNP mają drugi punkt wspólny Q (różny od P). Wykazać, że $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.*

Zadanie 267. *Dane są cztery okręgi S_1, S_2, S_3, S_4, przy czym S_1 oraz S_3 przecinają się (każdy) zarówno z S_2 jak i S_4. Pokazać, że jeśli punkty przecięcia S_1 z S_2 oraz S_3 z S_4 leżą na jednej prostej lub okręgu, to także punkty przecięcia S_1 z S_4 oraz S_2 z S_3 leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 268. *Dwie wspólne styczne zewnętrzne k, l okręgów o_1 i o_2 przecinają się w punkcie A. Same okręgi przecinają się i B jest jednym z ich punktów wspólnych. Niech C, D będą punktami styczności jednej z prostych k, l odpowiednio z o_1 i o_2. Pokazać, że prosta AB jest styczna do okręgu przechodzącego przez punkty B, C, D.*

---

[1] **Wskazówka**. Inwersja w korzeniu trójliścia.
[2] **Wskazówka**. Inwersja względem punktu A.
[3] **Wskazówka**. Inwersja względem punktu C.
[4] **Wskazówka**. Inwersja względem punktu A.

Zadanie 269. *Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie AIC w punktach A i C przecinają się w X. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie BID w punktach B i D przecinają się w Y. Wykaż, że punkty X, I, Y są współliniowe.*

Zadanie 270. *Niech PQ będzie średnicą półokręgu H. Okrąg O jest styczny wewnętrznie do H oraz styczny do PQ w punkcie C. Niech A będzie punktem na H oraz B punktem na PQ takim, że $AB \perp PQ$, przy czym prosta AB jest styczna do O. Pokazać, że AC jest dwusieczną kąta $\measuredangle PAB$.*

Zadanie 271. *(5p, $\star$) Okręgi k_1, k_2 oraz k_3 przecinają się w punkcie O. Niech A, B, C będą punktami przecięcia (różnymi od O) okręgów k_2 i k_3, dalej k_1 i k_3, wreszcie k_1 i k_2. Załóżmy, że punkt O leży wewnątrz trójkąta A, B, C. Proste AO, BO, CO przecinają okręgi k_1, k_2, k_3 po raz drugi w punktach A', B', C'. Pokazać, że:*

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 1.$$

Zadanie 272. *Znajdź obrazy przy $\sqrt{bc}$-inwersji:*

- *prostych zawierających boki trójkąta ABC,*
- *okręgu opisanego na trójkącie ABC, ozn. $(\triangle ABC)$,*
- *okręgu wpisanego w trójkąt ABC,*
- *okręgu dopisanego do boku BC trójkąta ABC.*

Zadanie 273. *Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do prostych BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w $\triangle ABC$ jest styczny do prostej AB w punkcie E. Pokazać, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.*

Zadanie 274. *Okrąg o_1 jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz do okręgu $(\triangle ABC)$ w punkcie P. Okrąg o_2 jest styczny do półprostych $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$ oraz jest styczny zewnętrznie do $(\triangle ABC)$ w punkcie Q. Wykazać, że:*

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

Zadanie 275. *Punkt O jest środkiem okręgu $(\triangle ABC)$. Punkt D jest spodkiem wysokości z A, a E – punktem przecięcia prostych AO i BC. Styczne do okręgu $(\triangle ABC)$ w punktach B i C przecinają się w punkcie T, a prosta AT przecina ten okrąg w punkcie F. Udowodnić, że okrąg $(\triangle DEF)$ jest styczny do okręgu $(\triangle ABC)$ (przypominam oznaczenie - to są wszystko okręgi opisane na odpowiednich trójkątach).*

Zadanie 276. *Niech punkty D, B, C, E leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności i niech punkt A spełnia równości $AB = DB$ oraz $AC = EC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $\measuredangle ABC$ oraz $\measuredangle ACB$ i ich przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie ABC oznaczmy odpowiednio przez K i L, zaś ich przecięcia z przeciwległymi bokami trójkąta ABC oznaczmy odpowiednio przez P i Q. Niech O_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DBL, zaś O_2 – środkiem okręgu opisanego na trójkącie ECK. Przez S oznaczmy punkt przecięcia CO_1 i BO_2. Udowodnić, że $AS \perp PQ$.*

Zadanie 277. *Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg ω jest styczny do boków AC i BC oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu Ω w punkcie P. Prosta równoległa do AB przechodząca przez wnętrze trójkąta ABC jest styczna bo ω w punkcie P. Wykaż, że $\measuredangle ACP = \measuredangle QCB$.*

Zadanie 278. *Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech B_0 oraz C_0 będą odpowiednio środkiem boku AC oraz AB. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z A oraz niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez B_0, C_0 oraz stycznym do okręgu $(\triangle ABC)$ w punkcie $X \neq A$. Wykaż, że punkty D, G, X są współliniowe.*

Zadanie 279. *Niech ABC będzie trójkątem, którego okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach P, Q, R. Niech D będzie punktem przecięcia prostych PQ oraz AB oraz niech E będzie punktem przecięcia prostych RP oraz CA. Wykaż, że jeśli J jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, to okręgi opisane na trójkątach PQE, PRD oraz PIA mają wspólną oś potęgową.*

Zadanie 280. *Niech ABC będzie trójkątem, zaś P dowolnym punktem różnym od wierzchołków ABC. Niech P^* będzie punktem izogonalnie sprzężonym do P względem ABC. Niech A' będzie różnym od P punktem przecięcia prostej AP z okręgiem opisanym na trójkącie PBC, zaś A'^* punktem przecięcia prostej równoległej do PP^* przechodzącej przez A', z prostą AP^*. Wreszcie, niech Y, Z będą odpowiednio punktami przecięcia symetralnych P^*A oraz P^*A' oraz PA i PA'^*. Wykaż, że Y, O, Z są współliniowe, gdzie O jest środkiem okręgu ($\triangle ABC$).*

Zadanie 281. *Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie to O. Niech Γ_B będzie okręgiem przechodzącym przez A, B oraz stycznym do AC oraz niech Γ_C będzie okręgiem przechodzącym przez A oraz C i stycznym do AB. Przez punkt A przechodzi dowolna prosta przecinająca Γ_B ponownie w X, oraz przecinająca Γ_C ponownie w Y. Pokazać, że $OX = OY$.*

Zadanie 282. ($\star$) *Niech L, N będą punktami styczności prostych poprowadzonych z punktu K do okręgu k. Na półprostej KN obieramy dowolny punktu M taki, że $KM > KN$. Niech P będzie (różnym od L) punktem przecięcia okręgu k z okręgiem opisanym na trójkącie KLM. Punkt Q jest rzutem punktu N na prostą ML. Pokazać, że $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.*

Zadanie 283. ($\star$) *Niech $M, A_1, \ldots, A_n$ będą, dla $n \geqslant 3$ różnymi punktami na płaszczyźnie takimi, że:*

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{1}{MA_2 \cdot MA_3} + \ldots + \frac{1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geqslant \frac{1}{MA_1 \cdot MA_n}$$

i wyznaczyć wszystkie przypadki, gdy zachodzi równość.

2.7 Wektory. Iloczyn skalarny i wektorowy

Zadanie 284. *Niech A, B, C oraz D będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Wykaż, że:*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Zadanie 285. *Amelia, Bolesław i Czesław biegną po równoległych do siebie torach każdy ze stałą prędkością (różną, rzecz jasna, dla każdego z nich). W momencie gdy startują do biegu trójkąt ABC utworzony przez nich na płaszczyźnie (gdzie odpowiednie wierzchołki to pierwsze litery imion biegaczy) ma pole 2. Po 5 sekundach biegu trójkąt ABC ma pole 3. Jakie pole może mieć trójkąt ABC po kolejnych 5 sekundach biegu?*

Zadanie 286. *Dane są wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ takie, że $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Wykaż, że:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Korzystając z udowodnionej równości i z definicji iloczynu wektorowego udowodnij tw. sinusów.

Zadanie 287. *Wykaż, że spośród dowolnych pięciu wektorów (powiedzmy – na płaszczyźnie, choć nie ma to znaczenia) można zawsze wskazać dwa takie, że długość ich sumy nie przekracza długości sumy pozostałych trzech wektorów.*

Zadanie 288. *Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech $\vec{X} = \overrightarrow{OX}$, dla dowolnego punktu X. Udowodnij, że:*

- $AC \perp BD \Leftrightarrow (\vec{A} - \vec{C})(\vec{B} - \vec{D}) = 0$,
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c}{2}$,
- $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, *gdzie H jest ortocentrum trójkąta ABC.*

Zadanie 289. *Niech punkt X ma unormowane współrzędne barycentryczne (x, y, z) (względem trójkąta ABC). Wykazać, że $\vec{X} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ (oznaczenia jak w Zad 1).*

Zadanie 290. *Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech D będzie środkiem boku AB, zaś E – punktem przecięcia środkowych w trójkącie ACD. Pokazać, że prosta CD jest prostopadła do prostej OE wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.*

Zadanie 291. *(2p) Wykaż, że jeśli kąt ACB trójkąta ABC jest rozwarty, to $\cos(2A) + \cos(2B) - \cos(2C) > 1$.*

Zadanie 292. *Udowodnić, że jeśli przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, to przekątne dowolnego czworokąta, którego boki mają identyczną długość jak boki czworokąta $ABCD$, również są prostopadłe.*

Zadanie 293. *Niech A, B, C, D będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Udowodnij, że:*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Wychodząc od tej równości podaj alternatywny dowód, że wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 294. *Punkty A, B, C, D mają tę własność, że dla każdego punktu M liczby $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ oraz $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ są różne. Wykaż, że $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Zadanie 295. *Niech $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ będzie sześciokątem wypukłym, którego przeciwległe boki są równoległe. Udowodnij, że $[A_1A_3A_5] = [A_2A_4A_6]$.*

Zadanie 296. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu R. Niech S_a będzie okręgiem o promieniu R o środku w ortocentrum trójkąta BCD. Podobnie definiujemy okręgi S_b, S_c, S_d. Pokazać, że okręgi te mają punkt wspólny.*

Zadanie 297. *Dany jest czworościan $ABCD$, o którego kątach płaskich wiadomo, że $\measuredangle BAD = 60°$, $\measuredangle BAC = 40°$, $\measuredangle ABD = 80°$, $\measuredangle ABC = 70°$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe.*

Zadanie 298. *Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P. Niech punkt Q będzie taki, że $CQ||AP$ oraz punkt R niech będzie taki, że $AR||BQ$ oraz $CR||BP$. Udowodnić, że $S(ABC) = S(PQR)$.*

Zadanie 299. *Niech H_1, H_2, H_3 będą ortocentrami trójkątów $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4$ oraz $A_1A_2A_4$, gdzie A_1, A_2, A_3, A_4 są pewnymi punktami na płaszczyźnie. Wykazać, że $[A_1A_2A_3] = [H_1H_2H_3]$.*

2.8 Współrzędne barycentryczne

Zadanie 300. *Niech D będzie punktem na boku BC trójkąta ABC takim, ze $AB + BD = AC + CD$. Pokazać, że $AD||IM$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś M jest środkiem odcinka BC.*

Zadanie 301. *Wykaż, że współrzędne barycentryczne środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC to $(a : b : c)$. Znajdź współrzędne barycentryczne środków okręgów dopisanych do trójkąta ABC.*

Zadanie 302. *Punktem Nagela trójkąta ABC nazywamy punkt przecięcia prostych AD, BE, CF, gdzie D, E, F są punktami styczności okręgów dopisanych do boków BC, CA oraz AB trójkąta ABC. Wykaż, że środek ciężkości, środek okręgu wpisanego oraz punkt Nagela trójkąta ABC leżą na jednej prostej.*

Zadanie 303. *Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem oraz niech P, Q będą pewnymi punktami na jego bokach AB oraz BC. Niech P', Q', D' będą środkami odcinków QD, DP oraz PQ. Wykazać, że proste AQ', BD' oraz CP' przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 304. *Dany jest trójkąt ABC spełniający $AC + BC = 3AB$. Okrąg wpisany w ABC ma środek I i jest styczny do boków BC, CA w punktach D, E. Niech K, L będą odbiciami D oraz E względem I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na okręgu.*

Zadanie 305. *Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D na boku BC. Niech U, V będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD oraz ACD. Wykazać, że proste BV, CU oraz AD przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy AD jest dwusieczną kąta BAC.*

Zadanie 306. *W trójkącie ABC środek ciężkości to G, zaś środek boku AC to D. Prosta przechodząca przez G i równoległa do BC przecina bok AB w punkcie E. Pokazać, że $\measuredangle AEC = \measuredangle DGC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle ACB = 90°$.*

Zadanie 307. *Niech P, Q leżą na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC przy czym $\measuredangle PAB = \measuredangle BCA$ oraz $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$. Niech M, N będą punktami na AP oraz AQ takimi, że P jest środkiem AM oraz Q jest środkiem AN. Wykazać, że przecięcie prostych BM oraz CN leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.*

Zadanie 308. *Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Punkt P leży na boku BC w ten sposób, że prosta PA jest styczna do ω. Dwusieczna kąta APB przecina proste AB oraz AC odpowiednio w D oraz E. Odcinki BE oraz CD przecinają się w punkcie Q. Wiedząc, że prosta PQ przechodzi przez środek ω wyznacz miarę kąta BAC.*

Zadanie 309. *Niech ABC będzie trójkątem, w który wpisano okrąg ω. Przez D_1 oraz E_1 oznaczamy punkty styczności tego okręgu z bokami BC oraz AC. Przez D_2 oraz E_2 oznaczamy punkty na bokach BC oraz AC takie, że $CD_2 = BD_1$ oraz $CE_2 = AE_1$. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AD_2 oraz BE_2. Okrąg ω przecina odcinek AD_2 w dwóch punktach. Bliższy wierzchołkowi A oznaczamy przez Q. Pokaż, że $AQ = D_2P$.*

Zadanie 310. ($\star$) *Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC. Styczne do ω w punktach B i C przecinają się w punkcie P. Proste AP i BC przecinają się w D. Punkty E i F obrane są na bokach AC i AB tak, że $DE||BA$ oraz $DF||CA$.*

- *Pokaż, że punkty F, B, C, E leżą na jednym okręgu.*
- *Niech A_1 będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $FBCE$. Analogicznie definiujemy B_1 oraz C_1 (środki okręgów opisanych na odpowiednich czworokątach). Udowodnić, że AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie.*

3 Klasa trzecia

3.1 Odpowiedniość biegunowa

Zadanie 311. *Niech UV będzie średnicą półokręgu, zaś P, Q – takimi punktami na tym półokręgu, że $UP < UQ$. Styczne do półokręgu w punktach P, Q przecinają się w punkcie R. Niech S będzie punktem przecięcia prostych UP oraz VQ. Wykaż, że $RS \perp UV$.*

Zadanie 312. *Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe.*

Zadanie 313. *W trójkącie ABC okrąg ω o środku I jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Proste EF i BC przecinają się w punkcie S. Pokazać, że $SI \perp AD$.*

Zadanie 314. *W czworokącie cyklicznym $ABCD$ punkt P leży na przecięciu prostych AB i CD, zaś punkt Q znajduje się w przecięciu przekątnych AD oraz BC. Do okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ poprowadzono styczne z punktu Q. Punkty styczności z tym okręgiem to E i F. Pokazać, że punkty P, E, F leżą na jednej prostej.*

Zadanie 315. *Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe.*

Zadanie 316. *Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Z punktu A rysujemy styczne AP i AQ o średnicy BC, gdzie P i Q to punkty styczności. Pokazać, że punkty P, Q, H są współliniowe.*

Zadanie 317. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Jego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, zaś przedłużenia prostych AB i CD przecinają się w E. Styczne do okręgu ω w punktach A i D przecinają się w K, zaś styczne do ω w punktach B i C przecinają się w L. Pokazać, że punkty E, K, O, L leżą na jednej prostej.*

Zadanie 318. *Niech punkty P i Q będą dwoma punktami na półokręgu ω o średnicy AB. Styczne do ω w punktach P i Q oraz proste AP i BQ przecinają się odpowiednio w punktach R i S. Pokazać, że $RS \perp AB$.*

Zadanie 319. *Okrąg ω jest wpisany w czworokąt $ABCD$ przy czym punkty styczności tego okręgu z bokami AB, BC, CD, DA czworokąta to odpowiednio G, H, K, L. Niech $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$, zaś $P = GK \cap HL$. Pokazać, że $OP \perp EF$, gdzie O jest środkiem okręgu ω.*

Zadanie 320. *Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Punkty P, E, F są rzutami wierzchołków A, B, C na proste BC, AC, AB. Styczne do okręgu ω w punktach B, C przecinają się w punkcie D. Prosta EF przecina prostą BC w punkcie Q. Udowodnij, że $DP \perp OQ$.*

Zadanie 321. *Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym przy czym $AB > AC$. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC oraz $E = BH \cap AC$, $F = CH \cap AB$, $K = EF \cap BC$. Pokazać, że $IH \perp AM$, gdzie M jest środkiem odcinka BC.*

Zadanie 322. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech G będzie punktem na okręgu wpisanym takim, ze FG jest średnicą tego okręgu. Proste EG oraz FD przecinają się w punkcie H. Wykazać, że $CH || AB$.*

Zadanie 323. *W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I, styczny do boków AC, AB odpowiednio w punktach E, F. Prosta przechodząca przez punkt C przecina AB oraz EF odpowiednio w punktach M, N. Proste ME oraz CF przecinają się w punkcie J. Udowodnij, że $AJ \perp IN$.*

Zadanie 324. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Okręgi opisane na trójkątach AOD oraz BOC przecinają się ponownie w K (różnym od O). Niech E będzie punktem przecięcia prostych AB i CD. Prosta EK przecina okrąg (BOC) po raz drugi w P (różnym od K). Pokazać, że prosta PC jest styczna do okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.*

Zadanie 325. *Dany jest okrąg ω o średnicy AB i środku O. Punkt C leży na zewnątrz okręgu ω na prostej AB. Przez C prowadzimy prostą przecinającą okrąg ω w punktach D oraz E $(CD < CE)$. Niech ω_1 będzie okręgiem opisanym na trójkącie OBD o środku O_1. Punkt F jest odbiciem symetrycznym O względem O_1. Prosta CF przecina okrąg ω_1 ponownie w punkcie G (różnym od F). Pokazać, że jeśli $K = AE \cap BD$, to punkty K, G, O leżą na jednej prostej.*

Zadanie 326. *W trójkącie ABC $(AB \neq AC)$ punkty D oraz E są spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktów B i C na proste (odpowiednio) AC oraz AB. Prosta DE przecina prostą równoległą do CB i przechodzącą przez punkt A w punkcie T. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Niech K będzie punktem przecięcia prostej AM i okręgu ω opisanego na trójkącie ADE (różnym od A). Pokazać, że prosta TK jest styczna do okręgu ω.*

Zadanie 327. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego ortocentrum to punkt H. Niech K będzie pewnym punktem na odcinku CD. Punkt S leży na prostej HK i ma tę własność, że $AS \perp HK$. Proste EF i AH przecinają się w punkcie I. Prosta prostopadła do AK przechodząca przez punkt H przecina AK w punkcie L. Pokazać, że punkty S, I, L leżą na jednej prostej.*

Zadanie 328. *Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB \neq AC$. Punkty K, L, M są środkami boków BC, CA i AB. Okrąg wpisany w trójkąt ABC o środku I jest styczny do prostej BC w punkcie D. Prosta przechodząca przez środek odcinka ID, prostopadła do IK, przecina prostą LM w punkcie P. Pokazać, że $\angle PIA = 90^\circ$.*

To zadanie z MEMO 2016. Można je zrobić używając naszego lematu o biegunie linii środkowej (wciąż nikt tego nie zrobił!). Wsk.: znaleźć biegunową punktu P

Zadanie 329. *Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AC \neq BD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Punkt P wewnątrz czworokąta $ABCD$ ma tę własność, że*

$$\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90^\circ.$$

Udowodnić, że proste O, P, E są współliniowe.

3.2 Czwórka harmoniczna

Zadanie 330. *W trójkącie ABC punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB. Prosta YZ przecina prostą BC w punkcie X'. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

(a) *proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie,*

(b) $(B, C; X, X') = -1$

Zadanie 331. *Dane są cztery punkty A, C, B, D leżące w tej kolejności na prostej. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

(a) $(A, B; C, D) = -1$,

(b) $PA^2 = PC \cdot PD$.

Zadanie 332. *Dany jest trójkąt ABC i punkt M na boku BC. Niech N będzie takim punktem na prostej BC, że kąt MAN jest prosty. Udowodnij, że $(B, C; M, N) = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy AM jest dwusieczną kąta BAC.*

Zadanie 333. *Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej na prostą BC. Niech M, N będą takimi punktami na bokach CA i AB, że proste BM oraz CN przecinają się na prostej AD. Pokazać, że $\measuredangle MDA = \measuredangle NDA$.*

Zadanie 334. *W trójkącie ABC punkt D jest przecięciem dwusiecznej kąta BAC z prostą BC. Rzuty punktów B oraz C na prostą AD oznaczamy jako H oraz G. Pokazać, że $(A, D; H, G) = -1$.*

Zadanie 335. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB w punktach D, E, F. Punkty A', B' są środkami boków BC, CA tego trójkąta. Punkt Y leży na przecięciu prostych $A'B'$ oraz EF. Pokazać, że $Y(D, F; B, C) = -1$.*

Zadanie 336. *W trójkącie ABC $(AB \neq AC)$ punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na podstawę BC. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AC i AB tak, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Pokazać, że $\measuredangle ADF = \measuredangle EDA$.*

Zadanie 337. *W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I, styczny do boków BC, AC, AB tego trójkąta w punktach D, E, F. Prosta BI przecina się z prostą EF w punkcie S. Pokazać, że $BS \perp CS$.*

Zadanie 338. *Niech L, M, N będą takimi punktami odpowiednio na bokach AC, AB i BC trójkąta ABC, że BL jest dwusieczną kąta ABC oraz odcinki AN, BL i CM mają punkt wspólny. Udowodnić, że jeśli $\measuredangle ALB = \measuredangle MNB$, to $\measuredangle LNM = 90°$.*

Zadanie 339. *Czworokąt $ABCD$ jest wypukły, a prosta AC jest dwusieczną kąta BAD. Punkt E leży na odcinku CD, a punkt F jest przecięciem BE i AC. Odcinek DF przedłużamy do przecięcia z bokiem BC w punkcie G. Wykazać, że $\measuredangle GAC = \measuredangle EAC$.*

Zadanie 340. *AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $D \in BC$. Punkt P leży na odcinku AD. Proste BP oraz CP przecinają proste AC oraz AB odpowiednio w punktach M, N. Prosta MN przecina bok AD w punkcie Q. Punkt F obrano dowolnie na boku AC. Prosta FQ przecina CN w E. Pokazać, że $\measuredangle FDA = \measuredangle EDA$.*

Zadanie 341. *(3p) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Niech $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$, $G = AC \cap BD$. Niech M, N będą środkami boków AC oraz BD. Proste AC oraz BD przecinają prostą EF odpowiednio w P i Q. Pokazać, że M, N, P, Q leżą na jednym okręgu.*

Zadanie 342. *W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem A na prostą BC. Niech P będzie dowolnym punktem na odcinku AD. Proste BP i CP przecinają boki AC, AB odpowiednio w M, N. Prosta MN przecina AD w Q. Punkt F obrano dowolnie na boku AC. Proste FQ oraz CN przecinają się w punkcie E. Pokazać, że $\measuredangle FDA = \measuredangle EDA$.*

Zadanie 343. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AC. Niech A', D' będą punktami symetrycznymi do A, D odpowiednio względem prostych BD oraz AC. Niech $A'C \cap BD = F$ oraz $AC \cap BD' = E$. Wykaż, że $EF \perp BD$.*

Zadanie 344. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Niech $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$, oraz $P = AC \cap BD$. Niech O będzie rzutem P na EF. Pokazać, że $\measuredangle BOC = \measuredangle AOD$.*

Zadanie 345. *Niech ABC będzie trójkątem, zaś D, E, F punktami styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z bokami BC, CA, AB. Punkt X znajduje się wewnątrz trójkąta ABC i ma tę własność, że okrąg wpisany w trójkąt XBC jest styczny do prostych XB, XC, BC w punktach Z, Y, D. Pokazać, że czworokąt $EFZY$ jest cykliczny.*

Zadanie 346. *Punkt M_1 należy do boku AB czworokąta $ABCD$. Niech $M_2 = DM_1 \cap BC$, zaś $M_3 = AM_2 \cap CD$, a dalej $M_4 = BM_3 \cap DA$, $M_5 = CM_4 \cap AB$ i tak dalej. Pokazać, że $M_{13} = M_1$.*

Zadanie 347. *Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie M, N są środkami przekątnych AC oraz BD. Wiadomo, że AC oraz BD są dwusiecznymi odpowiednio kątów BMD oraz CNA. Pokazać, że na $ABCD$ można opisać okrąg.*

Zadanie 348. *Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$ i M jest środkiem boku CD. Niech N będzie punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABM. Załóżmy, że $N \neq M$ oraz $AN/BN = AM/BM$. Udowodnić, że punkty E, F, N są współliniowe, gdzie $E = AC \cap BD$ oraz $F = BC \cap DA$.*

Zadanie 349. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, proste AD i BC przecinają się w punkcie Q, zaś proste AC i BD przecinają się w punkcie R. Punkt M jest środkiem odcinka PQ. Niech K będzie punktem na przecięciu odcinka MR oraz okręgu ω. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie KPQ oraz okrąg ω są styczne zewnętrznie.*

Zadanie 350. *Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na nierównoramiennym trójkącie ABC. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E, F. Przypuśćmy, że $P = DE \cap AB$, $Q = DF \cap AC$, $R = EF \cap BC$, zaś M, N – to środki odcinków QE i PF. Pokazać, że proste prostopadłe przechodzące przez punkty O, P, Q do prostych odpowiednio MN, CF i BE przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 351. *Punkt M leży na przekątnej BD równoległoboku $ABCD$. Prosta AM przecina bok CD oraz prostą BC odpowiednio w punktach M, N. Niech ω_1 będzie okręgiem o środku M i promieniu MA oraz ω_2 niech będzie okręgiem opisanym na trójkącie KCN. Okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach P, Q. Wykazać, że MP, MQ są stycznymi do ω_2.*

Zadanie 352. *W trójkącie ABC punkty D, E leżą na prostej BC przy czym $BD = DE = EC$. Prosta p przecina proste AB, AD, AE, AC odpowiednio w punktach K, L, M, N. Udowodnij, że $KN \geqslant 3LM$.*

* * *

Zadanie 353. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$ oraz $P = AC \cap BD$. Prosta równoległa do QR przechodząca przez punkt P przecina proste AB, CD w punktach odpowiednio X i Y. Wykazać, że P jest środkiem odcinka XY.*

Zadanie 354. *Punty E, F są rzutami wierzchołków B, C trójkąta ABC na proste AC, AB. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B, C przecinają się w D. Niech $AD \cap EF = I$. Pokazać, że $IE = IF$.*

Zadanie 355. *Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym, gdzie $AC = BC$. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB oraz BC odpowiednio w D oraz E. Prosta przechodząca przez A i różna od AE przecina okrąg ω w punktach F, G. Proste EF oraz EG przecinają AB w punktach K oraz L. Pokazać, że D jest środkiem odcinka KL.*

Zadanie 356. *Okrąg ω o środku O jest opisany na trójkącie ABC. Niech AD będzie średnicą ω. Styczna do ω w punkcie D przecina BC w punkcie E. Niech EO przecina proste AC, AB odpowiednio w punktach F, G. Pokazać, że $OF = OG$.*

Zadanie 357. *Okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech M będzie rzutem D na prostą EF. Niech punkt P będzie środkiem odcinka DM. Niech H będzie ortocentrum trójkąta BIC. Pokazać, że prosta PH przecina odcinek EF w połowie.*

Zadanie 358. *Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC. Prosta AM przecina okrąg Γ opisany na trójkącie ABC w punkcie X, różnym od A. Obieramy punkt P tak, że $BXCP$ jest równoległobokiem. Styczna do Γ w punkcie A przecina prostą BC w punkcie K. Pokazać, że $KA = KP$.*

Zadanie 359. *Na boku BC trójkąta ABC obrano punkty K, L tak, że kąty BAK oraz CAL są proste. Niech A' będzie rzutem A na BC. Pokazać, że środek AA', środek KL oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC są współliniowe.*

Zadanie 360. *Okrąg ω o środku I jest wpisany w trójkąt ABC. Jego punkty styczności z bokami BC, CA, AB to odpowiednio: D, E, F. Niech D' będzie punktem na BC takim, że $BD = CD'$. Niech d będzie prostą przechodzącą przez I i prostopadłą do AD'. Proste DE i DF przecinają prostą d odpowiednio w P i Q. Pokazać, że I jest środkiem odcinka PQ.*

Zadanie 361. *Punkt J leży wewnątrz trójkąta ABC i należy zarazem do dwusiecznej kąta BAC. Niech X, Y, Z będą rzutami J na boki BC, CA, AB tego trójkąta. Prosta YJ przecina prostą YZ w punkcie K. Pokazać, że punkty A, K, M leżą na jednej prostej, gdzie M jest środkiem boku BC.*

Zadanie 362. *Okrąg ω o środku O jest opisany na trójkącie ABC. Punkty A', B', C' są spodkami wysokości poprowadzonych z A, B, C na proste BC, CA, AB. Prosta AA' przecina ω w punkcie D (różnym od A). Na prostej $A'B'$ obieramy punkt E tak, że $BE \perp OA$. Prosta DB' przecina ω w F (różnym od B). Pokazać, że proste BF oraz AE przecinają się w środku odcinka $B'C'$.*

3.3 Twierdzenie Pappusa

Zadanie 363. *Trzy różne punkty A, B, C leżą na prostej i punkt B leży pomiędzy A i C. Budujemy trójkąty równoboczne ABD, BCE i ACF tak, że punkty D, E są po przeciwnej stronie prostej AC niż punkt F. Udowodnić, że proste AE, CD oraz BF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 364. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Punkty E, F leżą na prostych AC iBD oraz $EF||BC$. Niech $P = DE \cap AB$ oraz $Q = AF \cap CD$. Udowodnić, że $PQ||EF$.*

Zadanie 365. *Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem i niech M, N będą takimi punktami na bokach AB i BC, że $AM = NC$. Proste AN oraz MC przecinają się w Q. Pokazać, że QD jest dwusieczną kąta DCA.*

Zadanie 366. *Punkty P, Q leżą odpowiednio na bokach AB oraz AD równoległoboku $ABCD$. Obieramy punkt E tak, że czworokąt $APEQ$ również jest równoległobokiem. Niech $F = BQ \cap DP$. Pokazać, że punkty C, E oraz F leżą na jednej prostej.*

Zadanie 367. *Punkty D, E, F są rzutami wierzchołków A, B, C trójkąta ostrokątnego ABC na proste BC, AC, AB. Punkty Y, Z są odpowiednio rzutami punktu E na prostą CF oraz rzutem punktu F na prostą BE. Pokazać, że $YZ||AB$.*

Zadanie 368. *Niech ABC oraz $A'B'C'$ mają oś perspektywiczną m (a więc $AB \cap A'B' \in m$ itd). Punkt P należy do m oraz $Q = BP \cap A'C'$ i $R = AP \cap CQ$. Udowodnij, że zbiór możliwych punktów R, które można uzyskać w zależności od wyboru położenia P jest prostą.*

Zadanie 369. *Na bokach AC i AB trójkąta ABC obieramy punkty B' i C'. Niech D będzie dowolnym punktem płaszczyzny oraz niech $M = DC' \cap BB'$ oraz $N = DB' \cap CC$. Pokazać, że proste AD, BN oraz CM przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 370. *W trójkącie ABC punkty P, Q leżą na bokach odpowiednio AB, AC. Niech $S = BQ \cap CP$. Niech M, N będą środkami PQ oraz AS. Niech $U = QN \cap SM$, zaś $V = AM \cap PN$. Pokazać, że proste UV przechodzą przez pewien wspólny punkt, dla różnych P, Q na bokach AB, AC.*

Zadanie 371. *Niech E, F będą spodkami wysokości poprowadzonych z wierzchołków B, C trójkąta ABC. Punkty M i N są środkami boków CA i AB. Niech $K = MN \cap EF$. Pokazać, że prosta AK jest prostopadła do prostej Eulera trójkąta ABC (zawierającej środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum).*

Zadanie 372. *Czworokąt wypukły $ABCD$ spełnia $\angle A = \angle B = \angle C > 90°$. Pokazać, że prosta Eulera trójkąta ABC przechodzi przez punkt D.*

Zadanie 373. *Niech M będzie środkiem boku BC w trójkącie ABC. Na bokach AB oraz AC obieramy punkty E, F. Punkt K leży na przecięciu BF i CE zaś L obrany jest tak, że $CL || AB$ oraz $BL || CE$. Niech N będzie punktem przecięcia AM oraz CL. Pokazać, że $KN || FL$.*

3.4 Twierdzenie Pascala

Zadanie 374. *Okrąg Ω o środku w punkcie O jest opisany na trójkącie ABC, zaś okrąg ω jest wpisany w ten trójkąt i styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Definiujemy punkty K, L odpowiednio jako przecięcia prostych DE i DF ze styczną do okręgu Ω poprowadzoną w punkcie A. Wykazać, że proste EL oraz FK przecinają się na okręgu ω.*

Zadanie 375. *Okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD oraz DA odpowiednio w punktach E, F, G, H. Udowodnij, że:*

- *proste AC, EF oraz GH przecinają się w jednym punkcie*
- *proste AC, BD, EG oraz FH przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 376. *Odcinek AB jest średnicą okręgu ω o środku O. Na ω obieramy punkty C, D oraz E, przy czym: C, D leżą po przeciwnej stronie AB niż E oraz $AD > AC$. Określamy też punkty: $I = AD \cap CE$ oraz $K = OI \cap BE$. Wykazać, że $KD \perp CD$.*

Zadanie 377. *Niech D, E, F będą środkami tych łuków BC, CA, AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, które nie zawierają odpowiednio punktów A, B, C. Niech $M = DE \cap BC$ oraz $N = EF \cap AB$. Udowodnić, że $MN || CA$.*

Zadanie 378. *Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ABC. Punkt D znajduje się na łuku BC nie zawierającym punktu A. Styczna do Ω w punkcie D przecina BC w punkcie E. Okrąg opisany na trójkącie ODE przecina AD w punkcie F. Prosta EF przecina AB w punkcie M, zaś DM przecina Ω w punkcie K. Pokazać, że K, F, C są współliniowe.*

Zadanie 379. *Niech Ω będzie okręgiem opisanym na czworokącie $ABCD$ oraz niech $AC \cap BD = P$. Przez Ω_1, Ω_2 oznaczamy okręgi przechodzące odpowiednio przez pary punktów: P, B oraz P, A. Okręgi te przecinają się w punkcie $Q \neq P$. Niech $\Omega \cap \Omega_1 = E \neq B$, oraz $\Omega \cap \Omega_2 = F \neq A$. Pokazać, że proste PQ, CE oraz DF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 380. *Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC i niech l będzie prostą przechodzącą przez ten punkt. Definiujemy $X = l \cap BC$, $Y = l \cap AC$, $Z = l \cap AB$, $R_1 = AP \cap \omega$, $R_2 = BP \cap \omega$, $R_3 = CP \cap \omega$. Wykazać, że R_1X, R_2Y, R_3Z przecinają się na ω.*

Zadanie 381. *Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg ω. Określamy $E = AA \cap CD$, $F = AA \cap BC$, $G = BE \cap \omega$, $H = BE \cap AD$, $I = DF \cap \omega$ oraz $J = DF \cap AB$. Pokazać, że proste GI, HJ oraz symediana trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka B przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 382. *Niech A, B, C, A', B', C' leżą na okręgu ω w ten sposób, że prosta AA' jest prostopadła do BC, prosta BB' jest prostopadła do CA oraz prosta CC' jest prostopadła do AB. Niech D będzie dowolnym punktem na okręgu ω, różnym od wcześniej wprowadzonych. Prosta DA' przecina BC w A'', prosta DB' przecina CA w B'' oraz prosta DC' przecina AB w C''. Pokazać, że punkty A'', B'', C'' oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednej prostej.*

Zadanie 383. *Niech A, B, C, D leżą (w tej kolejności) na okręgu Ω, przy czym AB jest średnicą tego okręgu. Niech P, Q będą takimi punktami na CA i BD, że $PQ || AB$. Niech $P' = BP \cap \Omega$, $Q' = AQ \cap \Omega$, $X = DQ' \cap CP'$, $Y = (AXC) \cap AB$, $Z = (BXD) \cap AB$. Pokazać, że $AY = BZ$.*

3.5 Twierdzenie Desarguesa

Zadanie 384. *W czworokącie $ABCD$ mamy $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = Q$, $AC \cap BD = R$. Pokazać, że punkty przecięć $PR \cap BC$, $QR \cap AB$, $PQ \cap AC$ przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 385. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że punkty $AB \cap DE$, $CD \cap EF$, $CA \cap DF$ leżą na jednej prostej.*

Zadanie 386. *Dany jest trójkąt ABC. Punkty E i G leżą na boku BC, punkty F i H leżą na boku AC. Punkty $AG \cap BH$, $AE \cap BF$ oraz punkt C leżą na jednej prostej. Wykaż, że jeśli proste EF i GH nie są równoległe, o przecinają się na prostej AB.*

Zadanie 387. *Na bokach AB, BC, CD czworokąta $ABCD$ (lub na ich przedłużeniach) obieramy punkty K, L, M. Mamy przy tym: $KL \cap AC = P, LM \cap BD = Q$. Pokazać, że proste AD, KQ, MP przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 388. *Trójkąty ACE, ABF oraz BCD są równoboczne, a ich środki ciężkości to I, H, K. Definiujemy $FI \cap HE = L$, $DH \cap FK = J$, $DI \cap EK = M$. Pokazać, że proste LK, IJ, HM przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 389. *Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnić, że proste AD, BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 390. *Punkt P leży na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$. Okrąg ω o środku I jest okręgiem wpisanym w trójkąt CPD. Zakładamy przy tym, że ω jest styczny zewnętrznie do okręgów wpisanych w trójkąty APD i BPC odpowiednio w punktach K oraz L. Niech $AC \cap BD = E$ oraz $AK \cap BL = F$. Pokazać, że punkty E, I, F leżą na jednej prostej.*

3.6 Zadania różne z geometrii rzutowej

Zadanie 391. *Na okręgu Γ o środku O obieramy punkt S. Z punktu C leżącego na zewnątrz Γ prowadzimy proste styczne do tego okręgu w punktach A, B. Prosta prostopadła do prostej SO przecina proste SA, SB, SC odpowiednio w punktach A', B', C'. Pokazać, że C' jest środkiem odcinka $A'B'$.*

Zadanie 392. *Niech D oraz E będą środkami łuków AB oraz AC okręgu opisanego na trójkącie ABC nie zawierającymi odpowiednio punktów C oraz B. Niech punkt P będzie na łuku BC nie zawierającym punktu A. Definiujemy punkty $Q = DP \cap AB$ oraz $R = EP \cap AC$. Pokazać, że prosta QR przechodzi przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC.*

Zadanie 393. *Dany jest trójkąt ABC oraz okrąg ω przecinający:*

- *bok BC w punktach M, N tak, że M leży między punktem B, a punktem N,*
- *bok AC w punktach P, Q tak, że P leży między punktem C, a punktem Q,*
- *bok AB w punktach S, T tak, że S leży między punktem A, a punktem T.*

Niech $K = SN \cap QM$, $H = QM \cap TP$, $TP \cap SN = L$. Pokazać, że proste AK, BH oraz CL przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 394. *Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Na okręgu tym obieramy punkt P. Niech D, E, F będą środkami BC, CA, AB i niech PD, PE, PF przecinają ponownie okrąg ω w punktach A', B', C'. Wykazać, że AA', CC' oraz DF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 395. *Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC oraz $BP \cap AC = E$, $CP \cap AB = F$, $AP \cap EF = Q$. Obieramy punkt R taki, że $QR \perp BC$. Prosta l przechodzi przez A i jest równoległa do BC oraz $RQ \cap l = X$, $RE \cap l = Y, RF \cap l = Z$. Niech M będzie środkiem boku BC. Udowodnić, że MX, BY, CZ, EF przecinają się w jednym punkcie.*

Zadanie 396. *Przedłużenia boków AB i CD czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P, a przedłużenia boków BC i AD w punkcie Q. Przez punkt P prowadzimy prostą przecinającą BC i AD w punktach E, F. Wykaż, że przecięcia przekątnych w czworokątach $ABCD, ABEF$ oraz $CDFE$ leżą na prostej zawierającej punkt Q.*

Zadanie 397. *Trójkąty ABC oraz XYZ są wpisane w okrąg i mamy punkty:*

$$P = AB \cap YZ,\ \ S = BC \cap ZX,\ \ Q = CA \cap YZ,\ \ R = BC \cap XY,\ \ V = AB \cap XY,\ \ W = CA \cap ZX.$$

Pokazać, że proste PS, QR, VW przecinają się w jednym punkcie.